МАССООТДАЧА ОТ ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ КАПЛИ

В. П. ВОРОТИЛИН, В. С. КРЫЛОВ

(Москва)

Основная трудность при решении задачи о массопереносе через одиночную каплю (или пузырь), движущуюся в жидкой среде при больших числах Рейнольдса, заключается в чрезвычайной сложности гидродинамической картины явления. При достаточно больших скоростях движения в кормовой части капель и пузырей наступает отрыв внешнего потока, что приводит к возникновению турбулентного следа и к резкому увеличению гидродинамического сопротивления. Начиная с некоторых размеров, при которых сила сопротивления, действующая на единицу поверхности капли или пузыря со стороны внешней среды, становится больше капиллярного давления, поверхность капель и пузырей начинает деформироваться и пульсировать. Большое влияние на гидродинамику капель и пузырей (в частности, на деформацию их поверхности) оказывают локальные изменения поверхностного натяжения, обусловленные либо процессом конвективной диффузии, либо адсорбцией поверхностно-активных веществ [1, 2]. Наличие вихревого, а возможно и турбулентного, движения внутри капель и пузырей может, при определенных условиях [1], приводить к их дроблению.

Разумеется, столь сложная гидродинамика в настоящее время не может быть описана точными количественными соотношениями. Рядом автором были предприняты попытки приближенного решения этой задачи в рамках определенных допущений. В частности [3-6], была создана теория пограничного слоя на поверхности сферических и эллипсоидальных газовых пузырей, движущихся в жидкости, исследована [7, 8] гидродинамика пульсирующих капель, находящихся в газовом потоке, и найдены условия, при которых происходит дробление таких капель. Большой практический интерес представляет создание теории массопередачи в пульсирующие капли и пузыри и нахождение в явном виде зависимости коэффициентов массопередачи от гидродинамических характеристик этих систем. До тех пор пока такая зависимость не установлена, всякая теория, игнорирующая влияние гидродинамики на скорость массопередачи из отдельной капли или пузыря, не может считаться сколько-нибудь обоснованной. Особенно это относится к теориям [9, 10], в которых рассматривается массопередача в системах с концентрированными потоками капель и пузырей. Настоящая работа посвящена исследованию массопереноса через поверхность одиночной капли, обтекаемой безвихревым потоком жидкости или газа, при больших числах Пекле P.

В случае осесимметричных колебаний капли уравнение ее поверхности может быть записано [7] в виде ряда по полиномам Лежандра $P_n(\cos\vartheta)$, где ϑ — полярный угол в сферической системе координат, связанной с центром капли. Коэффициенты этого ряда представляют собой осциллирующие функции времени t. В дальнейшем мы будем предполагать, что максимальная амплитуда колебания a мала по сравнению со средним радиусом капли R, так что в уравнении для поверхности можно ограничиться лишь первым поправочным членом

$$r_s(\vartheta, t) = R\,[1 + \delta \cos \lambda t P_2(\cos\vartheta)] \quad (\delta = a/R \ll 1) \tag{1}$$

Здесь λ — основная частота пульсаций. Направим полярную ось в сторону движения капли и предположим, что поле скоростей вне капли потенциально, а внутри капли имеет вихревой характер, в нулевом приближении по параметру δ описываемый сферическим вихрем Хилла[11]. Условия дробления, выведенные в предположении о вихревом характере поля скоростей внутри капель [7], находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Решение уравнений гидродинамики приводит, при сделанных предположениях, к следующему распределению скоростей:

а) внутри капли:

$$v_r^{(1)} = U_0\left\{\frac{3}{2}(1-\xi^2)\nu + \delta\cos\lambda t\left[-\frac{3}{5}\nu - \frac{\lambda R\xi \operatorname{tg}\lambda t}{U_0}P_2(\nu) + \frac{18}{5}\xi^2 P_3(\nu)\right]\right\}$$

$$v_\vartheta^{(1)} = U_0\sqrt{1-\nu^2}\left\{\frac{3}{2}(2\xi^2-1) + \delta\cos\lambda t\left[\frac{3}{2} + \frac{\lambda R\xi \operatorname{tg}\lambda t}{2U_0}\frac{dP_2(\nu)}{d\nu} - \frac{6}{5}\xi^2\frac{dP_3(\nu)}{d\nu}\right]\right\}$$

