О ТЕПЛОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ЭЛЕКТРОДЕ

Э. Г. СИНАЙСКИЙ

(Москва)

В настоящей работе рассматривается приближенный расчет распределения температуры в МГД-канале, работающем в ускорительном режиме с учетом зависимости коэффициентов электропроводности и теплопроводности от температуры и с учетом джоулевой диссипации. Если температура плазмы в канале $\sim 10^4$ °K, то число Прандтля оказывается много меньше единицы. Поэтому длина входного динамического участка много больше входного теплового участка, и можно пренебречь поперечной составляющей скорости. Это позволяет решить задачу, не накладывая ограничения на продольную скорость и плотность. Кроме того, при некоторых условиях можно пренебречь членом с градиентом давления по сравнению с джоулевой диссипацией в уравнении переноса тепла, что позволяет отделить тепловую задачу от динамической. В работе исследуется длина входного теплового участка, теплообмен в стенке канала в зависимости от температуры стенки, а также анализируется применимость предложенного метода расчета.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившееся течение в плоском полубесконечном канале $x > 0$, $|y| < y_0$, где стенки $y = y_0 = \text{const}$ — электроды, поддерживаемые при постоянной температуре.

Пусть внешнее электрическое поле направлено перпендикулярно направлению течения и достаточно велико.

Кроме этого, будем считать, что электрический ток имеет одну составляющую, которая считается постоянной и направленной по оси y.

В работе [1] показано, что если электроды поддерживаются при температуре, значительно меньшей температуры в ядре потока, то продольной составляющей электрического тока можно пренебречь, когда сопротивление теплового пограничного слоя меньше сопротивления ядра потока или, что то же, когда падение потенциала в пограничном слое мало по сравнению с падением потенциала в ядре потока. В противном случае при постановке задачи в пограничном слое нужно учитывать продольный ток j_x. При этом задачи в пограничном слое и в ядре потока не разделяются.

Пусть температура на входе в канале $T^*_\infty = 10^4$ °K и давление $P = 1$ атм. В качестве рабочего газа рассматривается литий. Подсчитав число Прандтля из таблицы [2], получим $P \ll 1$. Известно, что отношение длины входного динамического участка к входному тепловому участку по порядку величины равно P. Это позволяет в рассматриваемой задаче пренебречь образованием динамического пограничного слоя, а следовательно, и поперечной составляющей скорости. Если канал имеет постоянную ширину, то это значит, что ρu зависит только от y. Будем считать $\rho u = m = \text{const}$.

Пусть джоулева диссипация в канале по порядку величины равна работе электромагнитной силы в единицу времени (подобное предположение делалось в работе [3]), т. е.

$$j^2\sigma^{-1} \sim c^{-1}jHu \tag{1.1}$$

Это предположение выделяет класс течений, которые будут рассматриваться в дальнейшем. Оно справедливо, в частности, для следующих значений характерных параметров, которые могут быть при работе МГД-канала в ускорительном режиме:

$$j^* = 100\ a\ см^{-2}, \quad \sigma^* = 10^{13}\ сек^{-1}, \quad u^* = 10^5\ см\ сек^{-1}, \quad H^* = 9\cdot 10^3\ гс$$

При таких значениях напряженности внешнего магнитного поля в уравнении движения можно пренебречь градиентом давления по сравнению с электромагнитной силой [4], т. е.

$$\partial p\ /\ \partial x \ll c^{-1} jH \tag{1.2}$$

Это значит в силу (1.1), что

$$\text{и } \partial p\ /\ \partial x \ll j^2 \sigma^{-1} \tag{1.3}$$

В силу этого неравенства в уравнении притока тепла членом с градиентом давления можно пренебречь по сравнению с джоулевой диссипацией. Заметим далее, что в такой постановке задачи вязкая диссипация несущественна, и в канале основной подогрев происходит за счет джоулева тепла.

Таким образом, при принятых предположениях тепловая задача полностью отделяется от динамической.

