

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ СОСНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

С. А. БОСТАНДЖИЯН, Л. П. ГОРЛОВ

(Москва)

Для определения вязкости жидкостей на практике широко используются ротационные вискозиметры. Методика обработки экспериментальных данных базируется в основном на аналитическом решении задачи об изотермическом течении вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами.

Если в ходе эксперимента выделяющееся за счет внутреннего трения тепло приводит к существенным разогревам, то обработка результатов эксперимента по формулам, полученным в предположении изотермичности течения, может привести к большим ошибкам. Можно уменьшить диссипативный разогрев уменьшением угловой скорости вращения цилиндра, однако сильное уменьшение угловой скорости нежелательно, так как это приводит к увеличению относительной ошибки измерений. Кроме того, возникает необходимость проведения опытов с широким варьированием угловых скоростей для выявления структурно-реологических особенностей жидкости. В последнем случае необходимо уметь отделять чисто тепловые эффекты от влияния реологических особенностей. Все эти вопросы подробно обсуждались в работе [1]. Там же авторами получено решение задачи о неизотермическом течении ньютоновской жидкости между двумя вращающимися цилиндрами и дана методика обработки экспериментальных данных, учитывающая диссипативный разогрев жидкости. Настоящая работа преследует такую же цель для вязко-пластической жидкости.

Попытка решения задачи о неизотермическом течении вязко-пластической жидкости была сделана Г. И. Джафаровым в работе [2]. Задача автором решалась в двух вариантах. В первом варианте считается, что вязкость зависит от температуры по гиперболическому закону и зазор между цилиндрами мал по сравнению с радиусом внутреннего цилиндра. В результате линеаризации уравнений движения и теплового баланса получилось, что фактически решена не исходная задача, а задача о куэтовском течении вязко-пластической жидкости. При этом, естественно, такая особенность течения вязко-пластической жидкости в кольцевом зазоре, как возможность образования упругой зоны, не выявлена. Во втором варианте задача решалась в предположении, что вязкость от температуры не зависит, а угловая скорость мала.

В настоящей работе задача решается без перечисленных выше ограничений на угловую скорость, вязкость жидкости и зазор между цилиндрами. При этом рассматриваются два типа температурных граничных условий: а) на поверхностях цилиндров заданы постоянные, в общем случае — разные температуры, б) на поверхности внешнего цилиндра задана постоянная температура, внутренний цилиндр теплоизолирован.

1. Пусть кольцевое пространство между двумя бесконечными соосными цилиндрами заполнено вязко-пластической жидкостью. Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно — r_1 и r_2 , температуры — T_1 и T_2 . Будем считать, что внешний цилиндр неподвижен, внутренний вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 . Движение жидкости установившееся, предельное напряжение сдвига σ_0 постоянное, зависимость вязкости от температуры дается гиперболическим законом

$$\mu(T) = \frac{\mu_0}{1 + \beta^2(T - T_2)} \quad (1.1)$$

В зависимости от параметров жидкости, геометрии области и угловой скорости вращения возможны два режима течения: течение без упругой зоны и с упругой зоной. Ниже будут рассмотрены оба типа течения и установлены области изменения параметров, в которых осуществляются тот или иной режим течения.

а) *Течение без упругой зоны.* Реологическое уравнение вязко-пластической жидкости для рассматриваемого типа течения записывается в виде

$$\tau_{r\varphi} = \mu r \frac{d\omega}{dr} + \sigma_0 \quad (1.2)$$

где $\tau_{r\varphi}$ — касательное напряжение.

Систему уравнений движения и теплового баланса с учетом тепловыделения от внутренних сил трения можно записать так:

$$\frac{d\tau_{r\varphi}}{dr} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\tau_{r\varphi}}{\lambda J} r \frac{d\omega}{dr} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности жидкости, J — механический эквивалент тепла. Интегрируя первое уравнение системы, получаем

$$r^2 \tau_{r\varphi} = C \quad (1.4)$$

где C — постоянная интегрирования.

Введя безразмерные координату x , температуру θ и параметр δ соотношениями

$$x = r/r_2, \quad \theta = 1 + \beta^2(T - T_2), \quad \delta = \frac{\sigma_0 r_2 \beta}{\sqrt{\lambda J \mu_0}} \quad (1.5)$$

и исключив из второго уравнения системы (1.3) при помощи (1.2) и (1.4) касательное напряжение и производную угловой скорости, получим

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + x \frac{d\theta}{dx} + (a^2 x^2 - \nu^2) \theta = 0 \quad (1.6)$$

$$\lambda = \delta \kappa, \quad a = \delta \kappa^2, \quad \kappa^2 = \frac{C}{\sigma_0 r_2^2} \quad (1.7)$$

