АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ГОРЮЧЕЙ СМЕСЬЮ ГАЗОВ

Г. Г. ЧЕРНЫЙ

(Москва)

Начатое в последнее время исследование установившихся сверхзвуковых течений горючих смесей газов с возникновением детонационных волн и фронтов медленного горения обусловлено рядом причин. Укажем на проблему сжигания топлива в сверхзвуковом потоке, а также на использование стационарных детонационных волн для некоторых процессов химической технологии и изучения кинетики химических реакций при высокой температуре.

Экспериментальное изучение стационарных детонационных волн представляет значительные трудности прежде всего из-за сложности получения установившихся течений горючих смесей газов со скоростями, превышающими скорость распространения детонационных волн в них (эта скорость, как известно, составляет 2 или более *км/сек*), и с достаточно высокой температурой.

В работе [1] наблюдалась стационарная волна детонации при истечении из сопла перерасширенной водородо-воздушной струи. В работе [2] изучались нормальные и косые детонационные волны в такой же смеси внутри рабочей части аэродинамической трубы.

В исследованиях [3,4] стационарное обтекание тела горючей смесью моделировалось выстреливанием тела в покоящуюся среду. При этом было обнаружено, в частности, что волна детонации, образующаяся перед телом, на некотором расстоянии от тела распадается на обычный адиабатический скачок уплотнения и на фронт медленного горения, распространяющийся по несгоревшему газу за скачком.

Несмотря на полученные интересные сведения, экспериментальное исследование стационарных детонационных волн и фронтов медленного горения в сверхзвуковом потоке все еще находится в первоначальной стадии накопления и систематизации фактов.

Результаты теоретического анализа неодномерных стационарных течений газа с волнами детонации и горения пока также весьма ограничены даже в простейшем случае представления этих волн в виде поверхностей нулевой толщины с заданным тепловыделением.

В работе [5] получено уравнение поляры для экзотермического скачка, обобщающее на этот случай уравнение ударной поляры для обычных адиабатических скачков уплотнения. При этом в упомянутой работе уравнение поляры проанализировано лишь для случая сверхзвуковой скорости перед скачком, т. е. рассмотрены только волны детонации. Авторы работы [6], используя уравнение детонационной поляры, дали решение задачи об обтекании клина горючей смесью с присоединенной к вершине клина детонационной волной. В работе [7] получено решение задач об обтекании конуса с присоединенной детонационной волной и об обтекании точечного поджигающего источника, вызывающего детонационное сгорание газа.

Автор работы [8], опираясь на рассмотрение простейшей внутренней структуры волны детонации в виде обычной ударной волны и бесконечно-тонкого фронта пламени с промежутком между ними, соответствующим задержке воспламенения, связал обнаруженный в работах [3,4] распад детонационной волны с влиянием величины отношения характерного размера этого промежутка и размера обтекаемого тела.

В настоящей работе приведены решения ряда автомодельных задач о плоских и осесимметричных сверхзвуковых течениях горючих смесей газов с детонационными волнами и фронтами медленного горения. Для полноты в изложение включены изучавшиеся уже ранее случаи обтекания клина [6] и конуса [7] с присоединенной детонационной волной; при этом устранена неточность в описании возможных режимов обтекания конуса [7]. Новые решения относятся к случаям течений с образованием адиабатических скачков уплотнения с последующим сгоранием смеси в фронтах медленного горения. В частности, решены задачи о таких случаях обтекания клина и конуса и о линейном и точечном поджигающих источниках, вызывающих возникновение фронтов медленного горения. Рассмотрена также задача о вырождении детонационной волны в адиабатический скачок. Более общий случай распада детонационной волны на адиабатический

скачок и фронт медленного горения изложен в работе [9]. Все задачи решены в предположении о нулевой толщине фронтов детонации и медленного горения.

Рассмотрим более детально, чем это было сделано в работах [5,6], соотношения на поверхности экзотермического скачка. Как и в этих работах, для простоты будем считать, что с обеих сторон скачка газ является совершенным с постоянными теплоемкостями, причем теплоемкости его не изменяются при прохождении сквозь скачок.

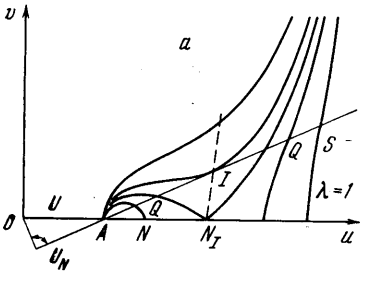
Законы сохранения массы, импульса и энергии на скачке можно записать в виде (обозначения общеприняты)

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}, \quad p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2, \quad V_{\tau 1} = V_{\tau 2} \tag{1}$$

$$^1/_2 (V_{n1}^2 + V_{\tau 1}^2) + h_1 = h_{01}, \quad ^1/_2 (V_{n2}^2 + V_{\tau 2}^2) + h_2 = h_{01} + q = \lambda h_{01}$$

$$\left(\lambda = 1 + \frac{q}{h_{01}}\right)$$

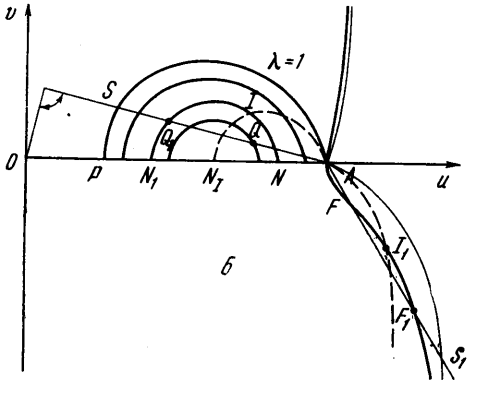
Здесь q — подведенное в скачке тепло, отнесенное к единице массы газа, λ — отношение полных теплосодержаний газа за скачком и перед ним.

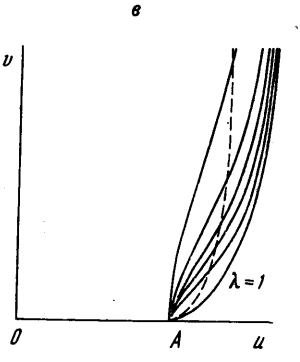


Выразив из законов сохранения связь между компонентами скорости газа u, v за скачком и скоростью V перед ним, получим уравнение поляры неадиабатического скачка

$$v^2 = (V - u) \frac{Vu(V - u) - (\lambda V - u) a_*^2}{[2/(\gamma + 1)] V^2 - Vu + a_*^2} \tag{2}$$

Через a_* обозначена критическая скорость горючей смеси.





