ИЗЛУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

П. И. ЦОЙ

(Тула)

Теория излучения и распространения звуковых волн в идеальной среде от поверхности цилиндра подробно изложена в работах [1-4]. В данной работе рассматривается теория излучения цилиндра в вязкой среде.

§ 1. Постановка задачи и ее решение. Известно из [5], что уравнения потенциала скоростей φ и векторного потенциала вихрей Φ имеют следующий вид:

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \qquad \Delta\Phi + k_2^2\Phi = 0 \tag{1.1}$$

Здесь

$$k_1^2 = \frac{\sigma^2 [1 + \sigma c^{-2} (\nu' + {}^4/_3\,\nu)\, i]}{c^2 [1 + \sigma^2 c^{-4} (\nu' + {}^4/_3\,\nu)^2]}, \qquad k_2^2 = \frac{\sigma}{\nu}\, i \tag{1.2}$$

$$k_1 = k_1' + ik_1'', \qquad k_2 = k_2' + ik_2''$$

$$k_1' = \frac{\sigma}{c\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon+1}{2}\right)^{1/2}, \quad k_1'' = \frac{\sigma}{c\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon-1}{2}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \left[1 + \frac{\sigma^2}{c^4}(\nu' + {}^4/_3\,\nu)^2\right]$$
$$k_2' = k_2'' = \left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

Здесь c — скорость звука, σ — круговая частота, ν' и ν — кинематические коэффициенты вязкости.

Гидродинамические элементы: скорость, сжатие и давление будут равны

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\Phi, \qquad s = -\frac{i}{\sigma}\Delta\varphi, \qquad p = p_0 + i\rho_0\sigma\varphi + \rho_0(\nu' + {}^4/_3\,\nu)\Delta\varphi \tag{1.4}$$

Здесь p_0 и ρ_0 — давление и плотность среды в невозмущенном состоянии.

Предположим, что цилиндр радиуса a с произвольным распределением скоростей на его поверхности является источником распространения звуковых волн в неограниченной вязкой среде, причем скорость точки на его поверхности задана в виде

$$v_r = V_n \cos n\theta \exp(-\sigma t i), \qquad v_\theta = 0, \qquad v_z = 0 \tag{1.5}$$

Здесь r, θ, z — цилиндрические координаты, V_n — постоянная величина, а $n = 0, 1, 2\ldots$

В силу симметрии функции φ и Φ не будут зависеть от z, т. е.

$$\varphi = \varphi(r, \theta), \qquad \Phi = \Phi(r, \theta)\, \mathbf{i}_3 \tag{1.6}$$

При этом в такой форме записи второе уравнение из (1.1) не меняется. Условия (1.5) с учетом временного множителя $e^{-\sigma t i}$ примут вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}\right)_{r=a} = V_n \cos n\theta, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} - \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \tag{1.7}$$

Тогда общее решение уравнений (1.1) на основании (1.7) с учетом временного множителя $e^{-\sigma t i}$ имеет вид

$$\varphi = \frac{k_2 V_n H_n'(k_2 a) H_n(k_1 r)\cos n\theta}{k_1 k_2 H_n'(k_1 a) H_n'(k_2 a) - a^{-2} n^2 H_n(k_1 a) H_n(k_2 a)} e^{-\sigma t i} \tag{1.8}$$

$$\Phi = -\frac{a^{-1} n V_n H_n(k_1 a) H_n(k_2 r)\sin n\theta}{k_1 k_2 H_n'(k_1 a) H_n'(k_2 a) - a^{-2} n^2 H_n(k_1 a) H_n(k_2 a)} e^{-\sigma t i}, \quad H_n'(u) = \frac{d}{du} H_n(u) \tag{1.9}$$

Далее, из (1.8), (1.9) и (1.4) для давления и скорости частицы получим

$$p = p_0 + \frac{\rho_0 k_2 V_n H_n'(k_2 a)\{\sigma i - (\nu' + {}^4/_3\,\nu) k_1^2\}}{k_1 k_2 H_n'(k_1 a) H_n'(k_2 a) - a^{-2} n^2 H_n(k_1 a) H_n(k_2 a)} H_n(k_1 r)\cos n\theta e^{-\sigma t i}$$

$$v_r = \frac{k_1 k_2 H_n'(k_2 a) H_n'(k_1 r) - a^{-2} n^2 H_n(k_1 a) H_n(k_2 r)}{k_1 k_2 H_n'(k_1 a) H_n'(k_2 a) - a^{-2} n^2 H_n(k_1 a) H_n(k_2 a)} V_n \cos n\theta\, e^{-\sigma t i} \tag{1.10}$$

$$v_\theta = -\frac{n k_2 V_n \{r^{-1} H_n'(k_2 a) H_n(k_1 r) - a^{-1} H_n(k_1 a) H_n'(k_2 r)\}}{k_1 k_2 H_n'(k_1 a) H_n'(k_2 a) - a^{-2} n^2 H_n(k_1 a) H_n(k_2 a)} \sin n\theta\, e^{-\sigma t i}$$

Результирующая сила реакции на единицу длины цилиндра в направлении оси x равна

$$R = a \int_0^{2\pi} p\,|_{r=a} \cos\theta d\theta, \quad R = 0 \quad (n \neq 1)$$

$$R = \frac{\pi \rho_0 a k_2 V_1 \{\sigma i - (\nu' + {}^4/_3\,\nu) k_1^2\} H_1'(k_2 a) H_1(k_1 a)}{k_1 k_2 H_1'(k_1 a) H_1'(k_2 a) - a^{-2} H_1(k_1 a) H_1(k_2 a)} e^{-\sigma t i} \quad (n = 1) \tag{1.11}$$