б) вне капли:

$$v_r^{(2)} = U_0\left\{-\left(1-\frac{1}{\xi^3}\right)\nu + \delta\cos\lambda t\left[-\frac{3}{5}\frac{\nu}{\xi^3} - \frac{\lambda R \operatorname{tg}\lambda t}{U_0\xi^4}P_2(\nu) + \frac{18}{5\xi^5}P_3(\nu)\right]\right\}$$

$$v_\vartheta^{(2)} = U_0\sqrt{1-\nu^2}\left\{\left(1+\frac{1}{2\xi^3}\right) + \right.$$

$$\left. + \delta\cos\lambda t\left[-\frac{3}{10\xi^3} - \frac{\lambda R \operatorname{tg}\lambda t}{3U_0\xi^4}\frac{dP_2(\nu)}{d\nu} + \frac{9}{10\xi^5}\frac{dP_3(\nu)}{d\nu}\right]\right\}$$

$$\xi \equiv r/R, \quad \nu \equiv \cos\vartheta$$

Здесь U_0 — скорость движения капли. Уравнения конвективной диффузии во внутренней (1) и внешней (2) фазах, записанные в безразмерных переменных, имеют вид:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + V_r^{(i)}\frac{\partial c}{\partial \xi} - \frac{V_\vartheta^{(i)}\sqrt{1-\nu^2}}{\xi}\frac{\partial c}{\partial \nu} = \frac{1}{P_i}\Delta_{\xi,\nu}c \tag{2}$$

$$\tau \equiv U_0 t/R, \quad V_r^{(i)} \equiv v_r^{(i)}/U_0, \quad V_\vartheta^{(i)} \equiv v_\vartheta^{(i)}/U_0, P_i \equiv U_0 R/D_i,$$

D_i — коэффициенты диффузии в соответствующих фазах, $\Delta_{\xi,\nu}$ — оператор Лапласа:

$$\Delta_{\xi,\nu} = \xi^{-2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + (1-\nu^2)\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} - 2\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\right]$$

Рассмотрим случай, когда массопередача лимитируется сопротивлением внешней фазы. В этом случае значение концентрации c_0 на поверхности капли одинаково во всех точках и зависит только от времени. Рассматривая времена, в течение которых суммарное количество растворенного в капле вещества не успевает существенно измениться, можно считать значение c_0 постоянным во времени. Концентрацию вещества вдали от капли (при $\xi \to \infty$) будем обозначать через c_1. При малых значениях параметра $\varepsilon = 1/\sqrt{P^2}$ уравнение (2) может быть решено методом модифицированной теории возмущений Пуанкаре—Лайтхилла—Го [12].

Для этого перейдем от независимых переменных ξ, ν, τ к независимым переменным ρ, ν, τ, где ρ определяется соотношением:

$$\xi = 1 + \varepsilon\rho + \delta\cos\lambda t P_2(\nu)$$

Представив искомое распределение $c(\rho, \nu, \tau)$ в виде разложения

$$c = c^{(0)} + \varepsilon c^{(1)} + \delta c^{(2)} + \ldots$$

получаем для функции $c^{(0)}$ краевую задачу

$$\frac{\partial c^{(0)}}{\partial\tau} - 3\rho\nu\frac{\partial c^{(0)}}{\partial\rho} - \frac{3}{2}(1-\nu^2)\frac{\partial c^{(0)}}{\partial\nu} - \frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial\rho^2} = 0 \tag{3}$$

$$c^{(0)}(\rho, \nu, 0) = c_1, \quad c^{(0)}(\infty, \nu, \tau) = c_1, \quad c^{(0)}(0, \nu, \tau) = c_0$$

