

О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ КАВИТАЦИИ И ШИРИНЕ КАВЕРНЫ В ПЛОСКОМ И ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КАНАЛАХ

Л. А. ЭПШТЕЙН

(Москва)

Ниже исследуется ширина каверны за телом в плоском и осесимметричном каналах. Даны формулы для расчета минимального числа кавитации, а также для расчета зависимости ширины каверны от числа кавитации и отношения поперечных размеров тела и канала.

Обозначения

<p>v_0 — скорость набегающего потока; v — скорость на границе каверны; p_0 — давление в набегающем потоке; p — давление в каверне; ρ — плотность жидкости;</p>	<p>d — ширина тела; D_0 — ширина канала; D — ширина каверны в канале; D_∞ — ширина каверны в безграничной жидкости</p>
--	--

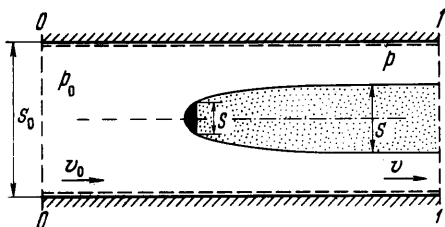
Увеличение скоростей движущихся в воде объектов повысило интерес к изучению режимов, соответствующих малым числам кавитации σ . Значительная часть таких исследований производится в кавитационных трубах с плоской и круглой закрытой рабочей частью и потому важно изучение влияния стенок при малых σ .

При обтекании тела, находящегося в канале (плоском или осесимметричном), наименьшему числу кавитации σ_{\min} будет соответствовать установившееся течение, схематично изображенное на фиг. 1.

Считая жидкость идеальной, невесомой и несжимаемой, получим, применяя уравнения Бернулли к линии тока, идущей по границе каверны,

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{1 + \sigma} \quad \left(\sigma = \frac{2(p_0 - p)}{\rho v_0^2} \right) \quad (1)$$

Наименьшему возможному $\sigma = \sigma_{\min}$ будет соответствовать каверна бесконечной длины, причем в сечении 1-1 вдали за телом границы каверны параллельны стенкам канала, а скорости и давления по сечению постоянны. Из уравнения неразрывности, примененного к сечениям 0-0 и 1-1, следует



$$\frac{v}{v_0} = \frac{S_0}{S_0 - S} \quad (2)$$

Фиг. 1

Формулы (1) и (2) определяют σ_{\min} , если известна площадь наибольшего сечения каверны S . Применяя закон количества движения к контрольной поверхности, проходящей через те же сечения, получим

$$\rho v^2 (S_0 - S) - \rho v_0^2 S_0 = (p_0 - p) S_0 - X \quad (3)$$

где X — сила сопротивления тела. Введем коэффициент сопротивления C_x , тогда из (3) с учетом (1) и (2) получим¹

$$C_x = \frac{2X}{\rho v_0^2 s} = \frac{[\sigma_{\min} + 2(1 - \sqrt{1 + \sigma_{\min}})] S_0}{s}; \quad \left(C_x = \frac{[\sqrt{1 + \sigma_{\min}} - 1]^2 S_0}{s} \right) \quad (4)$$

¹ Эпштейн Л. А. Диссертация, 1946 г.

Здесь в скобках указан в несколько преобразованном виде тот же результат, который приведен в [1,2].

