МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В УПОРНОМ ПОДШИПНИКЕ

Г. И. БОДЯКОВ

(Ленинград)

Рассматривается плоское стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя поверхностями. Неподвижная поверхность задается уравнением $y = h[1+\varepsilon f\ (x/h)]$, где функция $f\ (x/h=h)$ характеризует отклонение неподвижной поверхности от плоскости $y = h$ (h и ε — постоянные). Подвижная поверхность представляет собой плоскость, перемещающуюся с постоянной скоростью вдоль оси x и остающуюся параллельной плоскости $y = h$. Для решения данной задачи применяется метод малого параметра. В первом пункте приведена постановка задачи, во втором исследована разрешимость линейных уравнений, получающихся по методу малого параметра, и в третьем пункте исследована сходимость метода и найден радиус сходимости построенных рядов.

1. Изучение упорных подшипников быстроходных машин приводит к необходимости рассматривать плоское течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя поверхностями. Пусть уравнения этих поверхностей имеют следующий вид:

$$y = 0, \qquad y = h\ [1 + \varepsilon f\ (x\ /\ h)] \tag{1.1}$$

где h — размерная постоянная, выраженная в единицах длины; ε — безразмерный параметр.

Пусть функция $f\ (x\ /\ h)$ такова, что $f\ (x\ /\ h) \to \sigma$ при $x \to -\infty$ и $f\ (x\ /\ h) \to 0$ при $x \to \infty$, где σ принимает значение или 0, или 1. Для упорных подшипников интерес представляет $\sigma = 1$. Функция $f\ (x\ /\ h)$ предполагается такой, что $f'\ (x) \in W_2^3$.

Пусть плоскость $y = 0$ движется в направлении оси x в своей плоскости с постоянной скоростью U, а верхняя поверхность $y = h\ [1 + \varepsilon f\ (x\ /\ h)]$ остается неподвижной.

Согласно [1], уравнение, описывающее движение вязкой жидкости в области (1.1), может быть записано так:

$$\triangle^2\psi - R\,\frac{D\,(\triangle\psi,\ \psi)}{D\,(x',\ y')} = 0 \tag{1.2}$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 1, \quad y = 0; \quad \psi = \mathrm{const}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad y = 1 + \varepsilon f(x') \tag{1.3}$$

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{D\,(u,\ v)}{D\,(x,\ y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad R = \frac{Uh}{\nu}$$

где x' и y' — безразмерные переменные, связанные со старыми переменными соотношениями $x = hx'$, $y = hy'$, ψ — безразмерная функция тока; R — число Рейнольдса; ν — кинематическая вязкость.

В дальнейшем предполагается, что параметр ε мал по сравнению с единицей. При этом область, занятая жидкостью, мало отличается от полосы $y' = 0$ и $y' = 1$, и отыскивается решение уравнения (1.2) с краевыми условиями (1.3), близкое к течению Куэтта. Причем предполагается, что на левом конце полосы имеет место течение Куэтта, а на правом устанавливается течение с параллельными линиями тока из условия сохранения расхода.

Введем новые независимые переменные

$$\xi = x', \qquad \eta = \frac{y'}{1 + \varepsilon f(x')} \tag{1.4}$$

и искомую функцию

$$V = \psi - \psi_0, \quad \psi_0 = \eta - 0.5\eta^2 + \varepsilon\eta(1-\eta)^2 f(\xi) + \mathrm{const} \tag{1.5}$$

Уравнение для функции V примет вид (1.6)

$$(\triangle + \varepsilon L)(\triangle + \varepsilon L)(V + \psi_0) - R\,\frac{D((\triangle + \varepsilon L)(V + \psi_0),\ V + \psi_0)}{D(\xi,\ \eta)}\,\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)} = 0$$

с краевыми условиями

$$V = \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0; \qquad V = \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 1 \tag{1.7}$$

где теперь

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$L = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\varphi_1, \frac{\partial}{\partial \eta}\right) + \varphi_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta} + (\varphi_1{}^2 + \varphi_2)\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\varphi_1 = -\frac{\eta f'(\xi)}{1 + \varepsilon f(\xi)}, \qquad \varphi_2 = -\frac{2f(\xi) + \varepsilon f^2(\xi)}{[1 + \varepsilon f(\xi)]^2}$$