§ 2. **Равномерное излучение цилиндра.** Пусть цилиндр пульсирует, т. е. расширяется и сжимается равномерно так, что скорость на его поверхности равна

$$v_r = V_0\, e^{-\sigma t i}, \quad v_\theta = 0$$

В этом случае, положив $n = 0$ в (1.8)—(1.11) и взяв действительные части, получим решение в виде

$$\varphi = -V_0 \operatorname{Re}\left[\frac{H_0(k_1 r)}{k_1 H_1(k_1 a)} e^{-\sigma t i}\right], \quad \Phi = 0$$

$$p = p_0 - \rho_0 V_0 \operatorname{Re}\left[\frac{\sigma i - (\nu' + {}^4/_3\,\nu) k_1^2}{k_1 H_1(k_1 a)} H_0(k_1 r) e^{-\sigma t i}\right] \tag{2.1}$$

$$v_r = V_0 \operatorname{Re}\left[\frac{H_1(k_1 r)}{H_1(k_1 a)} e^{-\sigma t i}\right], \quad v_\theta = 0, \quad R = 0$$

Из $\Phi = 0$ следует, что звуковое поле является потенциальным, т. е. вязкость среды не влияет на звуковое поле скоростей. Из $v_\theta = 0$ вытекает, что скорость частицы направлена по нормали к поверхности цилиндра, а из $R = 0$ — на цилиндр не действует сила сопротивления среды.

При выводе формул (2.1) была использована известная зависимость из теории бесселевых функций [6]

$$H_0'(u) = -H_1(u)$$

В дальнейшем будем использовать асимптотические формулы

$$H_n(u) \sim \left(\frac{2}{\pi u}\right)^{1/2} \exp\left\{i\left(u - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad \text{при } n \ll u$$

$$H_0(u) \sim i\,\frac{2}{\pi}\ln u, \quad H_n(u) \sim -i\left(\frac{2}{u}\right)^n \frac{\Gamma(n)}{\pi} \quad (n > 0) \quad \text{при } u \to 0 \tag{2.2}$$

где $\Gamma(n)$ — гамма-функция.

Далее, на больших расстояниях r от цилиндра давление и скорость частицы на основании (2.2) будут равны

$$p = p_0 - \rho_0 V_0 \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} \exp(-k_1'' r) \operatorname{Re} \frac{\{\sigma i - (\nu' + {}^4/_3 \nu) k_1^2\} \exp\{i(k_1' r - \sigma t - {}^1/_4 \pi)\}}{k_1 \sqrt{k_1} H_1(k_1 a)}$$
$$v_r = V_0 \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} \exp(-k_1'' r) \operatorname{Re} \frac{\exp\{i(k_1' r - \sigma t - {}^3/_4 \pi)\}}{\sqrt{k_1} H_1(k_1 a)} \qquad (2.3)$$

Предположим, что радиус a мал по сравнению с длиной волны, т. е. $|k_1 a|$ — безразмерная малая величина. Тогда получим для давления и скорости частицы следующие приближения:

$$p = p_0 + {}^1/_2 \pi \rho_0 a V_0 \operatorname{Re} [\{\sigma + (\nu' + {}^4/_3 \nu) k_1^2 i\} H_0(k_1 r) e^{-\sigma t i}] \qquad (2.4)$$
$$v_r = {}^1/_2 \pi a V_0 \operatorname{Re} [k_1 H_1(k_1 r) \exp\{i({}^1/_2 \pi - \sigma t)\}]$$

На больших расстояниях r от поверхности цилиндра (при $r \to \infty$) давление и скорость будут равны

$$p = p_0 + \rho_0 a V_0 \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{1/2} \exp(-k_1'' r) \operatorname{Re} \left[\frac{\sigma + (\nu' + {}^4/_3 \nu) k_1^2 i}{\sqrt{k_1}} \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left\{i\left(k_1' r - \sigma t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\right] \qquad (2.5)$$
$$v_r = a V_0 \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{1/2} \exp(-k_1'' r) \operatorname{Re} \left[\sqrt{k_1} \exp\left\{i\left(k_1' r - \sigma t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]$$

Рассмотрим случай малой вязкости, т. е. когда ν' и ν — малые величины. Пренебрегая членами высших порядков малости (начиная со второго), можно написать для k_1' и k_1'' следующие приближения:

$$k_1' = \frac{\sigma}{c}, \qquad k_1'' = \frac{\sigma^2}{2c^3}\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu\right)$$

В этом случае вместо (2.5) получим

$$p = p_0 + \rho_0 a V_0 \left(\frac{\pi \sigma c}{2r}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2c^3}\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu\right) r\right\} \cos\left(\frac{\sigma}{c} r - \sigma t - \frac{\pi}{4} + \varepsilon'\right)$$
$$v_r = a V_0 \left(\frac{\pi \sigma}{2cr}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2c^3}\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu\right) r\right\} \cos\left(\frac{\sigma}{c} r - \sigma t - \frac{\pi}{4} + \varepsilon''\right) \qquad (2.6)$$
$$\operatorname{tg} \varepsilon' \approx \sin \varepsilon' = \sigma c^{-2} (\nu' + {}^4/_3 \nu), \quad \operatorname{tg} \varepsilon'' \approx \sin \varepsilon'' = {}^1/_4 \sigma c^{-2} (\nu' + {}^4/_3 \nu)$$

Из этих выражений явствует, что давление и скорость частицы на больших расстояниях r от цилиндра изменяются по законам затухающих колебаний, причем амплитуда этих колебаний быстро уменьшается с увеличением расстояния r от цилиндра по закону

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2c^2}\left(\nu' + \frac{4\nu}{3}\right) r\right\}$$