Далее авторы [1,2] замечают, что

$$(\sqrt{1 + \sigma_{\min}} - 1)^2 < 1/4 \sigma_{\min}^2 \quad (5)$$

и дают для минимального числа кавитации формулу

$$\sigma_{\min} = 2 \sqrt{C_{x0} s / S_0} \quad (6)$$

По смыслу вывода величина C_x должна определяться по сопротивлению тела в канале, которое, вообще говоря, отличается от сопротивления того же тела в безграничной жидкости. В связи с этим формула (6) делается неэффективной, так как в нее входят два неизвестных: σ_{\min} и C_x . Биркгофф производит оценку σ_{\min} , полагая C_x не превышающим единицы, т. е. по существу отождествляя его с C_x безграничной жидкости. Это может быть оправдано только в том случае, когда сечение канала весьма велико по сравнению с миделем тела и значения σ_{\min} малы. В общем случае для отыскания минимального числа кавитации при любом соотношении между размерами тела и канала следует воспользоваться известной формулой

$$C_x = C_{x0} (1 + \sigma) \quad (7)$$

где C_{x0} — коэффициент сопротивления при $\sigma = 0$. Эта формула была впервые получена автором в 1948 г., исходя из гипотезы о том, что при различных числах кавитации ординаты кривой распределения давлений на лобовую часть тела (отсчитываемые от давления в каверне p) меняются пропорционально давлению в критической точке, т. е. что в каждой точке лобовой части $p(\sigma) = p(0)(1 + \sigma)$.

Формула (7) многократно проверялась¹ и в настоящее время может считаться общепринятой. Естественно, что обосновывающая ее гипотеза остается справедливой и для обтекания тел в каналах, при этом C_{x0} в канале, очевидно, равен C_{x0} в безграничной жидкости, так как при $\sigma = 0$ стенки удалены в бесконечность.

Из (4) и (7) находим

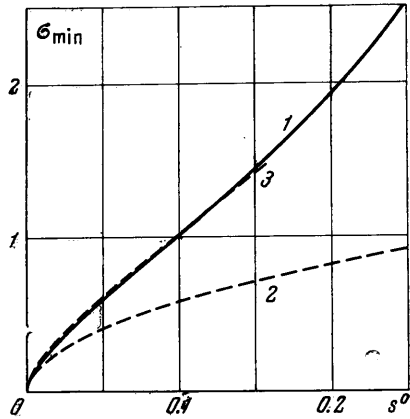
$$\sigma_{\min} = \left[1 - \left(\frac{C_{x0} s}{S_0} \right)^{1/2} \right]^{-2} - 1 \quad (8)$$

Формула (8) позволяет вычислить связь между σ_{\min} , C_{x0} и соотношением площадей миделя тела s и канала S_0 . При $\sigma_{\min} \rightarrow 0$, а следовательно, при $s/S_0 \rightarrow 0$ формула (8) переходит в (6). Воспользовавшись (1), (2) и (8), находим для ширины каверны S_{\max} , соответствующей σ_{\min}

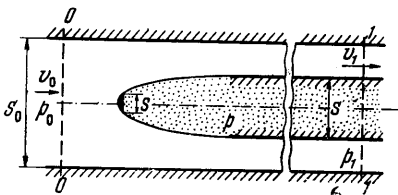
$$S_{\max} = \sqrt{C_{x0} s S_0} \quad (9)$$

Если ввести понятие приведенной площади миделя тела s' , опреде-

¹ Отклонения от (7) имеют место только для тел, границы которых образуют малые углы с вектором скорости.



Фиг. 2



Фиг. 3

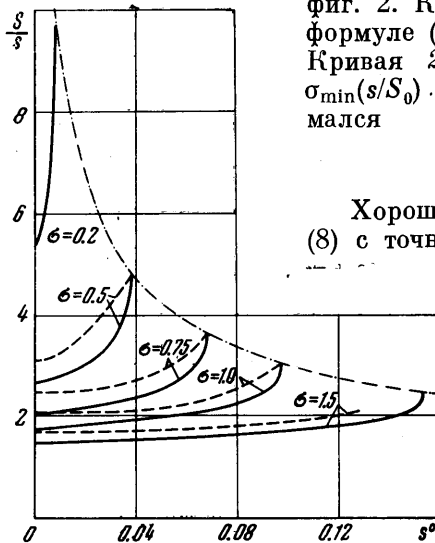
лив ее из условия $1 \cdot s' = C_{x0} \cdot s$, то можно сформулировать следующее положение: площадь сечения наибольшей каверны в канале является средним геометрическим между площадью сечения канала и приведенной площадью миделя тела.