Предполагая параметр ε малым, решение уравнения (1.6) с краевыми условиями (1.7) ищем в виде

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi,\ \eta)\,\varepsilon^n \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.6) и (1.7), получим последовательность линейных уравнений для определения V_n и краевые условия к ним

$$\triangle^2 V_n - R(1-\eta)\frac{\partial \triangle V_n}{\partial \xi} = f_n(\xi,\ \eta) \tag{1.9}$$

$$V_n = \frac{\partial V_n}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0; \qquad V_n = \frac{\partial V_n}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 1 \tag{1.10}$$

где

$$\begin{aligned} f_n(\xi,\ \eta) &= [\triangle L + L\triangle + \varepsilon L^2]\,V_{n-1} + R\,\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)}\,\frac{D(\triangle[\eta(1-\eta)^2 f(\xi)]),\ V_{n-1}}{D(\xi,\ \eta)} + \\ &+ R\varphi_3\,\frac{D(\triangle V_{n-1},\ \psi_0)}{D(\xi,\ \eta)} + R\,\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)}\left[\frac{D(L\psi_0,\ V_{n-1})}{D(\xi,\ \eta)} + \frac{D(LV_{n-1},\ \psi_0)}{D(\xi,\ \eta)}\right] + \\ &+ R\,\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{D(\triangle V_k,\ V_{n-k})}{D(\xi,\ \eta)} + \varepsilon\,\frac{D(LV_k,\ V_{n-k})}{D(\xi,\ \eta)}\right)\right] + F_n(\xi,\ \eta) \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $F_n = 0$ при $n > 1$

$$F_1 = -(\triangle + \varepsilon L)(\triangle + \varepsilon L)\psi_0 + R\,\frac{D((\triangle + \varepsilon L)\psi_0,\ \psi_0)}{D(\xi,\ \eta)}\,\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)} - 1\right]$$

2. Будем предполагать в дальнейшем, что $f_n \in L_2(\Omega)$, где Ω — полоса ($|\xi| < \infty$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$). Докажем, что уравнение (1.9) с краевыми условиями (1.10) разрешимо при этом.

Назовем обобщенным решением уравнения (1.9) с краевыми условиями (1.10) функцию V_n из $W_2{}^2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega}\left[\Delta V_n \Delta \Phi + R(1-\eta)\Delta V_n \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right] d\xi\, d\eta = \int_{\Omega} f_n \Phi d\xi\, d\eta \qquad (2.1)$$

при любой финитной в Ω функции Φ.

Обозначим через Ω_k $(k = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ последовательность расширяющихся областей, исчерпывающих в пределе всю Ω. Пусть Ω_k представляют собой прямоугольники $|\xi| \leqslant T_k$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Будем искать решение уравнения

$$\Delta^2 u_{kn} - R(1-\eta)\frac{\partial \Delta u_{kn}}{\partial \xi} = f_{nk}(\xi, \eta) \qquad (2.2)$$

с краевыми условиями

$$u_{kn} = \frac{\partial u_{kn}}{\partial \eta} = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \eta = 1 \qquad (2.3)$$

и условием периодичности по ξ с периодом $2T_k$. Функция $f_{nk}(\xi, \eta)$ такова, что $f_{nk}(\xi, \eta) \equiv f_n(\xi, \eta)$ в Ω_k и $f_{nk}(\xi, \eta) = f_{nk}(\xi + 2T_k l, \eta)$ при любых ξ и η из Ω $(l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Покажем, что краевая задача (2.2), (2.3) разрешима в W_2^4, и для нее имеет место оценка

$$\| u_{kn} \|_{W_2^4(\Omega_k)} \leqslant C_0 \| f_{nk} \|_{L_2(\Omega_k)}. \qquad (2.4)$$

Здесь C_0 не зависит от длины прямоугольника Ω_k.