Чтобы найти интенсивность, определим поток энергии в *сек/см*^{2} в направлении радиуса r; он равен произведению действительных частей $p - p_0$ и v_r; средняя величина

$$J = \frac{1}{4} \pi \rho_0 \frac{a^2 \sigma}{r} V_0^2 \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{c^3}\left(\nu' + \frac{4\nu}{3}\right) r\right\} \qquad (2.7)$$

выражает интенсивность звука на расстоянии r от оси пульсирующего цилиндра. Полная мощность, излучаемая сантиметром длины колеблющегося цилиндра, будет равняться

$$\Pi = {}^1/_2 \pi^2 \rho_0 a^2 \sigma V_0^2 \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{c}\left(\nu' + \frac{4\nu}{3}\right) r\right\} \qquad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что количество звуковой энергии в вязкой среде, излучаемой пульсирующим цилиндром, быстро уменьшается по мере увеличения расстояния r от поверхности цилиндра. Если не учитывать вязкости ($\nu' = 0$, $\nu = 0$), то получим [3]

$$J = {}^1/_4\pi\rho_0 a^2\sigma r^{-1}V_0^2, \qquad \Pi = {}^1/_2\pi^2\rho_0 a^2\sigma V_0^2 \tag{2.9}$$

Отсюда

$$\frac{J}{J_{\nu'=\nu=0}} = \frac{\Pi}{\Pi_{\nu'=\nu=0}} = \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{c^2}\left(\nu' + \frac{4\nu}{3}\right)r\right\} \tag{2.10}$$

Из этих выражений явствует, что на больших расстояниях r от оси пульсирующего цилиндра учет вязкости среды будет иметь существенное значение для нахождения интенсивности и полной излучаемой мощности.

§ 3. Излучение пульсирующего цилиндра (проволоки). Пусть цилиндр радиуса a колеблется взад и вперед в направлении, перпендикулярном к его оси z, т. е. в направлении оси x со скоростью $V_0e^{-\sigma ti}$. Тогда скорость узкой полоски на поверхности цилиндра, лежащего под углом θ к плоскости xz, имеет нормальную проекцию $V_0 \cos\theta e^{-\sigma ti}$. В этом случае, положив $n = 1$, $V_1 = V_0$ в (1.8)—(1.11) и взяв действительные части, получим решение данной задачи в виде

$$\begin{gathered}
\varphi = a^2V_0\cos\theta\,\mathrm{Re}\,\frac{k_2H_1'(k_2a)\,H_1(k_1r)\exp(-\sigma ti)}{a^2k_1k_2H_1'(k_1a)\,H_1'(k_2a) - H_1(k_1a)\,H_1(k_2a)} \\
\Phi = -aV_0\sin\theta\,\mathrm{Re}\,\frac{H_1(k_1a)\,H_1(k_2r)\exp(-\sigma ti)}{a^2k_1k_2H_1'(k_1a)\,H_1'(k_2a) - H_1(k_1a)\,H_1(k_2a)} \\
p = p_0 + \rho_0a^2V_0\cos\theta\,\mathrm{Re}\,\frac{k_2\{\sigma i - (\nu' + {}^4/_3\,\nu)\,k_1^2\}\,H_1'(k_2a)\,H_1(k_1r)\exp(-\sigma ti)}{a^2k_1k_2H_1'(k_1a)\,H_1'(k_2a) - H_1(k_1a)\,H_1(k_2a)} \\
v_r = \frac{a}{r}V_0\cos\theta\,\mathrm{Re}\left[\frac{ark_1k_2H_1'(k_2a)\,H_1'(k_1r) - H_1(k_1a)\,H_1(k_2r)}{a^2k_1k_2H_1'(k_1a)\,H_1(k_1a) - H_1(k_1a)\,H_1(k_2a)}\exp(-\sigma ti)\right] \\
v_\theta = -\frac{a}{r}V_0\sin\theta\,\mathrm{Re}\left[\frac{k_2aH_1'(k_2a)\,H_1(k_1r) - k_1rH_1(k_1a)\,H_1'(k_2r)}{a^2k_1k_2H_1'(k_1a)\,H_1'(k_2a) - H_1(k_1a)\,H_1(k_2a)}\exp(-\sigma ti)\right] \\
R = \pi a^3\rho_0V_0\,\mathrm{Re}\,\frac{k_2\{\sigma i - (\nu' + {}^4/_3\,\nu)\,k_1^2\}\,H_1'(k_2a)\,H_1(k_1a)\exp(-\sigma ti)}{a^2k_1k_2H_1'(k_1a)\,H_1'(k_2a) - H_1(k_1a)\,H_1(k_2a)}
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Рассмотрим случай малой вязкости, т. е. когда ν' и ν — малые величины. Тогда k_2' и k_2'' будут весьма большими. Чтобы выяснить асимптотические формулы для (3.1) в дальнейшем будем предполагать, что a — конечная величина. В этом случае $|k_2a|$ — безразмерная большая величина порядка k_2' или k_2''. Применяя асимптотическую формулу (2.2) к функции $H_1(k_2a)$ в (3.1), после несложного преобразования получим

$$\begin{gathered}
p = p_0 + \rho_0cV_0\cos\theta\,\mathrm{Re}\left[\frac{H_1(k_1r)}{H_1'(k_1a)}\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} - \sigma t + \varepsilon_1\right)\right\}\right] \\
v_r = V_0\cos\theta\left\{\mathrm{Re}\frac{H_1'(k_1r)\exp(-i\sigma t)}{H_1'(k_1a)} + \frac{c\sqrt{\nu}}{\sigma r\sqrt{a\sigma r}}\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}(r-a)\right]\times\right. \\
\left.\times\,\mathrm{Re}\left[\frac{H_1(k_1a)}{H_1'(k_1a)}\exp\left\{i\left[\left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}(r-a) - \sigma t + \frac{\pi}{4}\right]\right\}\right]\right\}
\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$v_\theta = -V_0\sin\theta\left[\frac{c}{\sigma r}\,\mathrm{Re}\frac{H_1(k_1r)\exp\{-i(\sigma t + \varepsilon_1)\}}{H_1'(k_1a)} - \right.$$