Решение этого уравнения определяет правые части уравнений для функций $c^{(1)}$ и $c^{(2)}$:

$$\frac{\partial c^{(1)}}{\partial\tau} - 3\rho\nu\frac{\partial c^{(1)}}{\partial\rho} - \frac{3}{2}(1-\nu^2)\frac{\partial c^{(1)}}{\partial\nu} - \frac{\partial^2 c^{(1)}}{\partial\rho^2} =$$

$$= 2(1-3\rho^2\nu)\frac{\partial c^{(0)}}{\partial\rho} - 3\rho(1-\nu^2)\frac{\partial c^{(0)}}{\partial\nu} \tag{4}$$

$$\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \tau} - 3\rho\nu \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \rho} - \frac{3}{2}(1-\nu^2)\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \nu} - \frac{\partial^2 c^{(2)}}{\partial \rho^2} =$$

$$= \rho\left[\frac{3\nu}{5}(30\nu^2-23)\cos\lambda_1\tau - 2(3\nu^2-1)\lambda_1\sin\lambda_1\tau\right]\frac{\partial c^{(0)}}{\partial \rho} +$$

$$+ (1-\nu^2)\left[\frac{3}{20}(15\nu^2-1)\cos\lambda_1\tau - \nu\lambda_1\sin\lambda_1\tau\right]\frac{\partial c^{(0)}}{\partial \nu} \quad \left(\lambda_1 = \frac{\lambda R}{U_0}\right) \tag{5}$$

Решения уравнений (4) и (5) должны удовлетворять нулевым начальным и граничным условиям. Для отыскания функции $c^{(0)}(\rho, \nu, \tau)$ перейдем в уравнении (3) от переменных ρ, ν, τ к переменным ψ, ζ, τ, где ψ и ζ определяются соотношениями:

$$\psi = \frac{3}{2}\rho(1-\nu^2), \qquad \zeta = \frac{3}{2}\int_\nu^1 (1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}(2+\nu)(1-\nu)^2 \tag{6}$$

В этих переменных уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{\partial c^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{9(1-\nu^2)^2}{4}\left(\frac{\partial c^{(0)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial \psi^2}\right) = 0 \tag{7}$$

Применим к уравнению (7) интегральное преобразование Лапласа и введем функцию $C_p^{(0)}(\psi, \zeta, p)$, связанную с лапласовским образом $c_p^{(0)}(\psi, \zeta, p)$ искомой функции $c^{(0)}(\psi, \zeta, \tau)$ соотношением:

$$C_p^{(0)}(\psi, \zeta, p) = \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{p/3}\left[c_p^{(0)}(\psi, \zeta, p) - \frac{c_1}{p}\right] \tag{8}$$

Тогда для функции $C_p^{(0)}(\psi, \zeta, p)$ получим уравнение

$$\frac{\partial C_p^{(0)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 C_p^{(0)}}{\partial \psi^2} \tag{9}$$

с краевыми условиями:

$$C_p^{(0)}(\psi, 0, p) = 0, \quad C_p^{(0)}(0, \zeta, p) = \frac{1}{p}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{p/3}(c_0 - c_1),$$
$$C_p^{(0)}(\infty, \zeta, p) = 0$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$C_p^{(0)}(\psi, \zeta, p) = \frac{4}{9}(c_0 - c_1)\int_0^\zeta \operatorname{erfc}\left[\frac{\psi}{2\sqrt{\zeta - y}}\right]\left(\frac{1-\nu(y)}{1+\nu(y)}\right)^{p/3}\left[\frac{dy}{1-\nu^2(y)^2}\right]$$

Здесь $\nu(y)$ определяется соотношением $y = (2+\nu)(1-\nu)^2/2$. Подставляя это решение в уравнение (8) и выполняя обратное преобразование Лапласа, находим, с учетом (6)

$$c^{(0)}(\rho, \nu, \tau) = c_0 - (c_0 - c_1)\operatorname{erf}\left\{\frac{3\sqrt{2}\,\rho(1-\nu^2)}{4\sqrt{(2+\nu)(1-\nu)^2 - [2+\eta(\nu,\tau)][1-\eta(\nu,\tau]^2}}\right\} \tag{10}$$

где

$$\eta(\nu, \tau) = \frac{(1+\nu) - (1-\nu)\exp(-3\tau)}{(1+\nu) + (1-\nu)\exp(-3\tau)} \tag{11}$$

В дальнейшем ограничимся нахождением поправки $c^{(2)}$, обусловленной несферичностью формы капли. Очевидно, что эта поправка будет играть основную роль (по сравнению с $c^{(1)}$) при выполнении условия $\varepsilon \ll \delta$, т. е. при очень больших значениях числа Пекле во внешней фазе. Уравнение (5), записанное в переменных ψ, ζ, τ, имеет вид:

$$\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{9}{4}(1-\nu^2)^2\left(\frac{\partial c^{(2)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 c^{(2)}}{\partial \psi^2}\right) = \frac{c_0 - c_1}{\sqrt{\pi}} F(\psi, \zeta, \tau) \tag{12}$$