Аппроксимируя табличные значения коэффициентов электропроводности и теплопроводности для выбранного рабочего тела [2], получим следующие приближенные зависимости этих величин от температуры:

$$\sigma = \begin{cases} \gamma_1 e^{\beta_1 T} & \text{при } 1500^\circ \leqslant T < 2000^\circ \\ \gamma e^{\beta T} & \text{при } 2000^\circ \leqslant T < 3000^\circ \\ \sigma_0 T^{3/2} & \text{при } \qquad T \geqslant 3000^\circ \end{cases} \qquad \lambda = \begin{cases} AT & \text{при } 1500^\circ \leqslant T < 3000^\circ \\ \lambda_0 T^{5/2} & \text{при } \qquad T \geqslant 3000^\circ \end{cases}$$

$\sigma_0 = 1{,}6\cdot 10^7\ сек^{-1}\ град^{-3/2}$, $\gamma_1 = 1660\ сек^{-1}$, $\beta_1 = 0{,}96\cdot 10^{-2}\ град^{-1}$, $\gamma = 4{,}5\cdot 10^9\ сек^{-1}$
$\beta = 2{,}2\cdot 10^{-3}\ град^{-1}$, $\lambda_0 = 3{,}26\cdot 10^{-5}\ эрг\ сек^{-1}\ см^{-1}\ град^{-7/2}$, $A = 3{,}75\ эрг\ сек^{-1}\ см^{-1}\ град^{-}$

Для простоты в дальнейшем c_p считаем постоянным. Это предположение, вообще говоря, несправедливо при $2000 < T < 4000^\circ$, так как в этом интервале температур c_p сильно зависит от температуры. Эту зависимость можно учесть, если вместо температуры рассматривать локальную энтальпию $di = c_p\,dT$. В этом случае в правой части уравнения притока тепла в член, характеризующий теплопроводность, войдет отношение λ / c_p, и нужно будет аппроксимировать его как функцию температуры.

2. Решение задачи. (а) Пусть температура стенки больше 3000°. В этом случае, разбивая поток на ядро и пограничный слой толщиной δy_0, имеем следующие уравнения и граничные условия:

в ядре потока

$$mc_p \frac{dT_\infty}{dx} = \frac{j^2}{\sigma}, \qquad T_\infty = T_\infty{}^* \quad \text{при } x = 0 \tag{2.1}$$

в пограничном слое

$$mc_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{j^2}{\sigma} \quad (\sigma = \sigma_0 T^{3/2},\ \lambda = \lambda_0 T^{5/2}) \tag{2.2}$$

$$T = T_w \quad \text{при } y = y_0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = y_0(1-\delta); \quad T = T_\infty{}^* \text{ при } x = 0$$

Переходя к безразмерным переменным по формулам:

$$\xi = \frac{\lambda_0 (T_\infty{}^*)^{5/2}}{mc_p y_0{}^2} x, \quad \eta = \frac{y}{y_0}, \quad \theta = \frac{T}{T_\infty}, \quad \theta_\infty = \frac{T_\infty}{T_\infty{}^*}, \quad \theta_w = \frac{T_w}{T_\infty}$$

$$\theta_w{}^* = \frac{T_w}{T_\infty{}^*}, \quad \left(\theta_w = \frac{\theta_w{}^*}{\theta_\infty}\right)$$

вместо (2.1) и (2.2) получим:

$$\frac{d\theta_\infty}{d\xi} = \frac{\alpha}{\theta_\infty^{3/2}}, \quad \theta_\infty = 1 \quad \text{при } \xi = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{j^2 y_0^2}{\lambda_0 \sigma_0 (T_\infty^*)^5}\right) \tag{2.3}$$

$$\theta \frac{d\theta_\infty}{d\xi} + \theta_\infty \frac{\partial\theta}{\partial\xi} = \theta_\infty^{7/2} \frac{\partial}{\partial\eta} \theta^{5/2} \frac{\partial\theta}{\partial\eta} + \frac{\alpha}{(\theta_\infty \theta)^{3/2}} \tag{2.4}$$

$$\theta = \theta_w(\xi) \text{ при } \eta = 1, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0 \text{ при } \eta = 1 - \delta, \quad \theta = 1 \text{ при } \xi = 0$$