Периодическую функцию $f_{nk}(\xi, \eta)$ представим рядом Фурье

$$f_{nk}(\xi, \eta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{lk}(\eta)\, e^{i\lambda_l \xi} \qquad \left(\lambda_l = \frac{\pi}{T_k} l\right) \qquad (2.5)$$

Решение краевой задачи (2.2), (2.3) ищем в виде

$$u_{kn} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S_{lk}(\eta)\, e^{i\lambda_l \xi} \qquad (2.6)$$

Обычным путем для функций $S_{lk}(\eta)$ получим последовательность краевых задач

$$S_{lk}^{\mathrm{IV}} - 2\lambda_l^2 S_{lk}'' + \lambda_l^4 S_{lk} - i\lambda_l R(1-\eta)[S_{lk}'' - \lambda_l^2 S_{lk}] = g_{lk}(\eta) \qquad (2.7)$$

$$S_{lk}(0) = S_{lk}'(0) = S_{lk}(1) = S_{lk}'(1) = 0 \qquad (2.8)$$

Покажем, что краевая задача (2.7)—(2.8) разрешима в пространстве функций из $W_2^4(0, 1)$. Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу

$$S_{lk}^{\mathrm{IV}} - 2\lambda_l^2 S_{lk}'' + \lambda_l^4 S_{lk} - i\lambda_l R(1-\eta)[S_{lk}'' - \lambda_l^2 S_{lk}] = 0 \qquad (2.9)$$

$$S_{lk}(0) = S_{lk}'(0) = S_{lk}(1) = S_{lk}'(1) = 0 \qquad (2.10)$$

Покажем, что она имеет в $W_2^4(0, 1)$ только нулевое решение.

Умножим (2.9) скалярно на $S_{lk}(\eta)$. После интегрирования по частям с использованием краевых условий (2.10) получим равенство

$$\int_0^1 (|S_{lk}''|^2 + 2\lambda_l^2 |S_{lk}'|^2 + \lambda_l^4 |S_{lk}|^2)\, d\eta + i\lambda_l R \int_0^1 (1-\eta)(|S_{lk}'|^2 +$$

$$+ \lambda_l^2 |S_{lk}|^2)\, d\eta - i\lambda_l R \int_0^1 \overline{S}_{lk} S_{lk}' d\eta = 0 \qquad (2.11)$$

где черта сверху означает комплексно сопряженную функцию. Приравнивая в этом равенстве нулю вещественную и мнимую части, придем к равенствам

$$\begin{gathered}\int_0^1 (|S_{lk}''|^2 + 2\lambda_l^2 |S_{lk}'|^2 + \lambda_l^4 |S_{lk}|^2)\, d\eta - i\lambda_l R \int_0^1 \overline{S}_{lk} S_{lk}' d\eta = 0 \\ \lambda_l R \int_0^1 (1-\eta)(|S_{lk}'|^2 + \lambda_l^2 |S_{lk}|^2)\, d\eta = 0\end{gathered} \tag{2.12}$$

Из второго равенства (2.12) при $\lambda_l \neq 0$ и из первого при $\lambda_0 = 0$ следует, что краевая задача (2.9), (2.10) имеет лишь решение, тождественно равное нулю. Откуда вытекает, что краевая задача (2.7), (2.8) имеет единственное решение. Краевую задачу (2.7), (2.8) запишем в виде

$$A_0 S_{lk} + K S_{lk} = g_{lk}, \qquad S_{lk}(0) = S_{lk}'(0) = S_{ek}(1) = S_{lk}'(1) = 0 \tag{2.13}$$

где $A_0 S_{lk} = S_{lk}^{IV}$, а через KS_{lk} обозначена оставшаяся часть уравнения (2.7). Будем считать $S_{lk} \in W_2^4$. Множество тех $S_{lk} \in W_2^4(0, 1)$, для которых $S_{lk}(0) = S_{lk}'(0) = S_{lk}(1) = S_{lk}'(1) = 0$, образует подпространство пространства $W_2^4(0, 1)$, которое обозначим через $W_{2,0}^4(0, 1)$.

Проводя r рассуждения, аналогичные тем, которые проведены в [2], где показано, то оператор Δ, если его рассматривать как операцию из $W_{2,0}^2$ в L_2, имеет линейный обратный, можно показать, что оператор A_0, если его рассматривать как операцию из $W_{2,0}^4(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$, имеет линейный обратный.

Применяя к обеим частям уравнения (2.13) операцию A_0^{-1}, получим эквивалентное уравнение

$$S_{lk} + TS_{lk} = A_0^{-1} g_{lk}, \qquad T = A_0^{-1} K \qquad (S_{lk} \in W_{2,0}^4(0, 1)) \tag{2.14}$$

По теоремам вложения операция K, рассматриваемая как операция из $W_{2,0}^4(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$, вполне непрерывна, поэтому T — вполне непрерывная операция в $W_{2,0}^4(0, 1)$.