Фиг. 1

В частном случае $\lambda = 1$ уравнение (2) сводится к уравнению обычной ударной поляры. В дальнейшем будут рассматриваться только экзотермические скачки, для которых $\lambda > 1$. Фиг. 1, *а—в* иллюстрирует зависимость (2) для трех характерных значений $V/a_* \equiv \Lambda$ при $\gamma = 1.4$ для разных значений λ.

На фиг. 1, *а* отношение $\Lambda < 1$ (дозвуковая скорость перед скачком, число Маха M равно 0.5). При $\lambda = 1$ поляра (2) состоит из точки $u = V$, $v = 0$ (точка A) и бесконечной ветви, проходящей через точку $u = a_*^2/V$, $v = 0$ (точка P), и имеющей асимптотой прямую

$$u = \frac{1}{V}\left(\frac{2}{\gamma + 1} V^2 + a_*^2\right) \tag{3}$$

При постепенном возрастании λ появляется замкнутая ветвь поляры, выходящая из точки $u = V$, $v = 0$ вправо, а вторая ветвь, продолжая иметь ту же асимптоту, что и при $\lambda = 1$, смещается влево. При условии

$$\lambda = \lambda_J = \left(\frac{1+\Lambda^2}{2\Lambda}\right)^2 \tag{4}$$

обе ветви смыкаются в точке $u = \sqrt{\lambda_J} a_*$, $v = 0$ соответствующей критической скорости продуктов сгорания. При дальнейшем росте λ поляра определена на всем участке между $u = V$ и значением u для асимптоты и при неограниченном росте λ на все большем участке приближается к прямой $u = V$.

На фиг. 1, *б* отношение $\Lambda > 1$ (сверхзвуковая скорость перед скачком, $M = 3$). При $\lambda = 1$ поляра состоит из замкнутой ветви, проходящей через точки $u = V$, $v = 0$ (точка A) и $u = a_*^2/V$, $v = 0$ (точка P) и бесконечной ветви, проходящей через первую из названных точек и имеющей асимптотой прямую (3) (в нижней половине фиг. 1, б масштаб вдоль оси u увеличен).

При возрастании λ поляра распадается на две части: замкнутую ветвь, лежащую внутри ветви, соответствующей $\lambda = 1$, и бесконечную ветвь, проходящую через ту же точку, что и при $\lambda = 1$, но под прямым углом к оси $v = 0$, и имеющую ту жу асимптоту. При условии (4) замкнутая ветвь стягивается в точку $u = \sqrt{\lambda_J} a_*, v = 0$ и при дальнейшем росте λ исчезает, а бесконечная ветвь при неограниченном росте λ на все большем участке приближается к прямой $u = V$.

На фиг. 1, *в* изображен промежуточный случай, соответствующий $\Lambda = 1$ (скорость перед скачком точно равна скорости звука).

Важно отметить, что если внутри зоны интенсивного тепловыделения пренебречь действием вязкости и теплопроводности, то условия (1) и, следовательно, уравнение поляры (2) можно использовать и для любого промежуточного сечения внутри зоны тепловыделения, понимая под величиной λ отношение местного значения полного теплосодержания газа к h_{01}. Подчеркнем, что при этом значение касательной составляющей скорости газа сохраняется одним и тем же во всех промежуточных сечениях.

Рассмотрим случай $\Lambda < 1$ и $1 < \lambda < \lambda_J$ (фиг. 1, *а*). Допустим сначала, что фронт разрыва нормален к скорости газа перед ним. Тогда возможным значениям скорости газа за скачком соответствуют точки N и N_1 поляры. Если предположить, что в процессе реакции теплоподвод по глубине фронта реакции растет, т. е. величина λ монотонно возрастает, то при таком изменении λ из точки A, соответствующей начальному состоянию газа, можно попасть только в точку N. В точку N_1 таким образом попасть нельзя, так как для этого пришлось бы пройти через максимум λ в точке N_J. Переход в точку N_1 путем адиабатического скачка (при $\lambda = 1$) из начального состояния A в точку P с последующим непрерывным переходом из точки P в точку N_1, хотя и согласуется с законами сохранения и условием монотонного роста λ в зоне реакции, также невозможен в силу того, что скачок из точки A в точку P был бы адиабатическим скачком разрежения, противоречащим, как известно, второму началу термодинамики (теорема Цемплена). Таким образом, точка N соответствует нормальному фронту медленного горения. При заданной скорости фронта стационарное течение будет, очевидно, возможным лишь при $\lambda \leqslant \lambda_J$.

Будем теперь постепенно уменьшать нормальную скорость U_N распространения фронта горения. Так как касательные к фронту составляющие скорости перед фронтом и за ним, а также внутри зоны тепловыделения одинаковы, то состоянию газа за фронтом соответствуют точки Q и Q_1, лежащие на прямой, идущей из точки A нормально к фронту. На этой

же прямой должны лежать и точки, соответствующие промежуточным состояниям в зоне горения.

Использование того же рассуждения, что и в случае нормальной волны, приводит к выводу, что физический смысл имеет лишь режим, соответствующий точке Q. При данной величине U_N вновь имеется наибольшее значение λ, соответствующее поляре, проходящей через точку J. Совокупность точек J на полярах для всех значений $\lambda > \lambda_J$ образует кривую, отделяющую область возможных режимов медленного горения от режимов, не имеющих физического смысла.

Эту кривую назовем кривой Чепмена—Жуге. Ее уравнение получаем из условия касания к поляре (2) прямой, идущей из точки A, в виде:

$$v^2 = (V-u)^2 \frac{V^2 - a_*^2 + 2V(u-V)}{a_*^2 - [(\gamma-1)/(\gamma+1)]V^2 - 2V(u-V)} \tag{5}$$

В точках кривой Чепмена—Жуге нормальная составляющая скорости газа за фронтом горения равна скорости звука. В самом деле, из соотношений (1) легко найти зависимость

$$V_{n1}V_{n2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_\tau^2 = a_*^2 \frac{\lambda V_{n1} - V_{n2}}{V_{n1} - V_{n2}}$$

обобщающую известную формулу Прандтля для адиабатических скачков. В точках кривой Чепмена—Жуге это уравнение, квадратное относительно V_{n2}, должно давать одно решение, откуда легко находим, что в точках этой кривой

$$V_{n2}^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_\tau^2 = \lambda a_*^2 \tag{6}$$

Сравнивая это выражение с выражением закона сохранения энергии на скачке

$$\frac{V_{n2}^2 + V_\tau^2}{2} + \frac{a_2^2}{\gamma-1} = \lambda \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_*^2$$

получаем, что $V_{n2} = a_2$.

