

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ С ОТОШЕДШЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Э. Г. ШИФРИН (Москва)

В работе получен ряд свойств плоского адиабатического течения идеального газа за отошедшей ударной волной при симметричном обтекании гладкого выпуклого профиля равномерным сверхзвуковым потоком.

Пусть $\psi(x, y)$ — функция тока, $\Phi(x, y)$ — семейство ортогональных траекторий к линиям тока.

Обозначим через K точку звуковой линии, в которой она имеет выпуклость по отношению к линиям $\Phi = \text{const}$. Из результатов работы [1] вытекает существование, по крайней мере, одной точки K , если обтекаемый профиль строго выпуклый и при этом $M_\infty \geq M_0(k)$ (M_∞ — число Маха набегающего потока, $M_0(k)$ — некоторая постоянная, k — показатель адиабаты; $M_0 \approx 1.69$ при $k = 1.4$).

Обозначим через L точку звуковой линии, в которой изменяет знак кривизна линии тока, рассматриваемая как функция длины дуги звуковой линии.

Теорема 1. При перемещении вдоль отрезка звуковой линии, не содержащего точек K и L , угол β наклона вектора скорости к оси симметрии изменяется монотонно. В каждой точке K или L происходит изменение знака производной β по направлению звуковой линии. Если точки K и L совпадают, что имеет место, если в этой точке вихрь равен нулю, то знак производной не изменяется.

Пусть $\partial/\partial s_1$ — производная вдоль линии тока в направлении n_1 возрастания Φ ; пусть $\partial/\partial s_2$ — производная по нормали n_2 к линии тока в направлении возрастания ψ ; пусть $\partial/\partial \sigma$ — производная вдоль звуковой линии γ в направлении, при котором область дозвуковых скоростей остается слева; $\lambda = v/a_*$ — коэффициент скорости; δ — угол между векторами n_1 и γ ; углы β и δ отсчитываются против часовой стрелки.

Из уравнения неразрывности

$$(M^2 - 1) \frac{\partial \ln \lambda}{\partial s_1} = \frac{\partial \beta}{\partial s_2} \quad (1)$$

следует, при условии ограниченности производной $\partial \lambda / \partial s_1$, что

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \beta}{\partial s_1} \cos \delta \quad \text{при } \lambda = 1$$

Это означает, что изменение знака производной $\partial \beta / \partial \sigma$ происходит только в точках L изменения знака кривизны $\partial \beta / \partial s_1$ линии тока или в точках K , в которых угол δ проходит через значение $1/2\pi$. Из уравнения вихря

$$\frac{\partial \beta}{\partial s_1} = \frac{\partial \ln \lambda}{\partial s_2} + \frac{1}{k R M^2} \frac{dS}{ds_2} \quad (2)$$

вытекает, что точка K не совпадает с точкой L , если в этой точке $dS / ds_2 \neq 0$ (S — энтропия).

Следствие 1. Если точки K или L существуют и K не совпадает с L , то звуковую линию в точках K или L пересекает нечетное число линий ветвления (линией ветвления называется край складки, имеющей место при неоднолистном отображении течения в плоскость годографа).

Таким образом, течение в окрестности точки K в вихревом случае имеет качественный другой характер, чем в потенциальном, когда через точку K («центр сопла») проходят две линии ветвления в сверхзвуковую область.

Пусть функция тока $\psi(x, y)$ равна нулю на критической линии тока, состоящей из отрезка оси симметрии и контура профиля. Ввиду симметрии течения существует такое число $\psi_0 > 0$, что при $\psi(x, y) \leq \psi_0$ энтропия является невозрастающей функцией ψ .

Будем называть зоной 3 область сверхзвукового течения, в которой $\psi(x, y) \leq \psi_0$, ограниченную отрезком контура профиля, характеристикой первого семейства и отрезком звуковой линии, в каждой точке которого угол δ является острым.

Из результатов работы [1] вытекает, что при обтекании строго выпуклого профиля зона 3 всегда существует.

Следствие 2. Если передвигаться вдоль отрезка звуковой линии, ограничивающего зону 3, так, чтобы область дозвуковых скоростей лежала слева, то вектор скорости монотонно поворачивается по часовой стрелке (ср. с «законом монотонности» [2]).

Действительно, в зоне 3 $S(\psi)$ — невозрастающая функция, поэтому из уравнения (2) следует, что на рассматриваемом отрезке звуковой линии не существует точек L . Поэтому вдоль всего отрезка, так же как и на контуре профиля, $\partial \beta / \partial s_1 < 0$ и, значит, $\partial \beta / \partial \sigma = \partial \beta / \partial s_1 \cos \delta \leq 0$.