Отсюда к краевой задаче (2.7), (2.8) применимы теоремы Фредгольма, поэтому из доказанной единственности следует существование решения.

Докажем оценку (2.4). Умножим (2.7) скалярно на S_{lk} и проинтегрируем по частям левую часть полученного равенства. Придем к равенству

$$\begin{gathered}\int_0^1 (|S_{lk}''|^2 + 2\lambda_l^2 |S_{lk}'|^2 + \lambda_l^4 |S_{lk}|^2)\, d\eta - i\lambda_l R \int_0^1 \overline{S}_{lk} S_{lk}' d\eta + \\ + i\lambda_l R \int_0^1 (1-\eta)(|S_{lk}'|^2 + \lambda_l^2 |S_{lk}|^2)\, d\eta = \int_0^1 \overline{S}_{lk} g_{lk}\, d\eta\end{gathered}$$

Взяв модуль от обеих частей этого равенства и отбрасывая в левой части положительное слагаемое, придем к неравенству

$$|\lambda_l| \lambda_l R \int_1^1 (1-\eta)(|S_{lk}'|^2 + \lambda_l^2 |S_{lk}|^2)\, d\eta \leqslant \int_0^1 |S_{lk}|\,|g_{lk}|\, d\eta \qquad (\lambda_l \neq 0)$$

Отсюда, воспользовавшись тем, что функция S_{lk} на концах промежутка [0, 1] обращается в нуль, легко придем к оценке

$$|\lambda_l| R \|S_{lk}\|_{L_2(0,1)} \leqslant \|g_{lk}\|_{L_2(0,1)} \tag{2.15}$$

Умножив уравнение (2.7) скалярно на S_{lk}, можем прийти к равенству

$$\int_0^1 |S_{lk}'' - \lambda_l^2 S_{lk}|^2 d\eta = \int_0^1 g_{lk}\overline{S}_{lk}\, d\eta + i\lambda_l R \int_0^1 (1-\eta)\overline{S}_{lk}(S_{lk}'' - \lambda_l S_{lk})\, d\eta \qquad (2.16)$$

Взяв в предыдущем равенстве модуль от обеих частей и воспользовавшись неравенством Коши получим неравенство

$$\|S_{lk}'' - \lambda_l^2 S_{lk}\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \|g_{lk}\|_{L_2(0,1)} \|S_{lk}\|_{L_2(0,1)} +$$
$$+ |\lambda_l| R \|S_{lk}\|_{L_2(0,1)} \|S_{lk}'' - \lambda_l^2 S_{lk}\|_{L_2(0,1)} \qquad (2.17)$$

Воспользовавшись неравенством (2.17) и очевидным неравенством для функций, обращающихся в нуль вместе со своей первой производной на концах интервала

$$\|S_{lk}\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \|S_{lk}'\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \|S_{lk}''\|^2_{L_2(0,1)} \qquad (2.18)$$

придем к оценке

$$\left\{\int_0^1 (|S_{lk}''|^2 + 2\lambda_l^2 |S_{lk}'|^2 + \lambda_l^4 |S_{lk}|^2)\, d\eta\right\}^{1/2} \leqslant 2\|g_{lk}\|_{L_2(0,1)} \qquad (2.19)$$

Введем обозначения

$$A^2 = \int_0^1 (|S_{lk}''|^2 + 2\lambda_l^2 |S_{lk}'|^2 + \lambda_l^4 |S_{lk}|^2)\, d\eta$$

$$B^2 = \lambda_l R \int_0^1 (1-\eta)(|S_{lk}'|^2 + \lambda_l^2 |S_{lk}|^2)\, d\eta$$

$$Q^2 = \|g_{lk}\|^2_{L_2(0,1)}$$

В этих обозначениях равенство (2.16) можно переписать так:

$$A^2 + iB^2 = \int_0^1 \overline{S}_{lk} g_{lk}\, d\eta + i\lambda_l R \int_0^1 \overline{S}_{lk} S_{lk}'\, d\eta$$

Теперь легко имеем

$$A^2 \leqslant |A^2 + iB^2| \leqslant Q\|S_{lk}\|_{L_2(0,1)} + |\lambda_l| R \|S_{lk}\|_{L_2(0,1)} \|S_{lk}'\|_{L_2(0,1)} \qquad (2.20)$$