$$\left. - \frac{c}{\sigma\sqrt{ar}}\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}(r-a)\right]\mathrm{Re}\left\{\frac{H_1(k_1a)}{H_1'(k_1a)}\exp\left[i\left\{\left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}(r-a) - \sigma t - \varepsilon_1\right\}\right]\right\}\right]$$

$$R = \pi ac\rho_0V_0\,\mathrm{Re}\left[\frac{H_1(k_1a)}{H_1'(k_1a)}\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} - \sigma t + \varepsilon'\right)\right\}\right], \qquad \mathrm{tg}\,\varepsilon_1 \approx \sin\varepsilon_1 = {}^1/_2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon'$$

Рассмотрим следующие два случая. 1°. Пусть $|k_1 a| \ll 1$, т. е. радиус a мал (хотя конечная величина) по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\sigma = 2\pi/k_1'$. В этом случае, применяя асимптотическую формулу к $H_1(k_1 a)$ в (3.2) после несложного преобразования, получим

$$p = p_0 + \frac{\pi a^2 \rho_0 \sigma^2}{2c} V_0 \cos\theta \operatorname{Re}[H_1(k_1 r)\exp\{i(3\varepsilon_1 - \sigma t)\}]$$

$$v_r = \frac{1}{2} V_0 \cos\theta \left[\frac{\pi a^2 \sigma^2}{c^2} \operatorname{Re}\left\{H_1'(k_1 r)\exp\left[i\left(\varepsilon' - \frac{\pi}{2} - \sigma t\right)\right]\right\} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{r}\left(\frac{a\nu}{\sigma r}\right)^{1/2} \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}(r-a)\right\}\cos\left\{\left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}(r-a) - \sigma t + \frac{\pi}{4}\right\}\right] \qquad (3.3)$$

$$v_\theta = \frac{1}{2} V_0 \sin\theta \left[\frac{\pi a^2 \sigma}{cr} \operatorname{Re}\left\{H_1(k_1 r)\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} - \sigma t + \varepsilon_1\right)\right]\right\} - \right.$$
$$\left. - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}(r-a)\right\}\cos\left\{\left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}(r-a) - \sigma t\right\}\right]$$

$$R = \pi a^2 \rho_0 \sigma V_0 \sin(\varepsilon' - \sigma t)$$

На больших расстояниях r от поверхности цилиндра (при $|k_1 r| \gg 1$) имеем

$$p = p_0 + \left(\frac{\pi\sigma}{2cr}\right)^{1/2} \rho_0 a^2 \sigma V_0 \cos\theta\, v(r) \cos\left(\frac{\sigma}{c} r - \sigma t - \frac{3\pi}{4} + \varepsilon'''\right) \qquad (3.4)$$
$$v_r = \left(\frac{\pi\sigma}{2cr}\right)^{1/2} \frac{a^2\sigma}{c} V_0 \cos\theta\, v(r) \cos\left(\frac{\sigma}{c} r - \sigma t - \frac{3\pi}{4} + \varepsilon''\right), \quad v_\theta = 0$$

Здесь

$$v(r) = \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2c^3}\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu\right) r\right], \quad \operatorname{tg}\varepsilon''' \approx \sin\varepsilon''' = 5 \operatorname{tg}\varepsilon' \qquad (3.5)$$

Члены, удержанные в правых частях формул (3.4), имеют один и тот же порядок, между тем отброшенные члены очень быстро уменьшаются как $r^{-3/2}\exp[-\sigma^2/2r^3(\nu' + {}^4/_3\nu)r]$ или $r^{-1/2}\exp\left[-\left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2} r\right]$ и на больших расстояниях весьма малы по сравнению с удержанными.

Интенсивность на больших расстояниях и полная мощность, излучаемая сантиметром длины колеблющегося цилиндра в вязкой среде на основании (2.7), определяются следующими формулами:

$$J = \frac{\pi a^4 \rho_0 \sigma^3}{4c^2 r} V_0^2\, \vartheta(r) \cos^2\theta, \quad \Pi = \frac{\pi^2 a^4 \rho_0 \sigma^3}{4c^2} V_0^2\, \vartheta(r) \qquad (3.6)$$

Если не учитывать вязкости (при $\nu' = 0$, $\nu = 0$), то из (3.6) получим формулы, совпадающие с результатами цитированной выше работы [3], т. е. имеем

$$J = \frac{\pi a^4 \rho_0 \sigma^3}{4c^2 r} V_0^2 \cos^2\theta, \quad \Pi = \frac{\pi^2 a^4 \rho_0 \sigma^3}{4c^2} V_0^2 \qquad (3.7)$$

Следовательно, отношения $J/J_{\nu'=\nu=0}$ и $\Pi/\Pi_{\nu'=\nu=0}$ точно совпадают с формулами (2.10).

2°. Пусть $|k_1 a| \gg 1$, т. е. когда длина волны $\lambda = 2\pi c/\sigma$ невелика по сравнению с радиусом a цилиндра. В этом случае, пренебрегая малыми членами высших порядков (ограничиваясь малыми членами одних и тех же порядков), после несложного преобразования из формул (3.2) получим следующие приближенные формулы:

$$p = p_0 + \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} V_0 \rho_0 c \cos\theta \vartheta(r) \cos\left(\frac{\sigma}{c} r - \sigma t + \varepsilon_1\right)$$

$$v_r = \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} V_0 \cos\theta\, \vartheta(r) \cos\left(\frac{\sigma}{c} r - \sigma t\right) \tag{3.8}$$

$$v_\theta = \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \frac{c}{\sigma r} V_0 \sin\theta \vartheta(r) \cos\left(\frac{\sigma}{c} r - \sigma t + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right)$$

$$R = \pi a c \rho_0 V_0 \cos(\sigma t - \varepsilon')$$

На больших расстояниях r от цилиндра можно пренебречь составляющей v_θ по сравнению с v_r.