Общее решение уравнения (1.6) выражается через функции Бесселя первого и второго рода с индексом ν

$$\theta(x) = Z_\nu\left(\frac{a}{x}\right) = A_1 J_\nu\left(\frac{a}{x}\right) + B_1 Y_\nu\left(\frac{a}{x}\right) \quad (1.8)$$

Определив постоянные A_1 и B_1 из граничных условий

$$\begin{aligned} \theta = 1 \text{ при } x = 1, \quad \theta = \theta_1 \text{ при } x = 1/d \\ (\theta_1 = 1 + \beta^2(T_1 - T_2), \quad d = r_2/r_1) \end{aligned} \quad (1.9)$$

получим

$$\begin{aligned} A_1 = \Delta_1^{-1} [Y_\nu(ad) - \theta_1 Y_\nu(a)], \quad B_1 = \Delta_1^{-1} [\theta_1 J_\nu(a) - J_\nu(ad)] \\ \Delta_1 = J_\nu(a) Y_\nu(ad) - J_\nu(ad) Y_\nu(a) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Если ввести безразмерные угловую скорость Ω и параметр ε

$$\Omega = \omega / \omega_1, \quad \varepsilon = \mu_0 \omega_1 / \sigma_0$$

и использовать (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) и (1.8), то для определения профиля угловой скорости получаем уравнение

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\kappa^2}{x^3} - \frac{1}{x} \right) Z_\nu\left(\frac{a}{x}\right) \quad (1.11)$$

Для угловой скорости имеем граничные условия

$$\Omega = 0 \text{ при } x = 1, \quad \Omega = 1 \text{ при } x = 1/d \quad (1.12)$$

Одно из этих условий служит для определения постоянной интегрирования уравнения (1.11), а другое — для определения не известной пока постоянной C или, что то же, постоянной κ . Заменой переменной $x = 1/t$ уравнение (1.11) приводится к виду

$$d\Omega = \frac{1}{\varepsilon} \left(t^{-1} - \frac{\kappa^2}{a^2} t \right) Z_\nu(t) dt \quad (1.13)$$

Для решения уравнения (1.13) необходимо иметь выражение интегралов типа

$$A_{\nu}^{\mu}(t) = \int t^{\mu} Z_{\nu}(t) dt \quad (1.14)$$

Для интегралов (1.14) известно выражение [3]

$$\int t^{\mu} Z_{\nu}(t) dt = (\mu + \nu - 1) t S_{\mu-1, \nu-1}(t) Z_{\nu}(t) - t S_{\mu, \nu}(t) Z_{\nu-1}(t) \quad (1.15)$$

$$S_{\mu, \nu}(t) = t^{\mu-1} \left\{ 1 - \frac{(\mu-1)^2 - \nu^2}{t^2} + \frac{[(\mu-1)^2 - \nu^2][(\mu-3)^2 - \nu^2]}{t^4} - \dots \right\}$$

Здесь $S_{\mu, \nu}(t)$ — функция Ломмеля, расположенная по убывающим степеням аргумента. Но этот ряд не сходится, если не обрывается, а обрывается, если $\mu - \nu$ или $\mu + \nu$ — положительное нечетное число. Последние условия могут выполняться при специально подобранных значениях θ_1 , d и параметров δ и ε . В общем случае эти условия не выполняются, и формула (1.15) не применима. Однако и в этом случае можно получить выражение для интеграла (1.14).

Можно показать, что справедлива такая рекуррентная формула

$$A_{\nu}^{\mu+2}(t) = (\mu + \nu + 1) t^{\mu+1} Z_{\nu}(t) - t^{\mu+2} Z_{\nu-1}(t) - [(\mu + 1)^2 - \nu^2] A_{\nu}^{\mu}(t)$$

Применяя многократно эту формулу для выражения интеграла с меньшим индексом через интеграл с большим верхним индексом, получим

$$A_{\nu}^{\mu}(t) = t g_{\mu, \nu}(t) Z_{\nu}(t) - t s_{\mu, \nu}(t) Z_{\nu-1}(t) \quad (1.16)$$

$$s_{\mu, \nu}(t) = t^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1/2\mu - 1/2\nu + 1/2) \Gamma(1/2\mu + 1/2\nu + 1/2)}{\Gamma(1/2\mu - 1/2\nu + m + 3/2) \Gamma(1/2\mu + 1/2\nu + m + 3/2)} \left(\frac{1}{2}t\right)^{2m+2}$$

Здесь $s_{\mu, \nu}(t)$ — функция Ломмеля, расположенная по возрастающим степеням аргумента [3], а

$$g_{\mu, \nu}(t) = t^{\mu-2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\mu + \nu + 2m + 1) \Gamma(1/2\mu - 1/2\nu + 1/2) \Gamma(1/2\mu + 1/2\nu + 1/2)}{\Gamma(1/2\mu - 1/2\nu + m + 3/2) \Gamma(1/2\mu + 1/2\nu + m + 3/2)} \left(\frac{1}{2}t\right)^{2m+2}$$

Последние формулы справедливы, если $\mu - \nu$ и $\mu + \nu$ не равны положительному нечетному числу. Так как в рассматриваемой задаче $\nu > 0$, $\mu = \pm 1$, что вытекает из (1.5), (1.7) и (1.13), то выражением (1.16) можно пользоваться, если ν не равно четному числу. Все дальнейшие рассуждения будут относиться именно к этому случаю. Если же ν равно четному числу, то нетрудно повторить все рассуждения, взяв вместо (1.16) формулу (1.15).