где

$$F(\psi, \zeta, \tau) = \frac{\psi}{\sqrt{\zeta - \chi(\zeta, \tau)}} \times$$

$$\times \left\{\left[2\nu - \frac{3}{4}\frac{(1-\nu^2)^2 - (1-\eta^2)^2}{\zeta - \chi(\zeta, \tau)}\right] A_1(\nu, \tau) - A_2(\nu, \tau)\right\} \exp\left(-\frac{\psi^2}{4[\zeta - \chi(\zeta, \tau)]}\right)$$

$$\chi(\zeta, \tau) = \frac{1}{2}[2 + \eta(\nu, \tau)][1 - \eta(\nu, \tau)]^2$$

$$A_1(\nu_1, \tau) = \frac{3}{20}(15\nu^2 - 1)\cos\lambda_1\tau - \nu\lambda_1 \sin\lambda_1\tau \tag{13}$$

$$A_2(\nu, \tau) = \frac{3\nu}{5}(30\nu^2 - 23)\cos\lambda_1\tau - 2(3\nu^2 - 1)\lambda_1\sin\lambda_1\tau \tag{14}$$

Решая уравнение (12) с учетом нулевых начального и граничных условий, методом преобразования Лапласа с последующей заменой искомой трансформанты $c_p^{(2)}(\psi, \zeta, p)$ на функцию $[(1-\nu)/(1+\nu)]^{p/3} c_p^{(2)}(\psi, \zeta, p)$, находим:

$$c_p^{(2)}(\psi, \zeta, p) = \frac{2(c_0 - c_1)}{9\pi}\int_0^{\zeta}\int_0^{\infty} \frac{F_p(x, y, p)}{\sqrt{\zeta - y}\,[1 - \nu^2(y)]^2}\left(\frac{[1+\nu(\zeta)][1-\nu(y)]}{[1-\nu(\zeta)][1+\nu(y)]}\right)^{p/3} \times$$

$$\times \left[e^{-\frac{(\psi - x)^2}{4(\zeta - y)}} - e^{-\frac{(\psi + x)^2}{4(\zeta - y)}}\right] dx\, dy$$

где $F_p(x, y, p)$ — трансформанта Лапласа от функции $F(x, y, \tau)$, а зависимости $\nu(\zeta)$ и $\nu(y)$ определяются вторым соотношением (6). С точностью до членов первого порядка по параметру несферичности δ радиальная компонента локального потока на каплю имеет вид:

$$j_r = \sqrt{\frac{9U_0D_2}{2\pi R}}(c_0 - c_1)(1 - \nu^2) \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{\sqrt{(2+\nu)(1-\nu)^2 - [2 + \eta(\nu, \tau)][1 - \eta(\nu, \tau)]^2}} + \frac{2\delta}{3} Y(\nu, \tau)\right\}$$

где

$$Y(\nu, \tau) = -\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\int_0^{\zeta}\int_0^{\infty} \frac{x}{(\zeta - y)^{3/2}[1 - \nu^2(y)]^2} \exp\left[-\frac{x^2}{4(\zeta - y)}\right] \times$$

$$\times F\left(x, y, \tau + \frac{1}{3}\ln\frac{[1+\nu(\zeta)][1-\nu(y)]}{[1-\nu(\zeta)][1+\nu(y)]}\right) dx\, dy \tag{15}$$

Угловая компонента потока в том же приближении равна нулю. После подстановки в (15) явного вида функции F и интегрирования по x получаем:

$$Y(\nu, \tau) = \int_1^{\nu} \frac{[2\nu_1 A_1(\nu_1, \tau_1) - A_2(\nu_1, \tau_1)]\, M(\nu_1\tau_1) - {}^3/_2 A_1(\nu_1, \tau_1)\, N(\nu_1, \tau_1)}{\{(2+\nu)(1-\nu)^2 - [2 + \eta(\nu_1, \tau_1)][1 - \eta(\nu_1, \tau_1)]^2\}^{3/2}(1 - \nu_1^2)} d\nu_1 \tag{16}$$