В случае плоской задачи развитая приближенная теория может быть сравнена с точным решением М. И. Гуревича [3] для обтекания нормальной к потоку пластинки в канале. Результаты сравнения приводятся на фиг. 2. Кривая 1 соответствует вычислениям по формуле (8), а кривая 3 — расчетам работы [3]. Кривая 2 этой же фигуры дает зависимость $\sigma_{\min}(s/S_0)$ по Биркгоффу [2]. В расчетах принимался

$$C_{x0} = \frac{2\pi}{\pi + 4} = 0.88$$

Хорошее согласование расчетов по формуле (8) с точным решением дает основание ожидать аналогичных результатов и в пространственном случае.

Применив схему Жуковского — Рошко, можно на базе соображений, аналогичных изложенным выше, определить связь между числом кавитации и отношением между площадями миделя каверны и тела при наличии стенок канала. Будем считать, что течение имеет плоскость или ось симметрии. За телом (фиг. 3) образуется каверна, которая, начиная от миделя,



Фиг. 4

деля, замыкается на бесконечные поверхности (плоскости, цилиндр). Пользуясь обозначениями фиг. 3, запишем закон количества движения. Выберем контрольную поверхность, ограниченную стенками канала и сечениями 0-0 и 1-1, и учтем, что $p_1 \neq p$, т. е. терпит разрыв на стенках, тогда

$$\rho S_0 v_0 (v_1 - v_0) = (p_0 - p_1) (S_0 - S) + (p_0 - p) S - X \quad (10)$$

Используя уравнения неразрывности Бернулли и (7), вместо (10) можно после простых преобразований получить

$$S^{\circ 2} - S^{\circ} \left(C_{x0} S^{\circ} + \frac{\sigma}{1 + \sigma} \right) + C_{x0} S^{\circ} = 0 \quad (11)$$

Здесь и в дальнейшем знаком $^{\circ}$ сверху обозначены величины, отнесенные к S_0 . Решая (11) относительно S° и учитывая, что $S^{\circ} < 1$, найдем

$$S^{\circ} = \frac{1}{2} \left(C_{x0} S^{\circ} + \frac{\sigma}{1 + \sigma} \right) \left\{ 1 - \left[1 - 4 C_{x0} S^{\circ} \left(C_{x0} S^{\circ} + \frac{\sigma}{1 + \sigma} \right)^{-2} \right]^{1/2} \right\} \quad (12)$$

Действительные значения S° будут при

$$1 - 4 C_{x0} S^{\circ} \left(C_{x0} S^{\circ} + \frac{\sigma}{1 + \sigma} \right)^{-2} \geq 0, \quad (13)$$

Знаку равенства соответствует $S^{\circ} = S^{\circ}_{\max}$ и $\sigma = \sigma_{\min}$. Выражения для этих величин (8) и (9) немедленно получаются из (12) и (13).

На фиг. 4 дается сопоставление расчетов по (12) с расчетами М. И. Гуревича для пластинки в канале с каверной, оканчивающейся по схеме Эфроса.

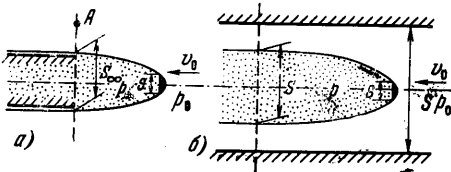
Согласование получается очень хорошим в области предельных значений s° . С уменьшением s° появляется расхождение, достигающее наибольшего значения $\sim 12\%$ при $s^{\circ} = 0$, т. е. при удалении стенок канала в бесконечность. Это расхождение является следствием различия в схемах Эфроса и Рошко. Для $s^{\circ} = 0$ оно, как известно, составля-

ет для пластинки как раз величину $\sim 12\%$. Расчеты ширины каверны в канале по схеме Рощко будут близки к результатам расчетов по (12).