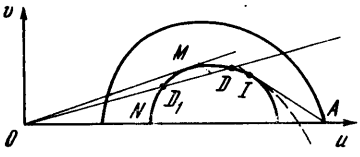
Для всех остальных режимов медленного горения, имеющих физический смысл, $V_{n2} < a_2$.

Обратимся теперь к случаю $\Lambda > 1$ (фиг. 1, *б*) и проведем анализ возможных режимов горения аналогично предыдущему случаю. В отличие от предыдущего, теперь физически допустим и скачкообразный переход из точки A в точку S с последующим непрерывным переходом в точку Q_1. Точки Q_1 на участке N_1J поляры соответствуют, таким образом, волнам детонации. Волну детонации можно рассматривать как скачок уплотнения, непосредственно за которым следует фронт горения, распространяющийся по газу с нормальной скоростью, точно равной нормальной составляющей скорости газа за скачком уплотнения. Отсюда следует, что если рассмотреть, например, точку S на ударной поляре, соответствующую скорости газа за скачком и, следовательно, перед фронтом горения, и построить для скорости OS поляру с тем же значением λ, что и поляра N_1JN, то эта поляра должна будет пройти через точки Q_1 и Q.

Что касается режимов горения, которым соответствуют точки Q на участке JN поляры, то относительно них необходимо сделать следующее замечание. Для всех точек участка поляры JN нормальная составляющая скорости газа перед скачком больше скорости звука (она равна скорости звука тогда, когда перпендикуляр из точки A на направление фронта касается в точке A ударной поляры для $\lambda = 1$). Обычные механизмы распространения фронта экзотермических химических реакций — диффузия и теплопроводность — не обеспечивают распространения фронта с сверхзвуковой скоростью. Попасть же в точку Q при непрерывном

изменении λ после скачка в точку S нельзя по той же причине, по которой нельзя попасть непрерывным образом из точки A в точку Q_1. Поэтому режимы, соответствующие точкам Q, будем считать физически нереальными, хотя в принципе быстрое горение могло бы осуществляться, например, путем возбуждения химических реакций какими-либо внешними источниками.

Для дальнейшего важно отметить, что, как и в случае $\Lambda < 1$, в точке J нормальная к фронту составляющая скорости газа за скачком равна скорости звука. Геометрическое место точек J, изображенное кривой N_JJA на фиг. 1, *б* отделяет область детонационных режимов от области режимов быстрого горения. Нормальная составляющая скорости газа за фронтом при детонационном режиме меньше скорости звука, при режиме быстрого горения — больше скорости звука.



Фиг. 2

Предельный режим детонации, соответствующий наименьшей нормальной скорости ее распространения, называется детонацией Чепмена—Жуге. При дальнейшем уменьшении угла наклона фронта, т. е. при дальнейшем уменьшении нормальной составляющей скорости газа перед фронтом, детонация при данной величине λ становится невозможной.

Если продолжать уменьшать нормальную составляющую скорости перед скачком, то при достаточно малой ее величине прямая, идущая из точки A нормально фронту, сначала коснется второй ветви поляры в точке J_1, а затем и пересечет ее в точках F и F_1.

При данном угле наклона фронта, т. е. при данном значении нормальной составляющей скорости, и монотонном изменении λ в зоне реакции возможен переход из точки A в точку F, переход же в точку F_1 невозможен. Переход скачком в точку S_1 с последующим непрерывным переходом в точку F_1 также невозможен, так как скачок в точку S_1 есть скачок разрежения. Таким образом, реальный смысл имеет лишь участок AJ_1 (и симметричный ему) этой ветви поляры. Режимы, соответствующие участку AJ_1, суть режимы медленного горения. Как видно из построения, нормальная скорость распространения по газу фронта медленного горения существенно меньше скорости звука.

После проделанного анализа легко дать решение задачи о сверхзвуковом обтекании горючей смесью клина.

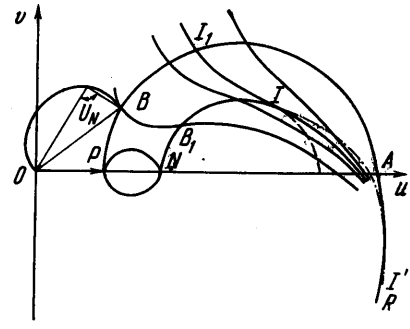
Пусть прямая, соответствующая направлению стенки клина, пересекает детонационную поляру в двух точках: в точке D на участке MJ и в точке D_1 (фиг. 2). Тогда, согласно сказанному выше, около клина возникает поступательный поток со скоростью OD или OD_1, отделенный от набегающего невозмущенного потока соответствующим плоским фронтом детонационной волны. Как и при сверхзвуковом обтекании клина нереагирующим газом, в действительности будет осуществляться режим обтекания, соответствующий более слабой волне, т. е. соответствующий точке D.

Пусть теперь угол клина уменьшается. Точка D смещается при этом в сторону точки J, интенсивность детонационного фронта постепенно ослабевает. При угле клина, соответствующем совпадению точки D с точкой J, интенсивность детонационной волны становится наименьшей из возможных, детонация становится детонацией Чепмена—Жуге.

Для того чтобы установить, что произойдет при дальнейшем уменьшении угла клина, вспомним, что при детонации Чепмена — Жуге нормальная составляющая скорости газа за фронтом волны равна скорости звука,

т. е. направление такой волны совпадает с направлением акустической характеристики. Поэтому при дальнейшем уменьшении угла клина за остающейся без изменения волной детонации Чепмена — Жуге возникает центрированная волна разрежения Прандтля — Майера, в которой поток непрерывно поворачивается от направления OJ, приобретаемого им за фронтом детонации, до требуемого направления. В пределе, когда угол клина становится равным нулю, течение за волной Прандтля — Майера приобретает направление набегающего невозмущенного потока, и поток в целом можно рассматривать как обтекание с детонационной волной прямолинейного источника поджигания газа.

Можно продолжить и дальше разворот потока в волне разрежения, что будет соответствовать сверхзвуковому обтеканию горючей смесью выпуклого угла, вдоль ребра которого имеется источник поджигания, обеспечивающий возникновение детонационной волны.



Фиг. 3

То, что в детонационной волне происходит значительное повышение давления, можно использовать для создания аэродинамической подъемной силы и тяги, действующих на обтекаемые потоком тела.