Интенсивность и полная излучаемая мощность на расстоянии r (любом) в вязкой среде будут равны

$$J = \frac{1}{2r} a \rho_0 c V_0^2 \cos^2\theta \vartheta(r), \quad \Pi = \frac{1}{2} \pi a \rho_0 c V_0^2 \vartheta(r) \tag{3.9}$$

Если не учитывать вязкости, т. е. при $\nu' = 0$, $\nu = 0$, то имеем

$$J = \frac{1}{2r} a \rho_0 c V_0^2 \cos^2\theta, \quad \Pi = \frac{1}{2} \pi a \rho_0 c V_0^2 \tag{3.10}$$

Следовательно, отношения $J/J_{\nu'=\nu=0}$ и $\Pi/\Pi_{\nu'=\nu=0}$ также точно совпадают с формулами (2.10).

Таким образом, во всех вышеуказанных случаях вдали от цилиндра интенсивность и полная мощность, излучаемая сантиметром длины колеблющегося цилиндра в среде с малой вязкостью, одинаково малы по сравнению с теми же величинами в идеальной среде для одного и того же положения.

Приведем таблицы значений $\vartheta(r)$ в зависимости от расстояния r для воздуха при следующих данных:

1) при $t = 0°$, $\nu' = 0$, $\nu = 0.133$ *см²/сек*, $c = 3.33 \cdot 10^4$ *см/сек*

2) при $t = 15°$, $\nu' = 0$, $\nu = 0.148$ *см²/сек*, $c = 3.42 \cdot 10^4$ *см/сек*

$t°$	σ, *сек*$^{-1}$	r, *км* 100	200	300	500	1000
0°	10	~1 100%	~1 100%	~1 100%	~1 100%	0.99995 99.995%
	2000	0.8255 82.55%	0.6809 68.09%	0.5620 56,2%	0.3827 38.27%	0.1465 14.65%
15°	10	~1 100%	~1 100%	~1 100%	~1 100%	0.99995 99.995%
	2000	0.8281 82.81%	0.6861 68.61%	0.5683 56.83%	0.39 39%	0.1521 15.21%

Из приведенной таблицы видно, что для звуковых волн с длиной $\lambda = 2\pi c/\sigma = 214.89$ *м* вязкость почти не влияет на интенсивность и полную излучаемую мощность звука. Следовательно, воздух можно рассматривать как идеальную среду. Однако для коротких волн с длиной $\lambda = 2.15$ *м* влияние вязкости становится существенным. Например, на расстоянии $r = 1000$ *км* отношение $J/J_{\nu'=\nu=0} = \Pi/\Pi_{\nu'=\nu=0} = 0.15 = 15\%$. Отсюда предположение о том, что среда (воздух) является идеальной, неверно для коротких волн.

§ 4. Излучение цилиндра с произвольным распределением скоростей (независимым от z) по поверхности. Рассмотрим более сложный случай, когда один линейный элемент (узкая полоса с шириной $d\alpha$) по поверхности цилиндра при угле $\theta = 0$ совершает колебания. Предположим, что радиальная скорость v_r поверхности цилиндра (при $r = a$) равна

$$v_r = \begin{cases} Ve^{-\sigma ti} & \text{при } -{}^1/_2\, d\alpha < \theta < {}^1/_2\, d\alpha \\ 0 & \text{при } {}^1/_2\, d\alpha < \theta < 2\pi - {}^1/_2\, d\alpha \end{cases} \tag{4.1}$$

а тангенциальная скорость

$$v_\theta = 0 \tag{4.2}$$

Разложим функцию v_r в ряд Фурье

$$v_r = \frac{Vd\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta\right] e^{-\sigma ti} \tag{4.3}$$

В этом случае, применяя метод, изложенный в § 1, найдем решение уравнений (1.1) и (1.7) в виде

$$\varphi = \frac{Vd\alpha}{2\pi k_1}\frac{H_0(k_1r)}{H_0'(k_1a)}e^{-\sigma ti} + \frac{Vd\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_2H_n'(k_2a)\,H_n(k_1r)\cos n\theta \exp(-\sigma ti)}{k_1k_2H_n'(k_1a)\,H_n'(k_2a) - n^2a^{-2}H_n(k_1a)\,H_n(k_2a)}$$

$$\Phi = -\frac{Vd\alpha}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nH_n(k_1a)\,H_n(k_2r)\sin n\theta \exp(-\sigma ti)}{k_1k_2H_n'(k_1a)\,H_n'(k_2a) - n^2a^{-2}H_n(k_1a)\,H_n(k_2a)} \tag{4.4}$$