В области монотонности энтропии имеет смысл определение: направление обхода характеристики, вдоль которого энтропия не убывает, называется положительным.

Пусть в плоскости годографа λ, β ось β направлена вертикально вверх, ось λ — горизонтально вправо. Будем называть для краткости эпициклоидой образ в плоскости λ, β характеристики потенциального течения.

Из соотношений вдоль характеристик (под характеристиками имеются в виду только линии Маха)

$$\pm d\beta_{1,2} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\lambda} d\lambda + \frac{\sin 2\alpha}{2Rk} dS, \quad \alpha = \arcsin \left(\frac{1}{M} \right)$$

следует лемма.

Лемма 1. Образ отрезка характеристики, содержащегося в области монотонности энтропии $S(\psi)$ в плоскости λ, β , пересекает эпициклоиду того же семейства не более одного раза; отрезок характеристики первого (второго) семейства, проведенный в положительном направлении от точки пересечения с эпициклоидой того же семейства, расположен не ниже (не выше) этой эпициклоиды.

Теорема 2. В зоне 3 имеют место неравенства $\beta_A \geq \beta_C \geq \beta_B$, где C — точка зоны 3, AC — характеристика второго семейства, BC — характеристика первого семейства, A и B — точки на звуковой линии (фиг. 1).

Действительно, проведем в плоскости λ, β через образ точки C эпициклоиду второго семейства CA_* и эпициклоиду первого семейства CB_* . По лемме 1 имеем следующие неравенства $\beta_A \geq \beta_{A_*} \geq \beta_C$ и $\beta_B \leq \beta_{B_*} \leq \beta_C$.

Отсюда, с учетом теоремы 1, следует, что линия равного β , пересекающая в некоторой точке отрезок звуковой линии, ограничивающий зону 3, расположена между характеристиками, проведенными из этой точки.

Теорема 3. Если перемещаться по звуковой линии, вниз по потоку от которой течение сверхзвуковое, по направлению к звуковой точке F на не ударной волне, то в достаточно малой окрестности этой точки вектор скорости поворачивается по часовой стрелке при $M_\infty < M_0(k)$ и против часовой стрелки при $M_\infty > M_0(k)$.

Из того обстоятельства, что, вниз по потоку от звуковой линии течение сверхзвуковое, следует, что в некоторой окрестности точки F функция $S(\psi)$ — невозрастающая.

При $M_\infty < M_0(k)$ в некоторой окрестности точки F угол δ будет острым [1]. Поэтому

$$\partial \lambda / \partial s_2 < 0, \quad dS / ds_2 \leq 0$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \psi} = \left(\frac{\partial \ln \lambda}{\partial s_2} + \frac{1}{kR} \frac{dS}{ds_2} \right) \cos \delta < 0$$

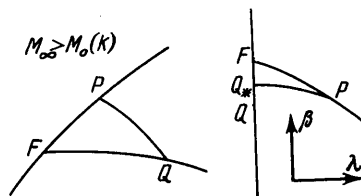
Если $M_\infty > M_0(k)$, то из каждой сверхзвуковой точки P ударной волны, расположенной достаточно близко к точке F , к звуковой линии выходят обе характеристики в положительном направлении. Пусть PQ — характеристика второго семейства (Q — точка на звуковой линии). Ее образ в плоскости λ, β лежит, по лемме 1, не выше эпициклоиды PQ_* второго семейства, проведенной из образа точки P на ударной поляре (Q_* — точка на звуковой линии). Если выбрать точку P достаточно близко к точке F , то отрезок эпициклоиды PQ_* расположен ниже отрезка ударной поляры FP , поскольку при $\lambda = 1$ и $M_\infty \neq \infty$ угол наклона ударной поляры к оси λ отрицательный, а угол наклона эпициклоиды к оси λ равен нулю. Отсюда следует, что $\beta_Q < \beta_F$ (фиг. 2).

Из теоремы 3 вытекает, что при $M_\infty < M_0(k)$ число линий ветвления, пересекающих звуковую линию, равно нулю или четно, а при $M_\infty > M_0(k)$ — нечетно.

Рассмотрим точку K звуковой линии. Если звуковая линия обращена в точке K выпуклостью в сторону сверхзвукового течения по отношению к линиям $\varphi = \text{const}$, то будем называть ее K_+ , если в сторону дозвукового течения, — то K_- : $\lambda / \partial^2 s_2^2 \geq 0$ в точке K_+ , $\partial^2 \lambda / \partial s_2^2 \leq 0$ в точке K_- .