Для функций $s_{\mu, \nu}(t)$ и $g_{\mu, \nu}(t)$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$s_{\mu, \nu}(t) = \frac{t^{\mu+1} - s_{\mu+2, \nu}(t)}{(\mu + 1)^2 - \nu^2}, \quad g_{\mu, \nu}(t) = \frac{(\mu + \nu + 1) t^{\mu} - g_{\mu+2, \nu}(t)}{(\mu + 1)^2 - \nu^2} \quad (1.17)$$

Первое из них — известное соотношение [3], а справедливость второго нетрудно установить непосредственной проверкой.

Проинтегрируем уравнение (1.13), пользуясь формулой (1.16), перейдем к переменной x и удовлетворим первому граничному условию (1.12).

С учетом (1.8) и (1.9) для профиля угловой скорости получим формулу

$$\Omega = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{a}{x} \left[g_{-1, \nu} \left(\frac{a}{x} \right) Z_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) - s_{-1, \nu} \left(\frac{a}{x} \right) Z_{\nu-1} \left(\frac{a}{x} \right) \right] - \frac{\kappa^2}{ax} \left[g_{1, \nu} \left(\frac{a}{x} \right) Z_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) - s_{1, \nu} \left(\frac{a}{x} \right) Z_{\nu-1} \left(\frac{a}{x} \right) \right] - a \left[g_{-1, \nu} (a) - s_{-1, \nu} (a) Z_{\nu-1} (a) \right] + \frac{\kappa^2}{a} \left[g_{1, \nu} (a) - s_{1, \nu} (a) Z_{\nu-1} (a) \right] \right\} \quad (1.18)$$

Удовлетворяя второму граничному условию (1.12) и учитывая (1.9), получим следующее трансцендентное уравнение для определения постоянной интегрирования:

$$ad \left[\theta_1 g_{-1, \nu} (ad) - s_{-1, \nu} (ad) Z_{\nu-1} (ad) \right] - \frac{\kappa^2 d}{a} \left[\theta_1 g_{1, \nu} (ad) - s_{1, \nu} (ad) Z_{\nu-1} (ad) \right] - a \left[g_{-1, \nu} (a) - s_{-1, \nu} (a) Z_{\nu-1} (a) \right] + \frac{\kappa^2}{a} \left[g_{1, \nu} (a) - s_{1, \nu} (a) Z_{\nu-1} (a) \right] = \varepsilon \quad (1.19)$$

Граница двух режимов — течения с ядром и без ядра — определяется из условия $\tau_{r\varphi} = \sigma_0$ при $r = r_2$. Из (1.4) видно, что на границе двух режимов $C = r_2^2 \sigma_0$, при этом, согласно (1.7), имеем $\kappa = 1$, $\nu = a = \delta$. Учитывая это и используя рекуррентные соотношения (1.17), из (1.19), для границы двух режимов получаем уравнение

$$dZ_{\nu-1}(\nu d) - Z_{\nu-1}(\nu) = \varepsilon \nu + \theta_1 - 1 \quad (1.20)$$

дающее связь между двумя безразмерными параметрами δ и ε .

б) *Течение с упругой зоной.* Пусть некоторая кольцевая область $r_0 \leq r \leq r_2$, примыкающая к наружному цилиндру, занята упругой зоной. Граница ядра r_0 неизвестна и подлежит определению.

Первое уравнение (1.3) справедливо для всего зазора между цилиндрами, второе уравнение справедливо только для области $r_1 \leq r \leq r_0$, охваченной течением. Уравнение теплопроводности для упругой зоны получится, если во втором уравнении (1.3) отбросить последнее слагаемое, выражающее тепловыделение от внутреннего трения. Таким образом, уравнение теплового баланса нужно решить отдельно в двух областях с последующим сопряжением по границе раздела $r = r_0$.

Так как на границе раздела $\tau_{r\varphi} = \sigma_0$, то в (1.4) постоянную интегрирования можно выразить через искомый радиус ядра $C = \sigma_0 r_0^2$. Из (1.7) видно, что при наличии ядра величина κ приобретает смысл безразмерного радиуса ядра $\kappa = x_0 = r_0 / r_2$.