Далее, давление, скорость частицы и результирующая сила реакции на единицу длины в направлении оси x будут равны

$$p = p_0 + \frac{\rho_0 Vd\alpha}{\pi}\,\frac{\sigma i - (\nu' + {}^4/_3\nu)\,k_1^2}{k_1}\left[\frac{H_0(k_1r)}{2H_1(k_1a)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\Lambda_n)\,H_n(k_1r)\cos n\theta}{H_{n-1}(k_1a) + \Lambda_nH_{n+1}(k_1a)}\right]e^{-i(\sigma t+\pi)}$$

$$v_r = \frac{Vd\alpha}{\pi}\left[\frac{H_1(k_1r)}{2H_1(k_1a)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\Lambda_n)\,\{H_{n-1}(k_1r) - H_{n+1}(k_1r)\}\cos n\theta}{H_{n-1}(k_1a) + \Lambda_nH_{n+1}(k_1a)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}(k_1a) + H_{n+1}(k_1a)}{H_{n-1}(k_1a) + \Lambda_nH_{n+1}(k_1a)}\,\frac{H_{n-1}(k_2r) + H_{n+1}(k_2r)}{H_{n+1}(k_2a)}\cos n\theta\right]e^{-\sigma ti} \tag{4.5}$$

$$v_\theta = \frac{iVd\alpha}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1-\Lambda_n)\,\{H_{n-1}(k_1r) - H_{n+1}(k_1r)\}}{H_{n-1}(k_1a) + \Lambda_nH_{n+1}(k_1a)} - \frac{H_{n-1}(k_1a) + H_{n+1}(k_1a)}{H_{n-1}(k_1a) + \Lambda_nH_{n+1}(k_1a)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{H_{n-1}(k_2r) - H_{n+1}(k_2r)}{H_{n+1}(k_2a)}\right]\sin n\theta\, e^{-\sigma ti}, \quad \Lambda_n = \frac{H_{n-1}(k_2a)}{H_{n+1}(k_2a)}$$

$$R = \rho_0 a^3 Vd\alpha\,\{\sigma i - (\nu' + {}^4/_3\,\nu)\,k_1^2\}\,\frac{k_2H_1'(k_2a)\,H_1(k_1a)\exp(-\sigma ti)}{a^2k_1k_2H_1'(k_1a)\,H_1'(k_2a) - H_1(k_1a)\,H_1(k_2a)}$$

Так как на очень больших расстояниях от цилиндра применима асимптотическая формула (2.2), то получим следующие выражения для p,

v_r и v_θ в виде:

$$p = p_0 + \frac{\rho_0 \sigma V d\alpha}{\pi k_1}\left(\frac{2}{\pi k_1 r}\right)^{1/2}\left\{1 + i\frac{\nu' + {}^4/_3\nu}{\sigma}k_1^2\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-k_1''r + i\left(k_1'r - \sigma t - \frac{3\pi}{4}\right)\right\} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2H_1(k_1a)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\Lambda_n}{H_{n-1}(k_1a) + \Lambda_n H_{n+1}(k_1a)}\cos n\theta \exp\left(-\frac{n\pi}{2}i\right)\right]$$

$$v_r = \frac{Vd\alpha}{\pi}\left(\frac{2}{\pi k_1 r}\right)^{1/2}\exp\left\{-k_1''r + i\left(k_1'r - \sigma t - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \times$$
$$\times\left[\frac{\exp(-{}^1/_2\pi i)}{2H_1(k_1a)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\Lambda_n)\cos n\theta \exp\{-{}^1/_2\pi i(n-1)\}}{H_{n-1}(k_1a) + \Lambda_n H_{n+1}(k_1a)}\right] -$$
$$- \frac{Vd\alpha}{\pi k_2 r}\left(\frac{2}{\pi k_2 r}\right)^{1/2}\exp\left\{-k_2''r + i\left(k_2'r - \sigma t - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\{H_{n-1}(k_1a) + H_{n+1}(k_1a)\}}{H_{n-1}(k_1a) + \Lambda_n H_{n+1}(k_1a)}\cos n\theta \exp\left(-\frac{n\pi i}{2}\right) \tag{4.6}$$

$$v_\theta = \frac{Vd\alpha}{\pi a k_1 r}\left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2}\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{4} - \sigma t\right)\right\} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-\Lambda_n)\sin n\theta}{H_{n-1}(k_1a) + \Lambda_n H_{n+1}(k_1a)}\left[\frac{a}{\sqrt{k_1}}\exp\left\{-k_1''r + i\left(k_1'r - \frac{n\pi}{2}\right)\right\} -\right.$$
$$\left. - \frac{r}{\sqrt{k_2}}\frac{H_n(k_1a)}{H_{n+1}(k_2a)}\exp\left\{-k_2''r + i\left(k_2'r - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right\}\right]$$

Рассмотрим случай малой вязкости. Так как

$$k_1 = k_1' + ik_1'' = \frac{\sigma}{c}e^{\varepsilon_1 i}, \quad k_2 = k_2' + ik_2'' = \left(\frac{\sigma}{\nu}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)$$

то при малых значениях ν' и ν величина $|k_2|$ очень велика по сравнению с величиной $|k_1|$. Следовательно, $\exp(-k_2''r) \ll \exp(-k_1''r)$. В силу этого в дальнейшем будем пренебрегать членами, содержащими множитель $\exp(-k_2''r)$ по сравнению с другими членами.

Далее известно, что при $\nu' \to 0$ и $\nu \to 0$ (при отсутствии вязкости) Λ_n стремится к -1; поэтому при очень малом значении ν' и ν можно предположить, что

$$\Lambda_n = -1 + o\,[(k_2a)^{-1}]$$

где член $o\,[(k_2a)^{-1}] \to o$ при $|k_2| \to \infty$.