Лемма 2. На звуковой линии имеет место формула

$$\frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial s_1} \right) = \left(\frac{\partial \beta}{\partial s_1} \right)^2 + (k+1) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s_1} \right)^2 \quad (3)$$



Фиг. 2

Действительно, продифференцировав уравнение неразрывности (1) по направле-

нию n_1 при $\lambda = 1$, получим, если производная $\partial^2 \lambda / \partial s_1^2$ ограничена,

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial \beta}{\partial s_2} \right) = (k+1) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s_1} \right)^2$$

Воспользовавшись одним из уравнений Гаусса — Кодацци [3], получим (3).

Продифференцируем теперь уравнение (2) по направлению n_2 в точке K и воспользуемся формулой (3) и уравнением (2), получим

$$\frac{1}{k^2 R^2} \left(\frac{\partial S}{\partial s_2} \right)^2 + (k+1) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s_1} \right)^2 = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s_2^2} + \frac{1}{kR} \frac{d^2 S}{ds^2}$$

Из уравнения неразрывности следует, что

$$ds_2 = h_2 d\psi, \quad h_2 = \frac{1}{q(\lambda)}, \quad q(\lambda) = \lambda \left(\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \lambda^2 \right)^{1/k-1}$$

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Если на звуковой линии существует точка K , то имеют место неравенства

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial s_1} \right)^2 \geq \frac{1}{Rk(k+1)} \frac{d^2 S}{d\psi^2} - \frac{1}{R^2 k^2 (k+1)} \left(\frac{\partial S}{d\psi} \right)^2 \quad \text{в точке } K_+$$

$$\left(\frac{d\lambda}{ds_1} \right)^2 \leq \frac{1}{Rk(k+1)} \frac{d^2 S}{d\psi^2} - \frac{1}{R^2 k^2 (k+1)} \left(\frac{dS}{d\psi} \right)^2 \quad \text{в точке } K_-$$

Рассмотрим теперь точку K_+ . Проведем через нее характеристику K_+A второго семейства по направлению возрастания ψ и характеристику первого семейства K_+B по направлению убывания ψ .

Теорема 5. Если на звуковой линии существует точка K_+ , в которой производная $dS/d\psi$ непрерывна и не обращается в нуль, то, по крайней мере, одна линия ветвления, проходящая через нее в сверхзвуковую область, расположена вниз по течению от линии AK_+B .

Проведем окружность достаточно малого радиуса с центром в точке K_+ . Без ограничения общности можно считать, что внутри окружности $S(\psi)$ — невозрастающая функция (фиг. 3).

Пусть A и B — точки пересечения окружности с характеристиками K_+A и K_+B ; C и D — точки пересечения со звуковой линией; $\psi_C > \psi_D$.

По теореме 1, при перемещении вдоль звуковой линии от точки D к точке K_+ угол β не возрастает, а при перемещении от точки K_+ к точке C — не убывает.

Каждая точка треугольника K_+CA принадлежит характеристике второго семейства, проведенной из отрезка звуковой линии K_+C в отрицательном направлении, поэтому образ треугольника K_+CA в плоскости λ, β расположен, по лемме 1, не ниже эписцилоиды второго семейства, проведенной из образа точки K_+ .

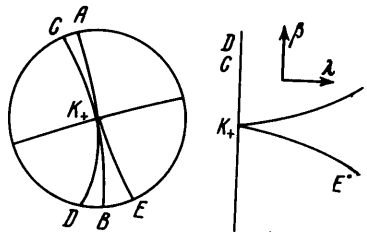
Каждая точка треугольника K_+DB принадлежит характеристике первого семейства, проведенной из отрезка звуковой линии K_+D в положительном направлении, поэтому образ треугольника K_+DB в плоскости λ, β расположен, по лемме 1, не ниже эписцилоиды первого семейства, проведенной из образа точки K_+ .

Проведем через точку K_+ характеристику второго семейства K_+E по направлению убывания ψ ; ее образ в плоскости λ, β расположен не выше эписцилоиды второго семейства, проведенной из образа точки K_+ . Отсюда следует, что линия ветвления, являющаяся частью границы образа области $K_+CAEBDK_+$, расположена не выше эписцилоиды второго семейства, проведенной из образа точки K_+ . Поэтому в плоскости течения эта линия ветвления расположена в области K_+AEBK_+ , т. е. ниже линии AK_+B по течению.

Поступило 1 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
2. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Лагалли М. Векторное исчисление. Гостехиздат, 1936.



Фиг. 3