Если угол наклона стенки клина к направлению набегающего потока больше угла, образуемого с этим направлением касательной OM к детонационному участку поляры, то обтекание клина с присоединенной детонационной волной невозможно. При обтекании клина конечного размера перед ним возникает отсоединенная детонационная волна, интенсивность которой изменяется от наибольшей, соответствующей нормальной волне (точка N поляры) на средней линии тока, до наименьшей, соответствующей детонации Чепмена — Жуге (точка J поляры),— в бесконечности.

Аналогичная картина возникает при обтекании тел и другой формы.

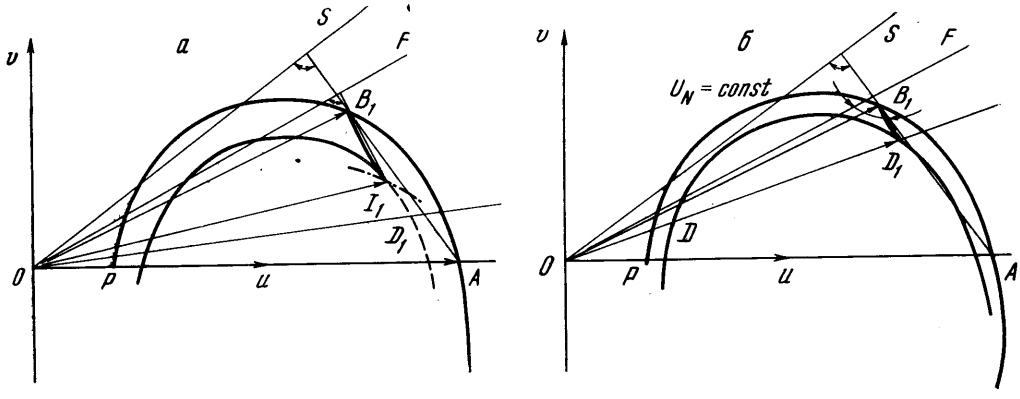
Обратимся теперь ко второму возможному режиму сверхзвукового обтекания угла горючей смесью. Допустим, что в тех случаях, когда при обтекании угла возникает ударная волна, она не воспламеняет горючую смесь и не превращается, следовательно, в детонационную волну. Сгорание же смеси происходит во фронте медленного горения, распространяющемся по газу с заданной (малой по сравнению со скоростью звука) нормальной скоростью.

Пусть на фиг. 3 кривая PA представляет собой ударную поляру для невозмущенного потока, а кривая AR — эпициклоиду, соответствующую простой волне разрежения. Кривая PAR характеризует, таким образом, совокупность всех возможных значений скорости газа за изломом линии тока.

Возьмем некоторую точку B этой кривой и построим для скорости OB за скачком поляру медленного горения BB_1, соответствующую заданной величине λ. Задавая достаточно малую скорость нормального горения U_N, найдем на поляре медленного горения точку C, соответствующую скорости сгоревшего газа. С увеличением скорости U_N точка C перемещается вдоль поляры, удаляясь от точки B. При этом могут представиться два различных случая. В первом случае рост скорости U_N ограничен ее наибольшей возможной величиной, равной нормальной составляющей скорости газа за скачком. Во втором случае рост U_N ограничен тем, что точка C доходит до точки Чепмена — Жуге.

На основании сделанного уже ранее вывода, первый случай осуществляется только при таких λ, при которых возможно стационарное течение с детонационной волной, и только для тех точек B, которые расположены на участке PJ_1 поляры. Совокупность предельных положений точек C образует детонационную поляру NJ, соответствующую заданному значению λ, причем точка J будет точкой Чепмена—Жуге на поляре медленного горения J_1J. При упомянутых значениях λ для каждой точки B на участке J_1A ударной поляры, а при бóльших λ — для всех ее точек при увеличении скорости U_N соответствующая точка C доходит до точки Чепмена — Жуге.

Совокупность совпадающих с режимами Чепмена — Жуге положений точек C образует кривую (на фиг. 3 она обозначена штрих-пунктиром),



Фиг. 4

из каждой точки которой можно провести эпициклоиду, соответствующую простой волне разрежения, аналогично тому, как это делалось ранее для точки J детонационной поляры.

После сказанного выше легко дать решение задачи об обтекании клина или излома стенки с образованием адиабатического скачка уплотнения и распространяющегося по газу за ним с заданной скоростью U_N фронта медленного горения. Это решение строится аналогично решению задачи об обтекании клина с волной детонации и содержит его как частный случай.

Зададим направление потока за фронтом пламени. Могут представиться различные случаи. В первом случае прямая, соответствующая заданному направлению, пересекает линию $U_N = \text{const}$ в точках D и D_1 (см. фиг. 4, *б*). Это значит, что имеются два режима течения с тем же углом поворота потока; в одном из них скорость в скачке меняется от OA до OB_1 и затем в фронте медленного горения — от OB_1 до OD_1; на фигуре указаны направления скачка OS и фронта пламени OF. То же происходит во втором режиме. При обтекании клина или излома стенки, очевидно, будет реализоваться режим, соответствующий более слабому скачку.

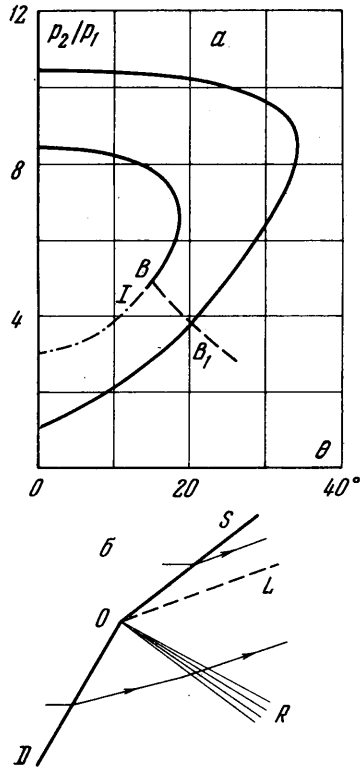
В случае, изображенном на фиг. 4, *а*, в котором линия $U_N = \text{const}$ доходит до линии режимов Чепмена — Жуге, скорость газа в скачке изменяется от OA до OB_1, затем в фронте медленного горения — от OB_1 до OJ_1, причем достигается режим Чепмена — Жуге; далее, в центрированной волне разрежения скорость изменяется вдоль эпициклоиды J_1D_1. Очевидно, что дальнейшее уменьшение угла поворота потока приведет только к изменению интенсивности волны разрежения.