Кроме того, следуя Морзу, применим обозначения

$$H_0'(u) = -iC_0'e^{\gamma_0' i}, \quad H_n'(u) = iC_n'e^{\gamma_n' i}\ (n \neq 0) \quad (u = k_1a) \tag{4.7}$$

Предельные значения амплитуд C_n' и фазовых углов γ_n' определяются следующими приближенными формулами:

При $k_1'a = \sigma a/c = 2\pi a/\lambda \gg n + {}^1/_2$

$$C_0' \approx \left(\frac{8}{\pi k_1'a}\right)^{1/2}e^{-k_1'a} = C_0e^{-k_1''a}, \quad \gamma_0'' \approx k_1'a - \frac{\pi}{4} - \varepsilon'' = \gamma_0 - \varepsilon''$$

$$C_n' \approx \left(\frac{2}{\pi k_1'a}\right)^{1/2}e^{-k_1''a} = C_ne^{-k_1''a}, \quad \gamma_n' \approx k_1'a - \frac{2n+1}{4}\pi - \varepsilon'' = \gamma_n - \varepsilon''\ (n > 0)$$

При $k_1'a = \sigma/ca = 2\pi a / \lambda \ll n + {}^1/_2$ (4.8)

$$C_0' \approx \frac{4}{\pi k_1'a} = C_0, \quad \gamma_0' \approx \pi\left(\frac{k_1'a}{2}\right)^2 - \varepsilon_1 = \gamma_0 - \varepsilon_1, \quad C_n' \approx \frac{n!}{2\pi}\left(\frac{2}{k_1'a}\right)^{n+1} = C_n$$

$$\gamma_n' \approx -\frac{n\pi}{(n!)^2}\left(\frac{k_1'a}{2}\right)^{2n} - (n+1)\,\varepsilon_1 = \gamma_n - (n+1)\,\varepsilon_1 \qquad (n > 0)$$

где C_0, C_n, γ_0, γ_n — функции, зависящие от $k_1'a$ и определяемые по таблицам. Таблицы этих функций можно найти в книге Морза [3]. Поэтому величины амплитуд C_n' и фазовых углов γ_n' легко будут определены при помощи таблиц функций C_n и γ_n в зависимости от $k_1'a$.

Теперь, учтя вышеизложенные допущения и обозначения, получим следующие выражения для давления, скорости частицы и интенсивности в точке r, θ, а также для полной мощности, излучаемой единицей длины цилиндра в виде

$$p - p_0 \approx \rho_0 c v_r e^{\varepsilon_1 i}$$

$$v_r \approx V d\alpha \sqrt{a/r} \exp\{-k_1''r + i(k_1''r - \sigma t - \varepsilon'')\}\, \psi(\theta)$$

$$\psi(\theta) = \left(\frac{2}{\pi^3 k_1'a}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{C_n'} \exp\left\{-i\left(\gamma_n' + \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right\}$$

$$v_\theta \approx \sqrt{a^3/r^3}\, V d\alpha \exp\{-k_1''r + i(k_1'r - \sigma t - 3\varepsilon'')\}\, f(\theta) \qquad (4.9)$$

$$f(\theta) = \left(\frac{2}{\pi^3 k_1'a}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n\theta}{C_n'} \exp\left\{-i\left(\gamma_n' + \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right\}$$

$$J = \frac{\rho_0 c^2 (V d\alpha)^2}{\pi^3 \sigma r} e^{-2k_1''r} \sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty} \frac{\cos n\theta \cos m\theta}{C_n' C_m'} \cos\left[\gamma_n' - \gamma_m' + \frac{1}{2}\pi(n-m) + \varepsilon_1\right]$$

$$\Pi = \frac{\rho_0 c^2 (V d\alpha)^2}{\pi^2 \sigma} e^{-2k_1''r}\left[\frac{2}{C_0'^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n'^2}\right]$$

Если не учитывать вязкости, то из (4.9) получим выражения, совпадающие с результатами Морза [3]. Отсюда

$$\frac{J}{J_{\nu'=\nu=0}} = e^{-2k_1''r} \sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty} \frac{\cos n\theta \cos m\theta}{C_n' C_m'} \cos\left[\gamma_n' - \gamma_m' + \frac{1}{2}\pi(n-m) + \varepsilon_1\right] \times$$

$$\times \left\{\sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty} \frac{\cos n\theta \cos m\theta}{C_n C_m} \cos\left[\gamma_n - \gamma_m + \frac{1}{2}\pi(n-m)\right]\right\}^{-1} \qquad (4.10)$$

$$\frac{\Pi}{\Pi_{\nu'=\nu=0}} = e^{-2k_1''r}\left(\frac{2}{C_0'^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n'^2}\right)\left(\frac{2}{C_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n^2}\right)^{-1} \qquad \left\{k_1'' = \frac{\sigma^2}{2c^3}\left(\nu' + \frac{4\nu}{3}\right)\right\}$$

Из формул (4.8) нетрудно видеть, что если длина волны велика по сравнению с $2\pi a$, то наибольшие значения $1/C_n'$ имеет при $n = 0$ и в первом приближении

$$\psi(\theta) \approx \left(\frac{k_1' a}{8\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{i\left(\varepsilon_1 - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \tag{4.11}$$

$$J \approx \frac{\rho_0 a^2 \sigma (V d\alpha)^2}{16\pi r} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{c^3}\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu\right) r\right\}$$

$$\Pi \approx \frac{\rho_0 a^2 \sigma (V d\alpha)^2}{8} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{c^3}\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu\right) r\right\}$$

На этих низких частотах звук излучается с одинаковой интенсивностью во всех направлениях, но величина интенсивности и количество излучаемой энергии уменьшаются по закону показательной функции в зависимости от расстояния r и стремятся к нулю при $r \to \infty$.

Полярные кривые интенсивности линейного излучателя, вычисленные по формуле (4.11) при $\lambda = 5\pi a$, $2\pi a$, ${}^2/{}_3\pi a$, точно совпадают с теми же кривыми [3] в идеальной среде, но масштабы графиков этих кривых относятся как $\exp\{-\sigma^2 c^{-3}(\nu' + {}^4/{}_3\nu) r\} : 1$, это вытекает из отношения $J/J_{\nu'=\nu=0}$.

Когда длина волны почти одинакова с радиусом сечения цилиндра, возникают сложные явления интерференции, однако величины J и Π быстро уменьшаются с увеличением расстояния r и влияние вязкости становится существенным.