Общее решение уравнения теплового баланса можно записать в форме

$$\theta = Z_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) = A_2 J_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) + B_2 Y_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) \quad \left(\frac{1}{d} \leq x \leq x_0 \right) \quad (1.21)$$

$$\theta = C_1 \ln x + C_2 \quad (x_0 \leq x \leq 1)$$

Четыре постоянных интегрирования определяются из граничных условий (1.9) и условий равенства температур и их производных при $x = x_0$. Из первого условия (1.9) вытекает, что $C_2 = 1$. Остальные три условия приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned} A_2 J_{\nu} (ad) + B_2 Y_{\nu} (ad) &= \theta_1, & A_2 J_{\nu} (\nu) + B_2 Y_{\nu} (\nu) &= C_1 \ln x_0 + 1, \\ A_2 J_{\nu}' (\nu) + B_2 Y_{\nu}' (\nu) &= -C_1 / \nu \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь штрих означает производную по аргументу.

Решая эту систему и используя выражение для вронскиана бесселевых функций [3]

$$J_\nu(x) Y_\nu'(x) - Y_\nu(x) J_\nu'(x) = \frac{2}{\pi x}$$

получим

$$\begin{aligned} A_2 &= \Delta_2^{-1} [\theta_1 Y_\nu(\nu) - Y_\nu(ad) + \theta_1 \nu \ln x_0 Y_\nu'(\nu)], \\ B_2 &= 1/\Delta_2 [J_\nu(ad) - \theta_1 J_\nu(\nu) - \theta_1 \nu \ln x_0 J_\nu'(\nu)] \\ C_1 &= \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \frac{2\theta_1}{\pi} + \nu [Y_\nu(ad) J_\nu'(\nu) - J_\nu'(ad) Y_\nu'(\nu)] \right\} \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= J_\nu(ad) Y_\nu(\nu) - Y_\nu(ad) J_\nu(\nu) + \nu \ln x_0 [J_\nu(ad) Y_\nu'(\nu) - \\ &\quad - Y_\nu(ad) J_\nu'(\nu)] \end{aligned}$$

Для определения профиля угловых скоростей необходимо интегрировать уравнение (1.11), в котором x нужно заменить через x_0 , а $Z_\nu(a/x)$ взять согласно (1.21). Вместо первого граничного условия (1.12) имеем $\Omega = 0$ при $x = x_0$. Используя это условие и интегрируя уравнение (1.11), как это было сделано выше, получим следующую формулу для профиля угловых скоростей:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{a}{x} \left[g_{-1,\nu} \left(\frac{a}{x} \right) Z_\nu \left(\frac{a}{x} \right) - s_{-1,\nu} \left(\frac{a}{x} \right) Z_{\nu-1} \left(\frac{a}{x} \right) \right] - \frac{x_0^2}{ax} \left[g_{1,\nu} \left(\frac{a}{x} \right) Z_\nu \left(\frac{a}{x} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - s_{1,\nu} \left(\frac{a}{x} \right) Z_{\nu-1} \left(\frac{a}{x} \right) \right] - \nu [g_{-1,\nu}(\nu) Z_\nu(\nu) - s_{-1,\nu}(\nu) Z_{\nu-1}(\nu)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_0}{a} [g_{1,\nu}(\nu) Z_\nu(\nu) - s_{1,\nu}(\nu) Z_{\nu-1}(\nu)] \right\} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Граница ядра x_0 определяется из второго граничного условия (1.12). С учетом (1.9), для определения x_0 получаем трансцендентное уравнение

$$\begin{aligned} ad [\theta_1 g_{-1,\nu}(ad) - s_{-1,\nu}(ad) Z_{\nu-1}(ad)] - \frac{x_0^2 d}{a} [\theta_1 g_{1,\nu}(ad) - s_{1,\nu}(ad) Z_{\nu-1}(ad)] - \\ - \nu [g_{-1,\nu}(\nu) Z_\nu(\nu) - s_{-1,\nu}(\nu) Z_{\nu-1}(\nu)] + \frac{x_0}{a} [g_{1,\nu}(\nu) Z_\nu(\nu) - s_{1,\nu}(\nu) Z_{\nu-1}(\nu)] = \varepsilon \end{aligned} \quad (1.25)$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда на внешнем цилиндре задана постоянная температура T_2 , а внутренний цилиндр теплоизолирован.

а) *Течение без упругой зоны.* Решение уравнения теплового баланса представляется в виде (1.8). Для определения постоянных интегрирования имеем граничные условия

$$\theta = 1 \text{ при } x = 1, \quad d\theta/dx = 0 \text{ при } x = 1/d \quad (2.1)$$

Определив из этих условий постоянные, для профиля температур получаем

$$\theta = Z_\nu \left(\frac{a}{x} \right) = \frac{1}{\Delta_3} \left[Y_\nu'(ad) J_\nu \left(\frac{a}{x} \right) - J_\nu'(ad) Y_\nu \left(\frac{a}{x} \right) \right] \quad (2.2)$$

$$\Delta_3 = Y_\nu'(ad) J_\nu(a) - Y_\nu(a) J_\nu'(ad)$$

Профиль угловой скорости определяется формулой (1.18), в которую вместо цилиндрической функции нужно подставлять (2.2).