Уравнение (2.3) легко интегрируется

$$\theta_\infty(\xi) = (2.5\alpha\xi + 1)^{2/5} \tag{2.5}$$

Подставив θ_∞ в (2.4), получим уравнение для определения θ

$$\alpha\theta + (2.5\alpha\xi + 1)\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = (2.5\alpha\xi + 1)^2 \frac{\partial}{\partial\eta} \theta^{5/2} \frac{\partial\theta}{\partial\eta} + \frac{\alpha}{\theta^{3/2}} \tag{2.6}$$

Будем решать задачу методом интегральных соотношений, известным из теории пограничного слоя как метод Кармана—Польгаузена. Зададим профиль температуры в виде

$$\theta(\xi, \eta) = 1 - (1 - \theta_w)[1 - (1 - \eta)/\delta]^2 \tag{2.7}$$

удовлетворяющий условиям

$$\eta = 1 - \delta, \ \partial\theta/\partial\eta = 0, \ \theta = 1; \ \eta = 1, \ \theta = \theta_w$$

Профиль (2.7) для температуры естественно принять в данной задаче, так как динамический пограничный слой много тоньше теплового. В связи с отсутствием поперечной составляющей скорости профиль температуры в этом случае, по-видимому, будет монотонным. Если же толщина динамического пограничного слоя сравнима или больше толщины теплового слоя, то профиль температуры может носить немонотонный характер [5].

В качестве интегрального соотношения берется уравнение (2.4), проинтегрированное по η в пределах от $1 - \delta$ до 1

$$\alpha \int_{1-\delta}^{1} \theta\, d\eta + (2.5\alpha\xi + 1) \int_{1-\delta}^{1} \frac{\partial\theta}{\partial\xi} d\eta = (2.5\alpha\xi + 1)^2 \left(\theta^{5/2} \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_{\eta=1} + \alpha \int_{1-\delta}^{1} \frac{d\eta}{\theta^{3/2}} \tag{2.8}$$

При выводе учтено граничное условие $\partial\theta/\partial\eta = 0$ при $\eta = 1 - \delta$. С учетом (2.7) можно вычислить интегралы, входящие в (2.8), и получить уравнение для δ:

$$\frac{(2.5\alpha\xi + 1)}{3}\left(\frac{\theta_w^*}{\theta_\infty} - 1\right)\delta' + \frac{\alpha}{3}\left(2 + \frac{\theta_w^*}{\theta_\infty}\right)\delta =$$

$$= -(2.5\alpha\xi + 1)^2 \left(\frac{\theta w}{\theta_\infty}\right)^{5/2} \frac{2(1 - \theta_w^*/\theta_\infty)}{\delta} + \alpha\left(\frac{\theta_\infty}{\theta_w^*}\right)^{1/2}\delta \tag{2.9}$$

решение которого легко найти, если ввести новую независимую переменную $\tau = \sqrt{\theta_w}$:

$$\delta^2(\tau) = \frac{24}{\alpha}(\theta_w^*)^{5/2} \frac{(\tau + \sqrt{\theta_w^*})^{12}}{\tau^4} \int_1^\tau e^{a(x-\tau)} \frac{x^8}{(x + \sqrt{\theta_w^*})^{12}} dx, \quad a = 12/(\theta_w^*)^{1/2} \tag{2.10}$$

(б) Теперь рассмотрим ту же задачу, когда температура стенки заключена в интервале $0.2 \leqslant \theta_w^* < 0.3$. В этом случае пограничный слой содержит два подслоя с различными зависимостями $\sigma(\theta)$ и $\lambda(\theta)$; первый подслой, в котором температура падает от значения температуры в ядре потока до 0,3; второй подслой толщиной δ_1, в котором температура падает от 0,3 до температуры стенки.