Если на фиг. 4, *а* или 4, *б* взять направление потока сгоревшего газа совпадающим с направлением набегающего потока, то получим решение

задачи об обтекании линейного поджигающего источника, вызывающего образование фронта медленного горения.

В заключение рассмотрим течения с детонацией в случаях, когда волна детонации, начиная с некоторой точки, превращается в адиабатический скачок (волна детонации подходит к границе с областью инертного газа), и наоборот, когда скачок превращается в волну детонации (скачок подходит к границе потока горючего газа и вызывает волну детонации в нем). Рассматривать течение удобно в плоскости θ, p, где θ — угол вектора скорости, отсчитываемый от направления набегающего потока, p — давление.

На фиг. 5, *а* приведены в переменных θ, p поляра адиабатического скачка и детонационная поляра. Пусть задана точка B детонационной поляры, т. е. интенсивность подходящей детонационной волны. Будем считать, что скорость газа за детонационной волной сверхзвуковая. Проведем из точки B кривую, соответствующую простой волне разрежения. Пересечение этой кривой с ударной полярой в точке B_1 определяет интенсивность волны разрежения и уходящего скачка уплотнения. Соответствующая схема течения изображена на фиг. 5, *б*, где DO — приходящая волна детонации, OR — центрированная волна разрежения, OL — разделяющая линия тока, OS — уходящий скачок уплотнения.



Фиг. 5

На фиг. 6, *а* вновь изображены ударная и детонационная поляры. Пусть задана интенсивность подходящего скачка уплотнения. Рассмотрим различные возможные случаи.

В первом случае ударная поляра, построенная для потока за скачком, не пересекает участка детонационной поляры, соответствующего уходящим детонационным волнам (поляра, выходящая из точки B). В этом случае уходящая детонационная волна является волной Чепмена—Жуге (точка J), к которой примыкает центрированная волна разрежения (участок кривой JB_1). Поток за приходящим скачком (точка B) приобретает в отраженном скачке направление и давление, характеризуемые точкой B_1. Соответствующая схема течения изображена на фиг. 6, *б*, где SO — приходящий скачок уплотнения, OS' — отраженный (уходящий) скачок, OL — разделяющая линия тока, OD — уходящая волна детонации Чепмена—Жуге, OR — примыкающая к ней центрированная волна разрежения.

Во втором случае ударная поляра для потока за скачком пересекает детонационную поляру на участке, соответствующем уходящим детонационным волнам (поляра, выходящая из точки C). Схема течения для этого случая изображена на фиг. 6, *в*, где OD — уходящая сильная (пересжатая) детонационная волна, остальные обозначения — прежние.

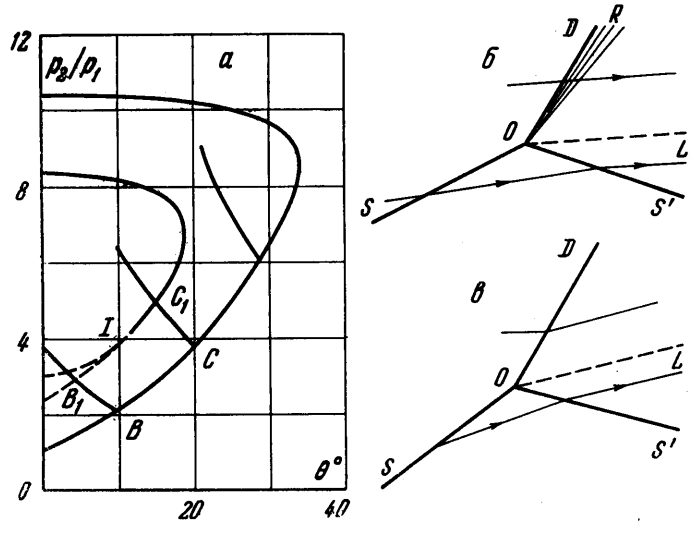
При увеличении интенсивности подходящего скачка SO построенная для сверхзвукового потока за скачком поляра перестает пересекаться с

детонационной полярой, а затем поток за скачком становится дозвуковым. В этом случае нет простого автомодельного решения задачи о превращении скачка уплотнения в волну детонации.

Точно так же в случае, когда за волной детонации скорость дозвуковая, задача о превращении такой волны в ударную волну перестает быть автомодельной.

Рассмотренные случаи представляют собой простейшие примеры автомодельных задач о течениях с волнами детонации. Усложнение этих примеров на случай течения, в котором по газу за уходящим скачком распространяется фронт медленного горения, содержится в упоминавшейся уже работе [9].

Отметим еще, что всем этим течениям соответствуют в случае одномерных неустановившихся течений частные примеры задачи о распаде произвольного разрыва в горючей смеси, подробно изученной в работе [10].



Фиг. 6

Рассмотрим теперь симметричное сверхзвуковое обтекание кругового конуса горючей смесью газов. Уравнение, связывающее составляющие скорости газа u и v в направлении оси симметрии и по нормали к ней, для случая конических течений имеет вид [11]:

$$vv'' = 1 + v'^2 - (u + vv')^2/a^2 \tag{7}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по u и скорость звука a определяется выражением

$$a^2 = {}^1/_2\,(\gamma + 1)\,\lambda a_*^2 - {}^1/_2\,(\gamma - 1)\,(u^2 + v^2) \tag{8}$$

При этом связь между плоскостью uv и меридиональной плоскостью течения xy дается соотношением

$$y/x = -1/v' \tag{9}$$

т. е. при одинаковом направлении осей x и u нормаль к интегральной кривой $v(u)$ уравнения (7) параллельна соответствующему лучу в плоскости xy. Уравнению (7) можно придать вид

$$\varkappa = -\frac{1}{N}\left(1 - \frac{v_n^2}{a^2}\right) \tag{10}$$

Здесь $\varkappa$ — кривизна интегральной кривой, $N = v\,(1 + v'^2)^{1/2}$, v_n — составляющая скорости газа по нормали к лучу в плоскости xy, причем

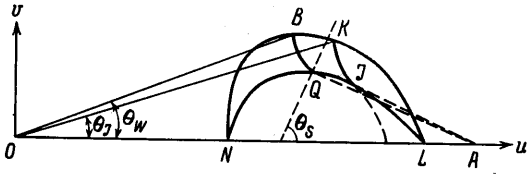
$$v_n = \frac{u + vv'}{(1 + v'^2)^{1/2}} \tag{11}$$

Рассмотрим условия, которым должно удовлетворять решение уравнения (7).