Для цилиндрических функций известно функциональное соотношение

$$\frac{dZ_\nu(t)}{dt} = Z_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t} Z_\nu(t) \quad (2.3)$$

На поверхности внутреннего цилиндра, согласно (2.1) и (2.3), имеем $Z_{\nu-1}(ad) = \nu/ad Z_{\nu}(ad)$. Используя эту связь между значениями функций и второе граничное условие (1.12), для определения постоянной κ получаем трансцендентное уравнение

$$\left\{ ad \left[g_{-1,\nu}(ad) - \frac{\nu}{ad} s_{-1,\nu}(ad) \right] - \frac{\kappa^2 d}{a} \left[g_{1,\nu}(ad) - \frac{\nu}{ad} s_{1,\nu}(ad) \right] \right\} Z_{\nu}(ad) - a [g_{-1,\nu}(a) - s_{-1,\nu}(a) Z_{\nu-1}(a)] + \frac{\kappa^2}{a} [g_{1,\nu}(a) - s_{1,\nu}(a) Z_{\nu-1}(a)] = \varepsilon \quad (2.4)$$

Для границы двух режимов из условия $\kappa = 1$, $a = \nu = \delta$ получаем простое уравнение, связывающее безразмерные параметры δ и ε

$$Z_{\nu-1}(\nu) = 1 - \varepsilon \nu \quad (2.5)$$

б) *Течение с упругой зоной.* Решение уравнения теплового баланса для двух зон записывается в форме (1.24). В системе (1.22), определяющей постоянные интегрирования, первое уравнение нужно заменить на

$$A_2 J_{\nu}'(ad) + B_2 Y_{\nu}'(ad) = 0$$

Определив постоянные интегрирования, для профиля температур получаем

$$\theta = Z_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) = \frac{1}{\Delta_4} \left[Y_{\nu}'(ad) J_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) - J_{\nu}'(ad) Y_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) \right] \quad (2.6)$$

$$\Delta_4 = J_{\nu}(\nu) Y_{\nu}'(ad) - Y_{\nu}(\nu) J_{\nu}'(ad) + \nu \ln x_0 [J_{\nu}'(\nu) Y_{\nu}'(ad) - Y_{\nu}'(\nu) J_{\nu}'(ad)]$$

Постоянная C_1 имеет вид

$$C_1 = \nu \Delta_4^{-1} [Y_{\nu}'(\nu) J_{\nu}'(ad) - J_{\nu}'(\nu) Y_{\nu}'(ad)] \quad (2.7)$$

Профиль угловой скорости определяется формулой (1.24), в которой в качестве цилиндрической функции следует брать (2.6).

Используя в (1.24) граничное условие $\Omega = 1$ при $x = 1/d$ на поверхности вращающегося цилиндра, получим трансцендентное уравнение для определения границы x_0 упругой зоны

$$\left\{ ad \left[g_{-1,\nu}(ad) - \frac{\nu}{ad} s_{-1,\nu}(ad) \right] - \frac{x_0^2 d}{a} \left[g_{1,\nu}(ad) - \frac{\nu}{ad} s_{1,\nu}(ad) \right] \right\} Z_{\nu}(ad) - \nu [g_{-1,\nu}(\nu) Z_{\nu}(\nu) - s_{-1,\nu}(\nu) Z_{\nu-1}(\nu)] + \frac{x_0}{a} [g_{1,\nu}(\nu) Z_{\nu}(\nu) - s_{1,\nu}(\nu) Z_{\nu-1}(\nu)] = \varepsilon \quad (2.8)$$

3. Цилиндрическими функциями при произвольном значении ν неудобно пользоваться при конкретных расчетах. Пользуясь некоторыми функциональными соотношениями для функций Бесселя, цилиндрические функции, встречающиеся в данной работе, можно привести к виду, удобному для расчетов. Функции Бесселя первого рода можно записать в виде ряда [4]

$$J_{\nu}(x) = \frac{(1/2x)^{\nu}}{\nu!} f_{\nu}(x), \quad f_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu!}{k! (\nu+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \quad (3.1)$$

При ν нецелых функция Неймана $Y_{\nu}(x)$ выражается через функции Бесселя $J_{\nu}(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ формулой [4]

$$Y_{\nu}(x) = \frac{J_{\nu}(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (3.2)$$

Выражение (3.1) справедливо и при отрицательных значениях ν . При этом можно использовать следующее выражение для факториала отрицательной величины [4]:

$$(-\nu)! = \frac{\pi\nu}{\nu! \sin \pi\nu} \quad (3.3)$$

Ниже будут приведены выражения цилиндрических функций $Z_\nu(a/x)$ и $Z_{\nu-1}(a/x)$ для всех рассмотренных выше случаев. Преобразования проводились подстановкой найденных A_1, B_1 в (1.8), A_2, B_2 в (1.24) с использованием формул (3.1)–(3.3) и функционального соотношения (2.3).