Из (2.20), (2.16) и (2.18) следует

$$A^2 \leqslant \frac{\sqrt{2}QA}{|\lambda_l|}, \qquad A^2 = \frac{QA}{\lambda_l^2} + \frac{R}{\lambda_l^2}\frac{QA}{\sqrt{2}}$$

Отсюда получим, воспользовавшись обозначениями для A и Q, две оценки

$$\left\{\int_0^1 (|S_{lk}''|^2 + 2\lambda_l^2 |S_{lk}'|^2 + \lambda_l^4 |S_{lk}|^2)\, d\eta\right\}^{1/2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{|\lambda_l|}\|g_{lk}\|_{L_2(0,1)} \qquad (2.21)$$

$$\left\{\int_0^1 (|S_{lk}''|^2 + 2\lambda_l^2 |S_{lk}'|^2 + \lambda_l^4 |S_{lk}|^2)\, d\eta\right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{\lambda_l^2}\left(1 + \frac{R}{\sqrt{2}}\right)\|g_{lk}\|_{L_2(0,1)} \qquad (2.22)$$

Из оценок (2.19), (2.21), (2.22), уравнения (2.7), теорем вложения [2] и неравенства

$$\| S_{lk} \|_{W_2{}^\beta} \leqslant C_1 \| S_{lk} \|_{W_2{}^\alpha}^{(\gamma-\beta)/\gamma-\alpha} \| S_{lk} \|_{W_2{}^\gamma}^{(\beta-\alpha)/\gamma-\alpha}$$

при $\alpha = 2$, $\beta = 3$ и $\gamma = 4$, где C_1 зависит от вида области и максимального модуля индексов норм фигурирующих пространств, получим следующую группу оценок:

$$\| S_{lk}^{(p_2)} \|_{L_2(0,1)} \leqslant \frac{C_2}{\lambda_l^{p_1}} \| g_{lk} \|_{L_2(0,1)} \tag{2.23.1}$$

Здесь C_2 не зависит от λ_l и пропорционально числу Рейнольдса R ($p = 0, 1, 2, 3, 4$; $p_1 + p_2 = p$). Для S_{0k} (случай ($\lambda_0 = 0$)) тривиальным образом имеем

$$\| S_{0k} \|_{W_2{}^4(0,1)} \leqslant C_2 \| q_{0k} \|_{L_2(0,1)} \tag{2.23.2}$$

Согласно определению нормы в $W_2{}^4$, имеем

$$\| u_{kn} \|_{W_2{}^4}^2 = \sum_{p=0}^{4} \sum_{p_1+p_2=p} \int_{\Omega_k} \left(\frac{\partial^p u_{kn}}{\partial\xi^{p_1}\partial\eta^{p_2}} \right)^2 d\xi\, d\eta$$

Отсюда, воспользовавшись представлением u_{kn} в виде тригонометрического ряда (2.6), получаем

$$\| u_{kn} \|_{W_2{}^4}^2 = 4T_k \sum_{p=0}^{4} \sum_{p_1+p_2=p} \sum_{l=0}^{\infty} | \lambda_l |^{p_1} \| S_{lk}^{(p_2)} \|_{L_2(0,1)}^2$$

Пользуясь оценками (2.23), из предыдущего равенства получаем

$$\| u_{kn} \|_{W_2{}^4}^2 \leqslant 15\, C_2 4T_k \sum_{l=0}^{\infty} \| g_{lk} \|_{L_2(0,1)}^2 = C_0{}^2 \| f_{nk} \|_{L_2(\Omega_k)}^2, \qquad C_0 = \sqrt{15\, C_2}$$

Тем самым доказана оценка (2.4) и то, что C_0 не зависит от длины прямоугольника Ω_k.

Определим в Ω последовательность функций $\zeta_k(\xi) \geqslant 0$ следующим образом:

$$\zeta_k(\xi) \begin{cases} \equiv 1, & |\xi| \leqslant T_k \\ \leqslant 1, & T_k < |\xi| < 3T_k \\ \equiv 0, & |\xi| \geqslant 3T_k \end{cases} \tag{2.24}$$

Здесь $|\zeta_k|$, $|\zeta_k'|$, $|\zeta_k''|$, $|\zeta_k'''|$, $|\zeta_k{}^{IV}|$ ограничены в Ω одной и той же константой C_3, не зависящей от k. Определим, наконец, в Ω последовательность функций

$$V_{nk} = u_{kn}(\xi, \eta)\, \zeta_k(\xi) \tag{2.25}$$

Легко показать, что последовательность (2.25) слабо компактна в $W_2{}^4(\Omega)$. Для нее имеет место оценка

$$\| V_{nk} \|_{W_2{}^4(\Omega)} \leqslant C_4 \| f_n \|_{L_2(\Omega)} \tag{2.26}$$

где постоянная C_4 зависит только от C_0 и C_3.