§ 5. **Излучение цилиндрическим источником общего типа.** Рассмотрим более общий случай, когда линейный источник расположен по образующей цилиндра не под углом $\theta = 0$, а при $\theta = \alpha$ и колеблется с амплитудой скорости $V(\alpha)$. В этом случае давление и скорость на больших расстояниях будут, согласно формулам (4.9), иметь вид

$$\begin{aligned} p - p_0 &\approx \rho_0 c V(\alpha)\, d\alpha \sqrt{a/r} \exp\{-k_1'' r + i(k_1' r - \sigma t + \varepsilon'')\}\, \psi(\theta - \alpha) \\ v_r &\approx V(\alpha)\, d\alpha \sqrt{a/r} \exp\{-k_1'' r + i(k_1' r - \sigma t - \varepsilon'')\}\, \psi(\theta - \alpha) \\ v_\theta &\approx V(\alpha)\, d\alpha \sqrt{a^3/r^3} \exp\{-k_1'' r + i(k_1' r - \sigma t - 3\varepsilon'')\}\, f(\theta - \alpha) \end{aligned} \tag{5.1}$$

На больших расстояниях величина v_θ мала по сравнению с v_r. Поэтому в дальнейшем будем пренебрегать v_θ.

Если на поверхности цилиндра при $\theta = \alpha$ имеется любое распределение скоростей с амплитудами $V(\alpha)\, d\alpha$, то давление и радиальная скорость при больших расстояниях будут найдены путем интеграции по α вышеприведенных выражений для отдельных источников по формулам

$$\begin{aligned} p - p_0 &\approx \rho_0 c \sqrt{a/r} \exp\{-k_1'' r + i(k_1' r - \sigma t + \varepsilon'')\} \int_0^{2\pi} \psi(\theta - \alpha) V(\alpha)\, d\alpha \\ v_r &\approx \frac{p - p_0}{\rho_0 c} e^{-\varepsilon_1 i} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Далее предположим, что излучателем является часть цилиндра между $\alpha = -\alpha_0$ и $\alpha = \alpha_0$, которая колеблется по всей поверхности с одинаковой нормальной скоростью $V(\alpha) = V$, в то время как остальная поверхность цилиндра остается неподвижной. В этом случае давление и нормальная скорость частиц будут равны

$$p - p_0 \approx \rho_0 c V_0 (a/r)^{1/2} \exp\{-k_1''r + i(k_1'r - \sigma t + \varepsilon'')\} \int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \psi(\theta - \alpha)\, d\alpha =$$

$$= \frac{2\rho_0 c V_0}{\pi} \left(\frac{2c}{\pi\sigma r}\right)^{1/2} \exp\{-k_1''r + i(k_1'r - \sigma t + \varepsilon'')\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\alpha_0 \cos n\theta}{nC_n'} \times$$

$$\times \exp\left\{-i\left(\gamma_n' + \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right\} \tag{5.3}$$

$$v_r \approx \frac{p - p_0}{\rho_0 c} e^{-\varepsilon_1 i}$$

причем принимаем, что $n^{-1}\sin n\alpha_0 = \alpha_0$ при $n = 0$. Интенсивность и полная излучаемая мощность при больших расстояниях будут равны

$$J = \frac{4\rho_0 c^2 V_0^2}{\pi^3 \sigma r} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{c^3}\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu\right) r\right\} \sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty} \frac{\sin n\alpha_0 \sin m\alpha_0 \cos n\theta \cos m\theta}{nmC_n'C_m'} \times$$

$$\times \cos\left(\gamma_n' - \gamma_m' + \frac{n-m}{2}\pi + \varepsilon_1\right) \tag{5.4}$$

$$\Pi = \frac{4\rho_0 c^2 V_0^2}{\pi^2 \sigma} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{c^3}\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu\right) r\right\} \left[\frac{2\alpha_0^2}{C_0'^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha_0}{n^2 C_n'^2}\right]$$

При очень малых $k_1'a$ (для длинных волн) можно использовать приближенные соотношения (4.8). Тогда

$$J = \frac{\rho_0 a^2 \sigma \alpha_0^2 V_0^2}{4\pi r} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{c^3}\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu\right) r\right\}$$

$$\Pi = \frac{\rho_0 a^2 \sigma \alpha_0^2 V_0^2}{2} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{c^3}\left(\nu' + \frac{4}{3}\nu\right) r\right\} \tag{5.5}$$

Выражения для J и Π совершенно подобны выражениям в (2.7) и (2.8) при равномерном излучении цилиндра. Хотя скорость на поверхности цилиндра распределена несимметрично относительно его оси, тем не менее на больших расстояниях излучение при очень большой длине волн будет подобно излучению равномерного пульсирующего цилиндра.

Если длина волны почти одинакова с радиусом сечения цилиндра, то возникают сложные явления интерференции, и анализ формул (5.4) становится весьма затруднительным, однако величины J и Π быстро уменьшаются с увеличением r по законам $r^{-1}\exp\{-\sigma^2 c^{-3}(\nu' + 4/3\nu)r\}$ или $\exp\{-\sigma^2 c^{-3}(\nu' + 4/3\nu)r\}$. Следовательно, влияние вязкости также становится существенным.

Поступило 17 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
2. Релей. Теория звука, т. II. Гостехиздат, 1955.
3. Морз Ф. Колебания и звук. Гостехиздат, 1949.
4. Ржевкин С. И. Курс лекций по теории звука. Изд-во Моск. ун-та, 1960.
5. Коненков Ю. К. О волнах в вязкой жидкости. Изд-во «Наука», Акустический ж-л, 1962, т. 8, вып. 3.
6. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. I. Изд-во иностр. литер., 1949.