На поверхностях цилиндров заданы постоянные температуры.

а) Течение происходит без упругой зоны.

$$Z_\nu\left(\frac{a}{x}\right) = (\Delta_1')^{-1} [F(x) - \theta_1 G(x)], \quad Z_{\nu-1}\left(\frac{a}{x}\right) = (\Delta_1')^{-1} [\theta_1 A(x) - B(x)] \quad (3.4)$$

Здесь

$$F(x) = (xd)^\nu f_\nu(ad) f_{-\nu}\left(\frac{a}{x}\right) - (xd)^{-\nu} f_{-\nu}(ad) f_\nu\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$G(x) = x^\nu f_\nu(a) f_{-\nu}\left(\frac{a}{x}\right) - x^{-\nu} f_{-\nu}(a) f_\nu\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$A(x) = \frac{2\nu}{a} x^{1-\nu} f_{-\nu}(a) f_{\nu-1}\left(\frac{a}{x}\right) - \frac{ax^{\nu-1}}{2(\nu-1)} f_\nu(a) f_{1-\nu}\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$B(x) = \frac{2\nu}{ad} (xd)^{1-\nu} f_{-\nu}(ad) f_{\nu-1}\left(\frac{a}{x}\right) - \frac{ad(xd)^{\nu-1}}{2(\nu-1)} f_\nu(ad) f_{1-\nu}\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$\Delta_1' = d^\nu f_\nu(ad) f_{-\nu}(a) - d^{-\nu} f_{-\nu}(ad) f_\nu(a)$$

б) Течение происходит с упругой зоной.

$$Z_\nu\left(\frac{a}{x}\right) = (\Delta_2')^{-1} [F(x) - \theta_1 R(x) (1 - \nu \ln x_0) - \theta_1 \nu \ln x_0 S(x)] \quad (3.5)$$

$$Z_{\nu-1}\left(\frac{a}{x}\right) = (\Delta_2')^{-1} [\theta_1 (1 - \nu \ln x_0) H(x) - \theta_1 \nu \ln x_0 K(x) - B(x)] \quad (3.6)$$

$$C_1 = \nu \left[Z_\nu\left(\frac{a}{x_0}\right) - Z_{\nu-1}\left(\frac{a}{x_0}\right) \right] \quad (3.7)$$

Здесь

$$R(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^\nu f_\nu(\nu) f_{-\nu}\left(\frac{a}{x}\right) - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\nu} f_{-\nu}(\nu) f_\nu\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$S(x) = 2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^\nu f_{\nu-1}(\nu) f_{-\nu}\left(\frac{a}{x}\right) - \frac{\nu}{2(\nu-1)} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\nu} f_{1-\nu}(\nu) f_\nu\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$K(x) = \frac{\nu}{\nu-1} \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\nu-1} f_{\nu-1}(\nu) f_{1-\nu}\left(\frac{a}{x}\right) - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{1-\nu} f_{1-\nu}(\nu) f_{\nu-1}\left(\frac{a}{x}\right) \right]$$

$$H(x) = 2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{1-\nu} f_{-\nu}(\nu) f_{\nu-1}\left(\frac{a}{x}\right) - \frac{\nu}{2(\nu-1)} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\nu-1} f_\nu(\nu) f_{1-\nu}\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$\Delta_2' = (1 - \nu \ln x_0) F(x_0) - \nu \ln x_0 B(x_0)$$

На поверхности внешнего цилиндра задана постоянная температура, внутренний цилиндр теплоизолирован.

а) Течение происходит без упругой зоны

$$Z_\nu\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{1}{\Delta_3'} \left[C(x) - \frac{\nu}{ad} F(x) \right], \quad Z_{\nu-1}\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{1}{\Delta_3'} \left[E(x) + \frac{\nu}{ad} B(x) \right] \quad (3.8)$$

Здесь

$$C(x) = \frac{2\nu(xd)^\nu}{ad} f_{\nu-1}(ad) f_{-\nu}\left(\frac{a}{x}\right) - \frac{ad(xd)^{-\nu}}{2(\nu-1)} f_{1-\nu}(ad) f_\nu\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$E(x) = \frac{\nu}{\nu-1} \left[(xd)^{\nu-1} f_{\nu-1}(ad) f_{1-\nu} \left(\frac{a}{x} \right) - (xd)^{1-\nu} f_{1-\nu}(ad) f_{\nu-1} \left(\frac{a}{x} \right) \right]$$

$$\Delta_3' = D - \frac{\nu}{ad} \Delta_1', \quad D = \frac{2\nu}{a} d^{\nu-1} f_{\nu-1}(ad) f_{-\nu}(a) - \frac{a}{2(\nu-1)} d^{1-\nu} f_{1-\nu}(ad) f_{\nu}(a)$$