На поверхности конуса при $\theta = \theta_w$ должно быть выполнено условие $v_n = 0$. Следовательно, на поверхности конуса

$$v = u \operatorname{tg} \theta_w, \qquad v' \operatorname{tg} \theta_w = -1$$

т. е. в плоскости xy интегральная кривая должна подходить к прямой $v = u \operatorname{tg} \theta_w$ под прямым углом.



Фиг. 7

В случае обтекания с детонационной волной на поверхности волны, т. е. при $\theta = \theta_s$, решение должно удовлетворять уравнению детонационной поляры (2) и условию

$$\operatorname{tg} \theta_s = (U - u)/v$$

следующему из непрерывности касательной составляющей скорости при переходе через волну. При этом $v' \operatorname{tg} \theta_s = -1$.

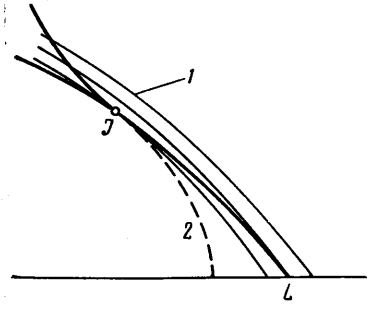
Геометрически условия при $\theta = \theta_s$ означают, что интегральная кривая должна выходить из точки Q детонационной поляры (фиг. 7) по нормали к фронту волны, т. е. вдоль прямой AQ, где A — точка, соответствующая скорости набегающего потока. Согласно показанному ранее, в точке Q, лежащей левее точки J, скорость $v_n < a$, и интегральная кривая обращена, следовательно, выпуклостью к оси u. Условие однозначности решения требует, чтобы при движении вдоль интегральной кривой от точки Q нормаль к кривой поворачивалась по часовой стрелке, т. е. из точки Q интегральная кривая должна выходить влево. При заданном угле конуса θ_w точка Q (и, следовательно, угол θ_s) выбирается так, чтобы интегральная кривая подходила к лучу $\theta = \theta_w$ под прямым углом.

Течение между волной и поверхностью конуса является в этом случае коническим течением сжатия, подобным тому, которое возникает при сверхзвуковом обтекании конуса нереагирующим газом. Концы интегральных кривых, выходящих из всех точек Q на участке поляры NJ, образуют часть NK кривой, соответствующей поверхности конуса и аналогичной «яблоковидной» кривой в случае $\lambda = 1$.

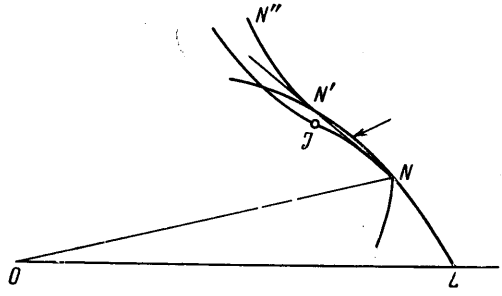
Для дальнейшего удобно рассмотреть в плоскости uv кривые $v_n = a$, поведение которых известно (эти кривые являются эпициклоидами).

В точке J нормаль к интегральной кривой совпадает с направлением фронта волны Чепмена—Жуге, так что в этой точке $v_n = a$, и, следовательно, интегральная кривая касается эпициклоиды и имеет нулевую кривизну (фиг. 8). Кривизна эпициклоид всюду отлична от нуля, причем они обращены вогнутостью к оси u. Отсюда вытекает, что разность $v_n - a$ на интегральной кривой и ее кривизна в точке J меняют знак. Поэтому из

точки J можно двигаться по интегральной кривой не только влево, как из точек Q, но и вправо, где $v_n > a$, сохраняя при этом вращение нормали по часовой стрелке. Последнему случаю отвечает начинающееся за детонационной волной коническое течение разрежения.



Фиг. 8



Фиг. 9

Покажем, что интегральная кривая, описывающая волну разрежения, может быть продолжена до оси u и что на ней не встретится точка перегиба. Действительно, неравенство $v_n - a > 0$ на этой кривой может нарушаться, если только разность $v_n - a$ обратится в нуль, т. е. если интегральная кривая коснется эпициклоиды изнутри, что невозможно, так как при $v \neq 0$ в точке касания кривизна интегральной кривой должна быть равна нулю.

Из сказанного очевидно, что интегральная кривая, выходящая из точки J в сторону меньших значений v, монотонно изменяет угол наклона к оси u, причем абсолютное значение угла ее наклона к оси u ограничено сверху значением угла наклона эпициклоид.

В силу теоремы существования, кривая может быть продолжена до оси $v = 0$. В точках этой оси, как следует из выражения (10), имеем $v_n = a$, так что соответствующий луч, замыкающий в плоскости течения волну разрежения, является характеристикой, и, следовательно, волна разрежения может быть склеена вдоль него с поступательным потоком.

Описанная интегральная кривая соответствует сверхзвуковому обтеканию точечного поджигающего источника с образованием детонационной волны.

Точки $v = 0$ являются особыми для уравнения (7). Однако продолжить решение непрерывным образом, перейдя в точке $v = 0$ на другую интегральную кривую, нельзя, так как легко показать, что все эти кривые имеют в точке $v = 0$ одинаковую кривизну, и, следовательно, переход на другую кривую привел бы к неоднозначности течения в плоскости xy.

Для дальнейшего анализа режимов обтекания конуса заметим, что так как в течении разрежения $v_n > a$, то каждый луч (точнее — конус, описанный этим лучом) можно заменить коническим скачком уплотнения.

Рассмотрим некоторую точку N интегральной кривой JNL, описывающей течение разрежения (фиг. 9), и проведем через эту точку ударную поляру, для которой скорость ON является начальной скоростью. Эта поляра выходит из точки N под тем же углом, что и эпициклоида, но имеет бóльшую кривизну. Точка N' в плоскости годографа, соответствующая скорости газа за скачком уплотнения, должна лежать на пересечении ударной поляры с касательной к интегральной кривой в точке N. Действительно, из условия неразрывности области течения в плоскости xy следует, что направление скачка, определяемое как направление нормали

к секущей NN', должно совпадать с направлением нормали к интегральной кривой в точке N.

Так как после скачка, т. е. в точке N', справедливо неравенство $v_n < a$, то интегральная кривая, соответствующая течению за скачком уплотнения, обращена выпуклостью к оси u. При вращении нормали к кривой по часовой стрелке надо следовать вдоль интегральной кривой влево. Эта кривая описывает течение сжатия и продолжается до точки N'', в которой $v_n = 0$. Интенсивность скачка уплотнения, замыкающего коническую волну разрежения, возрастает от нуля при смещении точки N от точки J, достигает некоторого максимума и вновь стремится к нулю при приближении точки N к точке L, лежащей на оси u. Это очевидным образом следует из того, что соответствующие ударные поляры касаются интегральной кривой в точках J и L.