где

$$M(\nu_1, \tau_1) = (2 + \nu_1)(1 - \nu_1)^2 - [2 + \eta(\nu_1, \tau_1)][1 - \eta(\nu_1, \tau_1)]^2$$

$$N(\nu_1, \tau_1) = (1 - \nu_1^2)^2 - [1 - \eta^2(\nu_1, \tau_1)]^2$$

$$\tau_1 = \tau + \frac{1}{3}\ln\frac{(1+\nu)(1-\nu_1)}{(1-\nu)(1+\nu_1)}$$

Выражение (16) значительно упрощается при рассмотрении времен $\tau \gg {}^1/_3$. Физически это условие соответствует временам $t \gg T_r = R/3U_0$, когда капля находится от входа в аппарат на расстояниях, существенно превышающих одну треть ее радиуса. В этом случае, представляющем наибольший практический интерес, формула (16) принимает вид:

$$Y(\nu, \tau) = (2+\nu)^{-{}^3/_2}(1-\nu)^{-3}\int\limits_1^\nu \left\{\frac{[2\nu_1 A_1(\nu_1, \tau_1) - A_2(\nu_1, \tau_1)](2+\nu_1)(1-\nu_1)}{1+\nu_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} A_1(\nu_1, \tau_1)(1-\nu_1^2)\right\} d\nu_1 \qquad (17)$$

Для полного потока вещества через поверхность капли в рассматриваемые моменты времени получаем следующее выражение:

$$I(\tau) = 4\sqrt{2\pi U_0 D_2 R^3}\,(c_0 - c_1)\left\{1 + \frac{\delta}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1-\nu^2)\,Y(\nu, \tau)\,d\nu\right\} \qquad (18)$$

Интегральный член в фигурных скобках может быть вычислен в предположении, что период пульсации $T_0 = 2\pi/\lambda$ либо мал, либо велик по сравнению с временем $T_r = R/3U_0$ прохождения каплей расстояния, равного одной трети ее радиуса. Соответствующие результаты интегрирования, полученные при использовании соотношений (13), (14) и (17), имеют вид:

$$I_1(\tau) = \int\limits_{-1}^{1}(1-\nu^2)\,Y(\nu, \tau)\,d\nu = \begin{cases} -0.2\left(\cos\lambda_1\tau + \dfrac{4.8}{\lambda_1}\sin\lambda_1\tau\right) & (T_0 \ll T_r) \\ -0.08\,(\cos\lambda_1\tau + 5.1\,\lambda_1\sin\lambda_1\tau) & (T_0 \gg T_r) \end{cases} \qquad (19)$$

При постановке граничных условий предполагалось, что в рассматриваемые моменты времени суммарное количество растворенного в капле вещества не успевает существенно измениться. Полученное выражение (18) для потока позволяет, в адиабатическом приближении, учесть это изменение. Поскольку, согласно формуле (1), объем капли, с точностью до членов первого порядка по δ включительно, не зависит от времени, условие материального баланса внутри капли может быть записано в следующем виде:

$$\frac{4\pi}{3} R^3 \frac{dc_0}{dt} = -4\sqrt{2\pi U_0 D_2 R^3}\,(c_0 - c_1)$$

Предполагая $c_1 = \mathrm{const}$, находим:

$$c_0(t) = c_1 + [c_0(0) - c_1]\exp\left(-\frac{t}{T_d}\right), \qquad T_d = \left(\frac{\pi R^3}{18 U_0 D_2}\right)^{1/2} \qquad (20)$$

Здесь $c_0(0)$ — начальное значение концентрации вещества внутри капли. Поскольку скорость релаксации «быстрого» процесса массопередачи в диффузионном пограничном слое характеризуется, согласно формулам (10) и (11), временем $T_r = R/3U_0$, то совершенно очевидно, что условием применимости формулы (20) будет следующее неравенство:

$$T_d \gg T_r$$

Из полученных выше соотношений следует:

$$(T_d / T_r) \sim \sqrt{RU_0/D_2}$$

Таким образом, в случае достаточно больших чисел Пекле поток вещества из капли, пульсирующей по закону (1), в моменты $t > R/3U_0$ определяется, в первом приближении по параметру δ, следующим выражением:

$$I(t) = 4\sqrt{2\pi U_0 D_2 R^3}\,[c_0(0) - c_1]\exp\left(-\frac{t}{T_d}\right)\left\{1 + \frac{\delta}{2} I_1(t)\right\} \qquad (21)$$