б) Течение происходит с упругой зоной

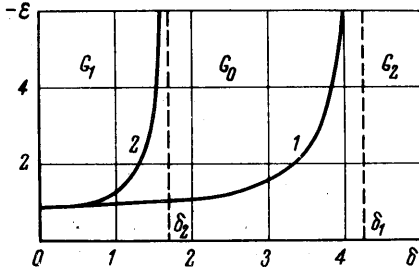
$$Z_{\nu} \left(\frac{a}{x} \right) = \frac{1}{\Delta_4'} [x_0 d C(x) - F(x)], \quad Z_{\nu-1} \left(\frac{a}{x} \right) = \frac{1}{\Delta_4'} [x_0 d E(x) + B(x)] \quad (3.9)$$

$$\Delta_4' = (1 - \nu \ln x_0) x_0 d C(x_0) + x_0 d \nu \ln x_0 E(x_0) + \Delta_2'$$

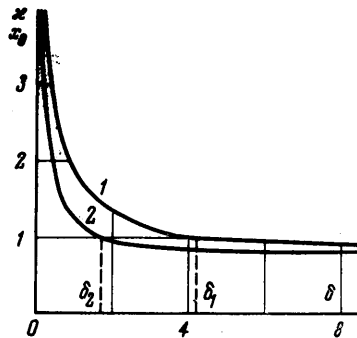
Постоянная C_1 вычисляется по формуле (3.7), но подстановкой в нее (3.9).

4. При помощи формул (3.1) — (3.9) на электронно-вычислительной машине были проведены расчеты. Все вычисления проводились при $d = 2$ в обеих задачах и при $\theta_1 = 1$ в первой задаче (оба цилиндра имеют одинаковую температуру).

На фиг. 1 приведена диаграмма состояния. Кривая 1, полученная по формуле (1.20), отделяет область $G_1 + G_0$ течения без упругой зоны от области G_2 течения с упругой зоной. Кривая 2, полученная по формуле (2.5), отделяет аналогичные области G_1 и $G_0 + G_2$ в задаче с теплоизолированным внутренним цилиндром. Интересно отметить,

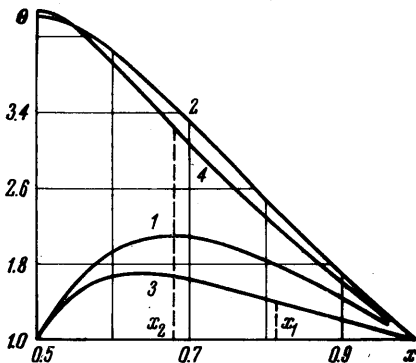


Фиг. 1

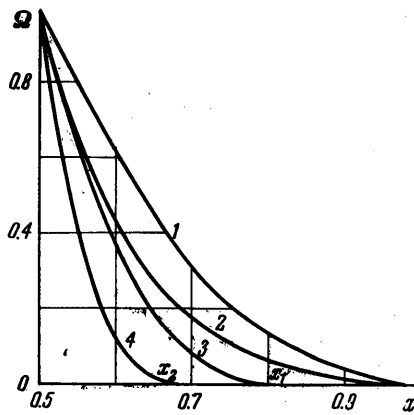


Фиг. 2

что, в отличие от изотермического случая, где возможно осуществление обоих режимов течения при любых значениях параметров, в неизотермических задачах соответственно при $\delta > \delta_1 = 4.2396$ и $\delta > \delta_2 = 1.6962$ течение без упругой зоны не осуществляется.



Фиг. 3



Фиг. 4

Из (1.4) и (1.7) видно, что χ определяет отношение действительного крутящего момента, отнесенного к единице длины цилиндра, $M = 2\pi r_2^2 \tau_{r\varphi}(r_2)$ к крутящему моменту $M_0 = 2\pi r_2^2 \tau_0$ на граничных кривых 1 и 2 из фиг. 1 ($M_0 = \text{const}$ при всех $\delta < \delta_1$ и $\delta <$

$< \delta_2$). Оказывается, при $|\varepsilon| \rightarrow \infty$ ($|\omega_1| \rightarrow \infty$) крутящий момент не стремится к ∞ , как в случае изотермического течения, а стремится к некоторому предельному значению. Эти предельные кривые определяются из уравнений $\Delta_1' = 0$ и $\Delta_2' = 0$ и приведены на фиг. 2 (кривые 1 и 2 в интервалах $0 \leq \delta \leq \delta_1$, $0 \leq \delta \leq \delta_2$). Аналогичный результат для ньютоновской жидкости был получен в работах [1, 5, 6]. Как было сказано выше, при $\delta > \delta_1$ и $\delta > \delta_2$ возможно только течение с упругой зоной. С ростом $|\varepsilon|$ радиус границы ядра увеличивается и при $|\varepsilon| \rightarrow \infty$ стремится к некоторому предельному значению. Предельные кривые определяются из уравнений $\Delta_2 = 0$, $\Delta_4' = 0$ и являются продолжением кривых 1 и 2 на фиг. 2.