Интерес полученного решения определяется не столько его простотой и наглядностью по сравнению с точным решением соответствующей плоской задачи, сколько возможностью производить расчет в пространственном осесимметричном случае, для которого какие-либо строгие теоретические решения пока отсутствуют.

На фиг. 5 показано влияние стенок канала на ширину каверны, рассчитанное по формуле (12). По оси ординат отложено отношение ширины каверны D в канале к ее ширине D_∞ в безграничной жидкости, по оси абсцисс — число кавитации. Параметром на кривых является отношение ширины тела d к ширине канала D_0 . Пунктиром обозначены кривые для плоской трубы (в этом случае D_0 и S_0 эквивалентны), сплошными линиями — для круглой. Граница минимальных чисел кавитации нанесена тонкой линией. Заметим, что, как указывалось еще в работах 1946 г.¹, учет вязкости приведет к некоторому уменьшению ширины каверны по сравнению с настоящим расчетом. Отметим несколько любопытных обстоятельств. Из фиг. 5 следует несколько неожиданный вывод, что для плоского и круглого каналов при одинаковых размерах тел и числах кавитации каверна делается тем шире, чем уже канал. Для плоского случая этот результат можно было бы усмотреть и из расчетов М. И. Гуревича^[8], однако это, по-видимому, осталось не отмеченным.

При малых σ_{\min} из (6) и (9) следует, что $S_{\max}^0 = 1/2 \sigma_{\min}$, т. е. что при малых σ^0 наибольшая площадь сечения каверны, отнесенная к площади сечения канала, равна половине σ_{\min} и не зависит от C_x тела.



Фиг. 6

щадь миделя каверны в безграничной жидкости при том же σ .

Если удалять стенки канала при фиксированном σ , то, конечно, в пределе получится та же ширина каверны, что и в безграничной жидкости.

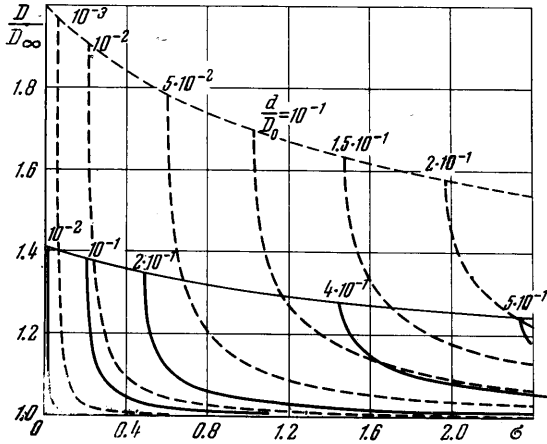
Для того чтобы получить представление о природе этого, на первый взгляд парадоксального результата, рассмотрим течения при одном и том же $\sigma = \sigma_{\min}$ в безграничной жидкости и в канале (фиг. 6, а и б). При равных скоростях потока давление в каверне в обоих случаях одинаково и равно p , но в безграничной жидкости давление в удаленной от границ точке А будет близко к p_0 , а во всех точках плоскости, проходящей через мидель каверны, в канале давление сохраняется равным $p_1 < p_0$. Теперь делается понятным, что большим окружающим каверну давлением (безграничная жидкость) соответствует меньший размер каверны.

Поступило 27 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Birkhoff G., Plesset M., Simmons N. Wall effects in cavity flow. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 8, No 2, p. 151—168.
2. Биркгофф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. Изд. «Мир», 1964.
3. Гуревич М. И. Симметричное кавитационное обтекание плоской пластинки, помещенной между параллельными стенками. Изв. АН СССР, № 4, 1946.

¹ См. ссылку на стр. 78.



Фиг. 5