Совокупность точек N'', соответствующих всем положениям точки N на кривой JL, составляет участок KL «яблоковидной» кривой (фиг. 7).

Проведенный анализ показывает таким образом, что при сверхзвуковом обтекании конуса горючей смесью газов с образованием детонационной волны возможны следующие виды течений. При каждом значении угла конуса, меньшем некоторого предельного значения $\theta_w^{(\max)}$, зависящего от числа M набегающего потока, от величины λ, характеризующей тепловыделение при детонационном сгорании, и от отношения теплоемкостей γ, могут осуществляться два режима обтекания конуса с присоединенной конической волной детонации. По-видимому, как и в случае инертного газа, при обтекании конуса свободным потоком детонирующей смеси будет осуществляться режим с более слабой детонационной волной.

При этом, если угол конуса меньше $\theta_w^{(\max)}$, но больше или равен θ_J (рис. 7), то между волной детонации и поверхностью конуса осуществляется непрерывное течение сжатия (при $\theta_w > \theta_J$ волна детонации будет пересжатой). Этот режим течения аналогичен случаю обтекания конуса инертным газом с присоединенным скачком уплотнения. В соответствии с тем, что нормальная к лучам составляющая скорости газа в этом течении меньше скорости звука, характеристики, исходящие от поверхности конуса или от звуковой линии (если такая имеется, т. е. если при торможении газа за скачком скорость газа уменьшается до дозвуковой), достигают волны детонации и при изменении угла конуса меняется и угол раскрытия конической волны детонации.

При уменьшении угла конуса до значений, меньших θ_J, за волной детонации, остающейся для всех углов $\theta_w < \theta_J$ неизменной и соответствующей детонации Чепмена—Жуге, образуется волна разрежения, замыкаемая скачком уплотнения с последующим течением сжатия вблизи поверхности конуса. При уменьшении угла конуса ширина зоны разрежения возрастает, а интенсивность замыкающего ее скачка, как уже говорилось, сначала увеличивается, а затем вновь уменьшается.

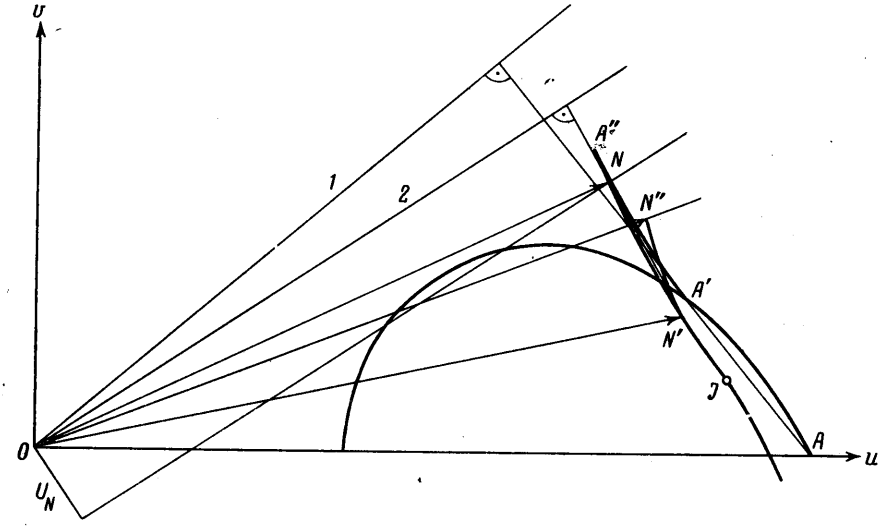
Так как в конической волне разрежения $v_n > a$, то возмущения, идущие от поверхности конуса вдоль характеристик, не могут проникнуть в эту область и повлиять на положение детонационной волны до тех пор, пока к ней не подойдет замыкающий скачок уплотнения.

При значении $\theta_w = 0$ ширина зоны разрежения становится наибольшей, а замыкающий ее скачок уплотнения вырождается в характеристику.

Последний случай, который описывает распространение детонационной волны от точечного поджигающего источника, можно так же трактовать как описание асимптотического поведения потока за произвольным телом конечного размера на больших расстояниях от тела при возникновении детонационной волны.

При обтекании конуса конечного размера с углом, большим $\theta_w^{(max)}$, образуется отсоединенная сильная детонационная волна, постепенно ослабевающая и переходящая в волну Чепмена—Жуге.

Отметим еще, что движение конуса в детонирующем газе при наличии за волной детонации скачка уплотнения представляет собой пример течения, в котором существуют движущиеся по частицам в одну и ту же сторону и исходящие из одной точки два разрыва с сжатием газа: волна детонации, распространяющаяся по частицам газа за ней с нормальной составляющей скорости, равной скорости звука, и следующий за волной детонации скачок уплотнения, распространяющийся по частицам газа перед ним со сверхзвуковой скоростью.



Фиг. 10

Перейдем к описанию режимов сверхзвукового обтекания конуса с фронтом медленного горения в потоке за головным скачком уплотнения.

Как и в случае клина, допустим, что ударная волна не воспламеняет газ и не превращается в детонационную волну. Сгорание газа происходит во фронте, который распространяется по сжатому ударной волной газу с заданной нормальной скоростью U_N.

Будем рассматривать только автомодельные режимы. Очевидно, что если $U_N = 0$, то течение будет таким же, как и при отсутствии горения; фронт пламени совпадает при этом с поверхностью конуса. Всем возможным положениям скачка уплотнения соответствует совокупность значений скорости на поверхности конуса, образующая в плоскости uv ту же «яблоковидную» кривую, что и для случая $\lambda = 1$.

Если задать положение головного скачка, то очевидно также, что наибольшее возможное значение U_N будет равно значению нормальной составляющей скорости газа за скачком. При этом скачок вместе с следующим за ним фронтом горения превратится в детонационную волну. Решения, соответствующие этому случаю, были разобраны выше.