Для двух пар значений $\delta = 1$, $\varepsilon = -5$ и $\delta = 5$, $\varepsilon = -0.5$ соответственно из областей течения без упругой зоны и с упругой зоной были определены профили температур и угловых скоростей. Эти профили представлены на фиг. 3 и 4 соответственно кривыми 1 и 2, 3 и 4. Для первой пары значений δ и ε было получено $\kappa_1 = 1.546$, $\kappa_2 = 1.169$, для второй пары — $x_0 = x_1 = 0.814$, $x_0 = x_2 = 0.681$.

На фиг. 1 кривая 1 получена при одинаковых значениях температур на поверхностях цилиндров ($\theta_1 = 1$). На фиг. 5 изображен ряд кривых, соответствующих как $T_1 > T_2$ ($\theta_1 > 1$), так и $T_1 < T_2$ ($\theta_1 < 1$). Так как вязкость не может стать отрицательной, то, согласно (1.1) и (1.5), имеем $\theta_1 > 0$. С уменьшением температуры внутреннего цилиндра кривые опускаются вниз, но при всех значениях $\theta_1 > 0$ остаются выше оси абсцисс. Это означает, что при любых значениях температур на поверхностях цилиндров в интервале $0 < \delta < \delta_1$ возможны оба режима течения.

5. Приведем кратко методику обработки экспериментальных данных, учитывающую диссипативный разогрев массы. Незвестными величинами являются μ_0 и β^2 . Предельное напряжение сдвига σ_0 будем считать известным. Если оно неизвестно, то его можно определять, например, построив зависимость M от ω и экстраполировав ее на нулевую угловую скорость. По величине M^* , получаемой при такой экстраполяции, и соотношению $M^* = 2\pi r_1^2 \sigma_0$ можно найти σ_0 .

Из эксперимента определяются крутящий момент и угловая скорость. Пусть имеем два опыта, проведенные при угловых скоростях вращения ω_1' и ω_1'' . Соответствующие моменты, отнесенные к единице длины цилиндра, равны M_1 и M_2 .

Пусть движение происходит без упругой зоны. Как следует из предыдущего параграфа, $\kappa^2 = M/M_0$. По известным значениям M_1 и M_2 определяем два значения κ_1 и κ_2 . Далее, обозначая через $F(\kappa, \delta)$ левую часть (1.19) или (2.4) в зависимости от температурного условия на поверхности внутреннего цилиндра, имеем

$$F(\kappa_1, \delta) = \varepsilon', \quad F(\kappa_2, \delta) = \varepsilon'' \quad (5.1)$$

Учитывая обозначение ε и (5.1), получаем трансцендентное уравнение для определения δ

$$F(\kappa_1, \delta) = \frac{\omega_1'}{\omega_1''} F(\kappa_2, \delta) \quad (5.2)$$

По известному значению δ из (5.1) определяем ε' . Далее, из выражения параметра ε находим μ_0 , а из (1.5) — β^2

$$\mu_0 = \varepsilon' \sigma_0 / \omega_1', \quad \beta^2 = \frac{\lambda J \delta^2 \varepsilon'}{\sigma_0 r_2^2 \omega_1'} \quad (5.3)$$

(следует иметь в виду, что запись (1.2) соответствует случаю $\omega_1 < 0$).

Если течение происходит с ядром, то можно поступить следующим образом. Из условия $M = 2\pi r_0^2 \sigma_0$ определяются x_0' и x_0'' . Из уравнения (5.2), в котором вместо κ_1 и κ_2 взяты x_0' и x_0'' , а в качестве функции $F(x_0, \delta)$ взята левая часть (1.25) или (2.8), определяется δ . Далее поступаем так же, как и в случае отсутствия ядра.

Поступило 9 IV 66

ЛИТЕРАТУРА

1. Гораздовский Т. Я., Регирер С. А. Движение ньютоновской жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами при наличии внутренних тепловых процессов, влияющих на вязкие свойства. ЖТФ, 1956, т. 26, № 7.
2. Джафаров Г. И. Неизотермическое течение вязко-пластической жидкости между двумя вращающимися цилиндрами. Изв. АН СССР. Механ. и машиностр. 1963, № 6.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I., Изд. иностр. лит., 1949.
4. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. 1948.
5. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951.
6. Нэгг А. С. Heat effects in lubricating films. J. Appl. Mech., 1944, vol. 11, No 2.