Практический интерес представляет выражение для потока, усредненное по периоду пульсации T_0. Из формул (19) и (21) находим:

$$\bar{I} = \frac{1}{T_0}\int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} I(t)\,dt = 4\sqrt{2\pi U_0 D_2 R^3}\,[c_0(0)-c_1]\exp\left(-\frac{t_1}{T_d}\right)\times$$

$$\times\left\{1+\frac{0.11\,\delta}{\lambda T_d}\left(\sin\lambda t_1-\frac{4.8\,U_0}{\lambda R}\cos\lambda t_1\right)\right\} \quad (T_0 \ll T_r) \qquad (22)$$

$$2\sqrt{\frac{2U_0D_2R^3}{\pi}}\,[c_0(0)-c_1]\,\lambda T_d\exp\left(-\frac{t_1}{T_d}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda T_d}\right)\right]\times$$

$$\times\left\{1+\frac{0.04\delta}{1+\lambda^2 T_d^2}\left(\lambda T_d\sin\lambda t_1-\cos\lambda t_1\right)\right\} \quad (T_0 \gg T_r) \qquad (23)$$

Полученные выражения (22) и (23) показывают, что добавка к среднему потоку, обусловленная несферичностью формы капли, различна в различные моменты времени и может быть положительной и отрицательной.

По этой причине представляется сомнительным распространенное мнение, что пульсации поверхности способствуют интенсификации массопередачи из капель и пузырей. К сожалению это обстоятельство не может быть непосредственно проверено экспериментально, поскольку невозможно в одной и той же системе, при одном и том же числе Рейнольдса, получить сферические и несферические капли. Как следует из приведенных выше формул, в первом приближении по параметру δ влияние пульсаций на скорость массопередачи сказывается только благодаря наличию эффекта «обеднения», связанного с конечностью времени T_d. При этом, что физически совершенно очевидно, вклад, вносимый колебаниями поверхности, тем более существен, чем больше период пульсаций T_0 (поскольку при больших T_0 за время одного колебания из капли уходит большее количество вещества). Иная картина должна иметь место при амплитудах колебания, сравнимых со средним радиусом капли, когда пульсации приводят к заметному изменению скорости движения U_0 и когда необходимо учитывать следующие приближения по δ. При достаточно больших амплитудах и частотах колебания эффект пульсации будет определяться в основном, членом, квадратичным по δ. В этом случае для выяснения вопроса о том, усиливают или ослабляют массопередачу колебания поверхности, необходимо решить соответствующие гидродинамическую и диффузионную задачи с точностью до членов порядка δ^2.

В заключение авторы благодарят В. Г. Левича за полезные обсуждения.

Поступило 8 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
2. Valentine R. S., Sather N. E., Heideger W.J. The motion of drops in viscous media. Chem. Eng. Sci. 1965, vol. 20, 719.
3. Левич В. Г. Движение пузырьков умеренных размеров. ЖЭТФ, 18 (1949), т. 19.
4. Chao B. T. Motion of spherical gas babbly in a viscous liquid at large Reynolds numbers. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, 69.
5. Moore D. W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity, J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, 749.
6. Moore D. W. The boundary layer on a spherical gas bubble, J. Fluid Mech. 1963, vol. 16, 161.
7. Головин А. М. К теории колебаний и дробления капли в газовом потоке при наличии вихревого движения внутри капли. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1964, № 7, стр. 1084.
8. Головин А. М. К теории колебаний и дробления внутри капли в газовом потоке при наличии потенциального движения внутри капли. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1964, № 8, 1269.
9. Ruckenstein E. On mass transfer in the continuons phase from spherical bubbles or drops, Chem. Sci. 1964, vol. 19, 131.
10. Плит И. Г. К теории массопередачи в концентрированных потоках капель большого диаметра. ЖПХ, 1964, т. 37, вып. 6, 1301.
11. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. Изд. «Мир», 1964.
12. Цянь Сюэ-сень, Метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го. Сб. «Проблемы механики», т. II, под ред. Х. Драйдена и Т. Кармана. Изд. ин. лит. 1959.