Изучим возможные режимы обтекания при промежуточных значениях U_N. Зададим угол конического скачка и проведем в плоскости uv (фиг.10) соответствующую этому скачку интегральную кривую $A'A''$. Зададим скорость нормального горения U_N. Этим, очевидно, определится точка N на интегральной кривой, соответствующая течению перед фронтом

пламени (при $U_N = 0$ точка N совпадает с точкой A'', при $U_N = U_N^{(\max)}$ — с точкой A'). Проведем через точку N поляру медленного горения NJ, соответствующую скорости ON. Следует различать две возможности. Если выбранный угол скачка больше угла волны детонации Чепмена—Жуге при заданной величине λ, то при любом значении $U_N < U_N^{(\max)}$ касательная к интегральной кривой в точке N пересечет поляру медленного горения и этим определится точка N', соответствующая состоянию газа за фронтом горения. В точке N' нормальная составляющая скорости газа меньше скорости звука, поэтому проходящая через эту точку интегральная кривая обращена выпуклостью к оси u. Из условия непрерывности области течения в плоскости xy следует, что интегральная кривая должна выходить из точки N' вдоль прямой $N'N$ и, очевидно, должна продолжаться до тех пор, пока нормаль к кривой, поворачиваясь против часовой стрелки, не пройдет через начало координат. Соответствующая точка N'' дает направление образующей обтекаемого конуса и величину скорости на его поверхности.

Если угол скачка меньше угла волны детонации Чепмена—Жуге, то при увеличении U_N могут представиться два случая в зависимости от значений определяющих параметров.

В первом случае точка N', постепенно смещаясь к точке J, попадет на ось $v = 0$. Отрезок интегральной кривой $N'N''$ при этом постепенно уменьшается и стягивается в точку. Течение между головным коническим скачком уплотнения и поверхностью конуса по-прежнему состоит из двух конических течений сжатия, отделенных фронтом пламени. В пределе, когда точка доходит до оси $v = 0$, направление скорости газа за фронтом пламени совпадет с направлением набегающего потока (угол конуса обращается в нуль), и поток можно рассматривать как сверхзвуковое обтекание точечного поджигающего источника с образованием фронта медленного горения.

Во втором случае при увеличении U_N точка N' доходит до точки J, соответствующей режиму Чепмена — Жуге. Дальнейшее увеличение U_N становится при этом невозможным. Если после установления такого режима уменьшать угол конуса, то это не приведет к изменению течения перед фронтом пламени, а вызовет появление за фронтом пламени конической волны разрежения, замыкаемой скачком уплотнения с последующим течением сжатия, совершенно аналогично тому, что происходило в рассмотренном выше случае течения с волной детонации Чепмена—Жуге.

В пределе, когда угол конуса обращается в нуль, волна сжатия исчезает, а замыкающий волну разрежения скачок вырождается в характеристику, на которой поток направлен вдоль оси симметрии течения. Этот предельный случай вновь можно рассматривать как сверхзвуковое обтекание точечного поджигающего источника с образованием фронта медленного горения Чепмена—Жуге.

Таким образом, в общем случае автомодельное течение около конуса при наличии фронта горения состоит из последовательно расположенных конического головного скачка, волны сжатия, фронта горения, волны разрежения, замыкающего ее скачка уплотнения и второй волны сжатия. Для случая, когда режим горения не будет режимом Чепмена—Жуге, волна разрежения и замыкающий ее скачок уплотнения отсутствуют.

При достаточно больших углах раствора конуса автомодельное течение с присоединенным головным скачком уплотнения становится невозможным. В случае конуса конечных размеров перед ним образуется отсоединенная головная волна.

Интенсивность головного скачка в его наиболее сильной части может быть достаточной для того, чтобы вызвать воспламенение газа непосред-

ственно за скачком, и тогда возникнет обтекание конуса с волной детонации. Если при этом окажется, что наименьшая скорость детонационной волны (скорость волны Чепмена—Жуге) больше скорости набегающего потока, то установившееся обтекание станет невозможным, и волна будет распространяться вверх по потоку.

В случае, если отошедшая ударная волна не превратится в детонационную, можно рассматривать фронт медленного горения в потоке за волной, принимая за источник поджигания любую точку на поверхности тела (или даже внутри потока).

Могут возникнуть и режимы обтекания, когда головная волна в своей наиболее интенсивной части будет детонационной волной, а затем, не вырождаясь в детонацию Чепмена—Жуге, на конечном расстоянии от тела расщепляется на ударную волну и отходящий от ударной волны фронт медленного горения. Как уже упоминалось, такое расщепление рассматривается в работе [9].

Отметим в заключение, что при больших значениях числа Маха набегающего потока, малых углах раствора клина или конуса и не очень больших значениях теплоподвода, т. е. во всех тех случаях, когда головной скачок уплотнения образует малые углы с направлением набегающего потока, рассмотренные задачи об обтекании клина или конуса могут быть приближенно сведены к задачам о расширении с постоянной скоростью плоского или цилиндрического поршня в горючей смеси газов с сгоранием ее в бесконечно-тонких фронтах детонации или медленного горения.

Институт механики МГУ

Поступило 25 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Nicholls J. A., Dabora E. K., Gealer R. L. Studies in Connection with Stabilized Detonation Waves. 7th Symposium on Combustion, London, Butterworth Sci. Pub., 1959.
2. Gross R. A., Chinitz W. A. Study of Supersonic Combustion. J. Aerospace Sci., 1960, vol. 27, 7.
3. A Technique for Studying Supersonic Combustion in the Vicinity of a Hypersonic Missile. Nat. Bur. Standards Techn. News Bull., 1960, vol. 44, 11.
4. Ruegg F. W., Dorsey W. W. Ninth Symposium (Jntern.) on Combustion, General Discussion, p. 476. Acad. Press, N. J., Lond., 1963.
5. Siestrunk R., Fabri J., Le Grives E. Some Properties of Stationary Detonation Waves. 4th Symposium on Combustion, Baltimore, 1953.
6. Rutkowski J., Nicholls J. A. Considerations for the Atteinement of a Standing Detonation Wave. Proc. Gas Dynamics Symp. on Aerothermochemistry, Evanston, Jll., 1956.
7. Квашнина С. С., Черный Г. Г. Установившееся обтекание конуса потоком детонирующего газа. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1
8. Самозванцев М. П. О стабилизации детонационных волн при помощи плохообтекаемых тел. ПМТФ, 1964, № 4.
9. Гилинский С. М., Запрянов З. Д., Черный Г. Г. Сверхзвуковое обтекание сферы горючей смесью газов. Механика жидкости и газа, 1966, № 5.
10. Бам-Зеликович Г. М. Распад произвольного разрыва в горючей смеси. Сб. ст. № 4 «Теоретич. гидромеханика» под ред. Л. И. Седова, Оборонгиз, 1949.
11. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз, 1963.