Задавая профиль температуры в пограничном слое в виде (2.7), легко найти толщину подслоя δ_1

$$\frac{\delta_1}{\delta} = 1 - \left(\frac{\theta_\infty - 0,3}{\theta_\infty - \theta_w^*}\right)^{1/2} \tag{2.11}$$

В ядре потока картина течения не меняется. В пограничном слое распределение температуры определяется из следующего уравнения:

$$\frac{\partial\theta\theta_\infty}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\lambda\frac{\partial\theta\theta_\infty}{\partial\eta}\right) + \frac{\alpha}{\sigma};\quad \lambda \equiv \frac{\lambda}{\lambda_\infty^*},\quad \sigma \equiv \frac{\sigma}{\sigma_\infty^*},\quad \lambda_\infty^* = \lambda_0 (T_\infty^*)^{5/2}$$

$$\sigma_\infty^* = \sigma_0 (T_\infty^*)^{3/2} \tag{2.12}$$

Зависимости $\lambda(\theta)$ и $\sigma(\theta)$ в подслое толщиной δ_1 имеют вид:

$$\lambda = \varepsilon\theta\theta_\infty,\quad \sigma = \mu e^{\nu\theta\theta_\infty},\quad \varepsilon = 0.11,\quad \mu = 2.8\cdot 10^{-4},\quad \nu = 22$$

Граничные условия для уравнения (2.12) те же, что и для (2.4).

Интегрируя (2.12) по η в пределах от $1 - \delta$ до 1, разбивая интеграл в последнем члене правой части на два и вводя вместо ξ новую переменную $\zeta = \theta_\infty(\xi)$, получим

$$\delta' + \delta\Phi(\zeta, \theta_w^*) - \delta^{-1}\Psi(\zeta, \theta\,^*) = 0,\quad \delta = 0 \text{ при } \xi = 1$$

$$\Phi(\zeta, \theta_w^*) = \Phi_1 + \frac{3\sqrt{\zeta}}{(1 - \theta_w^*/\zeta)^{3/2}}(\Phi_1 + \Phi_2),\quad \Phi_1 = -\frac{2 + \theta_w^*/\zeta}{(1 - \theta_w^*/\zeta)\zeta} \tag{2.13}$$

$$\Phi_2 = \frac{(3.34\zeta - 1)^{1/2}}{\zeta^{3/2}},\quad \Phi_3 = \frac{1}{\mu}\int_b^c e^{-\nu\zeta(1-x^2)}dx,\quad b = \left(1 - \frac{0.3}{\zeta}\right)^{1/2},\quad c = \left(1 - \frac{\theta_w^*}{\zeta}\right)^{1/2}$$

(в) Пусть теперь температура стенки находится в интервале $0,15 \leqslant \theta_w^* < 0,2$. В этом случае пограничный слой разбиваем на три подслоя, в каждом из которых будет своя зависимость $\sigma(\theta)$: первый слой, в котором температура падает от 1 при $\eta = 1 - \delta$ до 0,3 при $\eta = 1 - \delta_1$, второй подслой, в котором температура падает от 0,3 до 0,2 при $\eta = 1 - \delta_2$, и третий подслой, в котором температура падает от 0,2 до температуры стенки. При этом δ_1 определяется из (2.11), а δ_2 равно

$$\frac{\delta_2}{\delta} = 1 - \left(\frac{\theta_\infty - 0,2}{\theta_\infty - \theta_w^*}\right)^{1/2} \tag{2.14}$$

Поступая так же, как в пункте (б), разбивая соответствующий интеграл на три части по соответствующим слоям, получим уравнение для определения δ

$$,\ \theta_w^*) - \delta^{-1}\Psi(\zeta, \theta_w^*) = 0,\quad \delta = 0 \quad \text{при } \xi = 1$$

$$F(\zeta, \theta_w^*) = F_1 + \frac{3\sqrt{\zeta}}{(1 - \theta_w^*/\zeta)^{3/2}}(\Phi_2 + \Phi_4 + \Phi_5),\quad \Phi_4 = \frac{1}{\mu}\int_b^d e^{-\nu\zeta(1-x^2)}dx,$$

$$\Phi_5\ \frac{1}{\mu_1}\int_d^c e^{-\nu_1\zeta(1-x^2)}dx,\quad d = (1 - 0,2/\zeta)^{1/2},\quad \mu_1 = 10^{-10},\quad \nu_1 = 96 \tag{2.15}$$