Покажем, что любой ее слабый предел V_n будет обобщенным решением уравнений с краевыми условиями (1.10). Для этого достаточно убедиться, что V_n удовлетворяет тождеству (2.1) при произвольной финитной функции Φ. Возьмем какое-либо Φ; оно финитно. Следовательно, для него и всех V_{nk} с достаточно большими номерами k будет справедливо тождество (2.1). Переходя в нем к пределу по подпоследовательности V_{nk_m}, для которой V_{nk} сходится слабо в $W_2{}^2(\Omega)$ к V_n, убедимся, что V_n действительно удовлетворяет (2.1) при взятом Φ.

Из (2.26) следует, что $V_n \in W_2^4(\Omega)$. Проведя в (2.1) интегрирование по частям, когда там стоит слабый предел V_n, придем к

$$\int\limits_\Omega \left[\Delta^2 V_n - R(1-\eta)\frac{\partial \Delta V_n}{\partial \xi}\right]\Phi\, d\xi\, d\eta = \int\limits_\Omega f_n \Phi\, d\xi\, d\eta$$

Вследствие произвольности функции Φ получим, что почти всюду V_n удовлетворяет уравнению (1.9). Покажем, что найдется единственный слабый предел последовательности (2.25), удовлетворяющий уравнению (1.9).

Для этого придется воспользоваться следующими формулами интегрирования по частям, справедливость которых для области Ω ($|\xi| < \infty$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$) легко устанавливается:

$$\int\limits_\Omega u \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi\, d\eta = -\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial \xi} v\, d\xi\, d\eta, \quad \int\limits_\Omega u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\xi\, d\eta = -\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial \eta} v\, d\xi\, d\eta$$

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} d\xi\, d\eta = \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi\, d\eta, \quad \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi\, d\eta = 0, \qquad u, v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$$

Пусть нашлись две функции $V_n', V_n'' \in W_2^4$, удовлетворяющие (1.10). Тогда очевидно, что $t_n = V_n' - V_n'' \in W_2^4$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 t_n - R(1-\eta)\frac{\partial \Delta t_n}{\partial \xi} = 0 \tag{2.27}$$

с нулевыми краевыми условиями

$$t_n(\xi, 0) = \frac{\partial t_n(\xi, 0)}{\partial \eta} = t_n(\xi, 1) = \frac{\partial t_n(\xi, 1)}{\partial \eta} = 0 \tag{2.28}$$

Умножив (2.27) скалярно на $\partial t_n / \partial \xi$ и проинтегрировав по частям, получим равенство

$$R\int\limits_\Omega (1-\eta)\left[\left(\frac{\partial^2 t_n}{\partial \xi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 t_n}{\partial \xi\, \partial \eta}\right)^2\right] d\xi\, d\eta = 0$$

из которого следует, что t_n не зависит от ξ, а тогда (2.27) перепишется так:

$$\partial^4 t_n / \partial \eta^4 = 0 \tag{2.29}$$

Из (2.29) и (2.28) следует, что $t_n \equiv 0$, таким образом доказана единственность.

3. Покажем сходимость метода малого параметра. Из оценки (2.26) следует

$$\| V_n \|_{W_2^4(\Omega)} \leqslant C_4 \| f_n \|_{L_2(\Omega)} \tag{3.1}$$

Из (1.11) и свойства нормы имеем

$$\| f_n \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \Bigg\| [\Delta L + L\Delta + \varepsilon L^2] V_{n-1} - R\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \frac{D(\Delta[\eta(1-\eta)^2 f(\xi), V_{n-1}])}{D(\xi, \eta)} -$$