Теплоотвод в стенку можно охарактеризовать величиной, равной отношению суммарного тепла, отведенного через стенки канала к джоулеву теплу, выделяющемуся в канале

$$\chi = q_1 / q_2 \tag{2.16}$$

Здесь

$$q_1 = \frac{2}{mc_p y_0 T_\infty^*} \int_0^L \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=y_0} dx, \qquad q_2 = \frac{2}{mc_p y_0 T_\infty^*} \int_0^L \int_0^{y_0} \frac{j^2}{\sigma} dx\, dy$$

Переходя к безразмерным переменным, получим

$$\chi = \frac{4}{\alpha} (\theta_w^*)^{5/2} \frac{f_1(\tau_1, \theta_w^*)}{f_2(\tau_1, \theta_w^*)}, \qquad \theta_w^* \geqslant 0.3 \tag{2.17}$$

$$f_1(\tau_1, \theta_w^*) = \int_1^{\tau_1} \frac{\tau^4(\tau^2 - \theta_w^*)}{\delta(\tau)} d\tau$$

$$f_2(\tau_1, \theta_w^*) = \tau_1^2 - 1 + \frac{2}{\sqrt{\theta_w^*}} \int_1^{\tau_1} \delta(\tau)\, \tau(\tau - \sqrt{\theta_w^*})\, d\tau$$

$$\chi = \frac{4\varepsilon\theta_w^*}{\alpha} \frac{f_1(\tau_1, \theta_w^*)}{f_3(\tau_1, \theta_w^*)}, \qquad 0.2 \leqslant \theta_w^* < 0.3 \tag{2.18}$$

$$f_3(\tau_1, \theta_w^*) = \tau_1^2 - 1 + 2\int_1^{\tau_1} \frac{\tau\delta(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \theta_w^*}} (\tau\sqrt{3.34\tau^2 - 1} + \tau^4\Phi_3 - 1)\, d\tau$$

$$\chi = \frac{4\varepsilon\theta_w^*}{\alpha} \frac{f_1(\tau_1, \theta_w^*)}{f_4(\tau_1, \theta_w^*)}, \qquad 0.15 \leqslant \theta_w^* < 0.2$$

$$f_4(\tau_1, \theta_w^*) = \tau_1^2 - 1 + 2\int_1^{\tau_1} \frac{\tau\delta(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \theta_w^*}} [\tau\sqrt{3.34\tau^2 - 1} + \tau^4(\Phi_4 + \Phi_5) - 1]\, d\tau \tag{2.19}$$

τ_1 — безразмерная координата, соответствующая концу канала.

В качестве примера рассматривалось течение в канале при следующих значениях характерных параметров: $y_0 = 2$ *см*, $L = 50$ *см*, $T^*_\infty = 10^4\,°$K, $p = 1$ атм, $j^* = 100$ а *см*$^{-2}$, $u^* = 10^5$ *см сек*$^{-1}$, $H^* = 9 \cdot 10^3$ *гс*, $\rho^* u^* = 10^{-2}$ *г см*$^{-2}$.

При этом $\alpha = 6{,}9$, $\tau_1 = 1.3$.

Из (2.10), (2.13), (2.15) находились зависимости $\delta(\tau, \theta w^*)$ и длина входного теплового участка τ^*, а из (2.17), (2.18) и (2.19) определялись соответствующие значения χ.

Приводим некоторые результаты вычислений на ЭВЦМ «Наири»:

$\theta_w^* =$	1	0.7	0.5	0.4	0.3	0.2	0.15
$\tau^* =$	1.03	1.1	1.4	2.2	3	10.5	23.5
$\chi =$	—	—	—	0.2	0.18	0.19	0.5

Отсюда видно, что при $\theta w^* \geqslant 0{,}5$ длина входного теплового участка больше длины канала. Если джоулеву диссипацию не учитывать, то при $\theta w^* = 1$ входной тепловой участок отсутствует, а при $0.15 \leqslant \theta w^* < 1$ он меньше длины канала.