$$- R\varphi_3 \frac{D(\Delta V_{n-1}, \psi_0)}{D(\xi, \eta)} - R\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}\left[\frac{D(L\psi_0, V_{n-1})}{D(\xi, \eta)} + \frac{D(LV_{n-1}, \psi_0)}{D(\xi, \eta)}\right]\Bigg\|_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ R\left\|\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}\right\|_{C(\Omega)} \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left\|\frac{\partial V_{n-k}}{\partial \eta}\right\|_{C(\Omega)} \left\|\frac{\partial[\Delta + \varepsilon L] V_k}{\partial \xi}\right\|_{L_2(\Omega)} +\right.$$

$$\left. + \left\|\frac{\partial V_{n-k}}{\partial \xi}\right\| C(\Omega) \left\|\frac{\partial[\Delta + \varepsilon L] V_k}{\partial \eta}\right\|_{L_2(\Omega)}\right] + \| F_n \|_{L_2(\Omega)}$$

Отсюда очевидным образом имеем

$$\|f_n\|_{L_2} \leqslant C_5 \|V_{n-1}\|_{W_2^4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(C_6\left\|\frac{\partial V_{n-1}}{\partial\eta}\right\|_C + C_7\left\|\frac{\partial V_{n-k}}{\partial\xi}\right\|_C\right)\|V_k\|_{W_2^4} + \|F_n\|_{L_2}$$

где C_5, C_6, C_7 определяются через φ_1, φ_2, $D(\xi, \eta)/D(x, y)$ и R.

Воспользовавшись теоремой вложения из W_2^2 в C [3], получим

$$\|f_n\|_{L_2} \leqslant C_8\left[\|V_{n-1}\|_{W_2^4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left\|\frac{\partial V_{n-k}}{\partial\xi}\right\|_{W_2^2} + \left\|\frac{\partial V_{n-k}}{\partial\eta}\right\|_{W_2^2}\right)\|V_k\|_{W_2^4} + \|F_n\|_{L_2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_8\left[\|V_{n-1}\|_{W_2^4} + \sum_{k=1}^{n-1}\|V_k\|_{W_2^4}\|V_{n-k}\|_{W_2^4} + \|F_n\|_{L_2}\right], \qquad C_8 = \max(C_5, C_6, C_7)$$

Отсюда

$$\|V_n\|_{W_2^4} \leqslant C_9\left[\|V_{n-1}\|_{W_2^4} + \sum_{k=1}^{n-1}\|V_k\|_{W_2^4}\|V_{n-k}\|_{W_2^4} + \|F_n\|_{L_2}\right], \quad C_9 = \max(C_8, C_0) \tag{3.2}$$

Решение (1.9), согласно свойствам нормы, допускает оценку

$$\|V_n\|_{W_2^4} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|V_n\|_{W_2^4}\varepsilon^n \tag{3.3}$$

Величина $\|V_n\|_{W_2^4}$ связана с $\|V_k\|_{W_2^4}$ $(k < n)$ соотношением (3.2). Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$C_9 X_1^2 - (1 - \varepsilon C_9) X_1 + \varepsilon C_9 \|F_1\|_{L_2} = 0 \tag{3.4}$$

При $\varepsilon = 0$ это уравнение имеет одним из своих корней $x_1 = 0$. Предполагая параметр ε малым, будем искать решение уравнения (3.4), близкое к нулю, в виде ряда по степеням параметра

$$X_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_{1,\,1}\varepsilon^n \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим рекуррентное соотношение

$$X_{n,1} = C_9\left[X_{n-1,\,1} + \sum_{k=1}^{n-1} X_{k,\,1}X_{n-k,\,1} + \|F_n\|_{L_2}\right], \qquad \|F_n\|_{L_2} = 0 \quad \text{при } n > 1$$

При $n = 1$

$$X_{1,1} \geqslant \|V_1\|_{W_2^4} \tag{3.6}$$

Пусть это имеет место для всех $l \leqslant n - 1$. Тогда из (3.2) и (3.6) следует, что и $X_{n,\,1} \geqslant \|v_n\|_{W_2^4}$, таким образом ряд (3.5) мажорирует ряд (3.3). Радиус сходимости ряда (3.5) легко определяется из (3.4)

$$\varepsilon C_9 \| 2 - \varepsilon C_9 + 4C_9\|F_1\|_{L_2}\| \tag{3.7}$$

Следовательно, при таких же условиях сходится и ряд (3.3), таким образом задача решена полностью.

Поступило 14 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Физматгиз, 1963.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
3. Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Уч. записки Лен. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, т. 197.