В интервале температур $0{,}2 < \theta w^* < 0{,}4$ χ изменяется слабо, но при уменьшении температуры от 0,2 до 0,15 резко растет. Объясняется это тем, что тепловой поток на стенку и джоулево тепло остаются практически постоянными при $0{,}2 < \theta w^* < 0{,}4$. При уменьшении же температуры стенки от 0,2 до 0,15 тепловой поток на стенку растет быстрее, чем джоулево тепло.

3. В начале работы было сделано предположение, что $j_x \ll j_y$. Для того чтобы проверить, не противоречат ли полученные результаты этому предположению, найдем отношение падения потенциала в пограничном

слое к падению потенциала в ядре потока

$$r = \Delta\varphi_1 / \Delta\varphi_2 \tag{3.1}$$

Здесь

$$\Delta\varphi_1 \equiv \frac{\Delta\varphi_1}{(j^* y_0 \sigma_\infty^*)} = \int\limits_{1-\delta}^{1} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_\infty}\right) d\eta, \qquad \Delta\varphi_2 \equiv \frac{\Delta\varphi_2}{j^* y_0 \sigma_\infty^*} = \frac{2(1-\delta)}{\tau^3} \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1) и производя интегрирование, получим следующие зависимости $r(\tau)$ для различных температур стенки:

$$r = \frac{\delta(\tau)(\tau^4 - \sqrt{\theta_w^*})}{(1-\delta)\sqrt{\theta_w^*}} \qquad (\theta_w^* \geqslant 0.3)$$

$$r = \frac{\delta\tau^4}{(1-\delta)\sqrt{\tau^2 - \theta_w^*}} \left(\frac{\sqrt{3.34\tau^2 - 1} - 1}{\tau^3} + \Phi_3\right) \qquad (0.2 \leqslant \theta_w^* < 0{,}3)$$

$$r = \frac{\delta\tau^4}{(1-\delta)\sqrt{\tau^2 - \theta_w^*)}} \left(\frac{\sqrt{3{,}34\tau^2 - 1} - 1}{\tau^3} + \Phi_4 + \Phi_5\right) \qquad (0.15 \leqslant \theta_w^* < 0.2)$$

Значения $r(\tau, \theta_w^*)$ для выбранных значений параметров представлены в таблице.

Из таблицы видно, что при уменьшении θw^* от 0.4 до 0.2 r уменьшается для одних и тех же значений τ, а при дальнейшем уменьшении θw^* до 0.15 резко растет. Это объясняется сильным падением электропроводности возле стенки и, тем самым — резким увеличением сопротивления пограничного слоя.

τ	$\theta_w^*=0.4$	0.3	0.2	0.15
1.1	0.22	0.18	0.08	0.4
1.2	0.7	0.41	0.13	0.85
1.3	>1	0.94	0.2	>1

Таким образом, для $\theta w^* = 0.2$ предположение имеет смысл. Для остальных температур это предположение имеет смысл на небольшом расстоянии от входа в канал (до $\tau \approx 1.1$), а в остальной части канала нужно, по-видимому, учитывать j_x при постановке задачи, в пограничном слое. Чтобы и при этих температурах можно было пренебречь x во всем канале, нужно увеличить ширину канала, что приведет к уменьшению r.

В заключение заметим, что при прочих равных условиях входной тепловой участок уменьшается с уменьшением температуры на входе и при уменьшении расхода.

Поступило 10 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Г. А. О вязком пограничном слое на электроде при переменной электропроводности среды. ПММ, 1964, т. 5.
2. Греков А. И., Москвин Ю. В., Романычев В. С., Фаворский О. Н. Основные свойства некоторых газов при высоких температурах. Справочник. Изд. «Машиностроение», 1964.
3. Ватажин А. Б. О нагреве среды в результате джоулевой диссипации энергии. ПМТФ, 1965, № 5.
4. Бам-Зеликович Г. М. Одномерное неустановившееся движение проводящего газа под действием сильных электромагнитных полей. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 2.
5. Kerrebrock Y. L. Electrode Boundery Layens in Direct—Current Plasma Accelerators. J. Aero-Space, 1961, vol. 28, No 8.