

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ С ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КРЫШКОЙ

Л. А. ДОРФМАН, Ю. Б. РОМАНЕНКО

(Ленинград)

Рассматриваемая задача возникает при решении различных технических вопросов, связанных с течениями вязкой жидкости в замкнутом пространстве вблизи вращающихся плоских поверхностей: диски турбомашин, упорные подшипники, ротационные вискозиметры и т. п. Приближенное решение задачи на основе упрощенной схемы течения впервые получил Шульц-Грунов [1]. Наиболее полное исследование проведено было в последнее время Гроне [2], который наметил программу решения задачи путем сращения некоторых частных решений на основе определенных гипотез о ядре потока.

С развитием электронных цифровых вычислительных машин ЭЦВМ и необходимых численных методов наиболее эффективным способом решения рассматриваемой задачи становится использование сеточных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных. Настоящая статья посвящена изложению результатов решения задачи методом сеток на ЭЦВМ.

§ 1. Основные уравнения и их преобразование. Уравнения установившегося осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости — уравнения Навье—Стокса — в цилиндрической системе координат r, φ, z имеют вид [3]

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_\varphi v_r}{r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right) \\ v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь v_r, v_φ и v_z — радиальная, окружная и осевая составляющие скорости, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость жидкости. Кроме того, имеем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

Исключим давление p из первого и третьего уравнений системы (1.1), введем функцию тока ψ и завихренность η , так что

$$v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (1.3)$$

Тогда, если ввести безразмерные величины

$$\zeta = \frac{z}{s}, \quad \xi = \frac{r}{s}, \quad G = \frac{v_\varphi}{\omega r}, \quad \Omega = \frac{\eta s}{\omega r}, \quad f = \frac{\psi}{\omega s r^2}, \quad N_{Re} = \frac{\omega s^2}{\nu} \quad (1.4)$$

то систему (1.1) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \Omega \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} &= N_{Re} \left[\xi \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \left(\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + 2f \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} - \frac{\partial G^2}{\partial \zeta} \right] \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{\partial G}{\partial \xi} &= N_{Re} \left[\xi \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial G}{\partial \xi} - \left(\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + 2f \right) \frac{\partial G}{\partial \zeta} + 2G \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

При этом

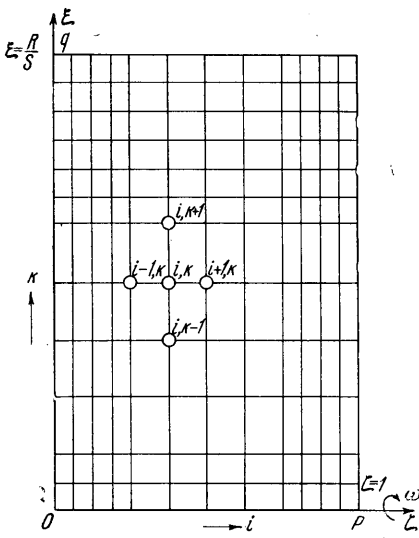
$$v_r = \omega \xi \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad v_z = -\omega \left(2f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (1.6)$$

Граничные условия задачи (фиг. 1) определяются условиями прилипания к твердым стенкам

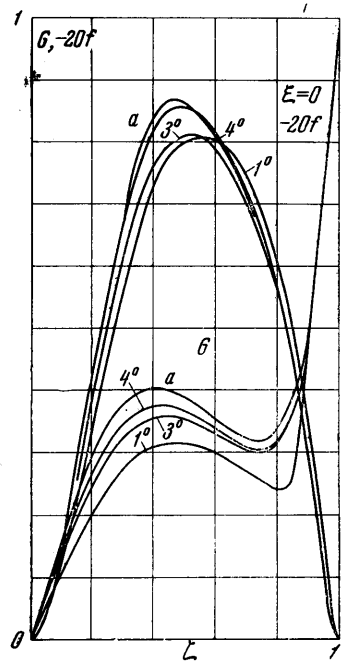
$$\begin{aligned} v_r = v_z = v_\varphi = 0 & \quad \text{при } \zeta = 0 \quad (0 < \xi \leq R/s) \text{ и при } \xi = R/s \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \\ v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = r\omega & \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (0 < \xi < R/s) \end{aligned} \quad (1.7)$$

а на оси вращения ($\xi = 0$) — условиями симметрии

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \frac{\partial G}{\partial \xi} = 0 \quad (1.8)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

§ 2. Сеточные уравнения и их решение. Введем прямоугольную сетку с узлами

$$\begin{aligned} \zeta_i = i\Delta\zeta, \quad \Delta\zeta = 1/p, \quad (i = 0, 1, \dots, p) \\ \xi_k = k\Delta\xi, \quad \Delta\xi = (R/s)/q \quad (k = 0, 1, \dots, q) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Каждое из уравнений (1.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + A \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + B \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + C\varphi + D = 0 \quad (2.2)$$

Здесь A, B, C, D — функции от искомых величин, их первых производных и независимых переменных ξ, ζ . Соответствующие (2.2) сеточные уравнения в точке (i, k) (фиг. 1) получаются путем аппроксимации частных производных разностными отношениями

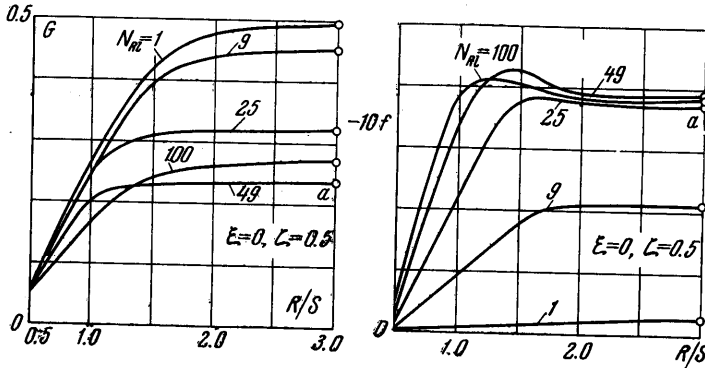
$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{i, k} &\approx \frac{\varphi_{i, k+1} - \varphi_{i, k-1}}{2\Delta\xi}, & \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right)_{i, k} &\approx \frac{\varphi_{i, k+1} - 2\varphi_{i, k} + \varphi_{i, k-1}}{(\Delta\xi)^2} \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right)_{i, k} &\approx \frac{\varphi_{i+1, k} - \varphi_{i-1, k}}{2\Delta\zeta}, & \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right)_{i, k} &\approx \frac{\varphi_{i+1, k} - 2\varphi_{i, k} + \varphi_{i-1, k}}{(\Delta\zeta)^2} \end{aligned}$$

В результате получим, разрешив относительно $\Phi_{i,k}$

$$\Phi_{i,k}^{(n)} = \frac{1}{2(\tau + 1/\tau) - c} \left[(\tau + a) \Phi_{i,k+1}^{(n)} + (\tau - a) \Phi_{i,k-1}^{(n)} + \left(\frac{1}{\tau} + b\right) \Phi_{i+1,k}^{(n-1)} + \left(\frac{1}{\tau} - b\right) \Phi_{i-1,k}^{(n-1)} + d \right] \quad (2.3)$$

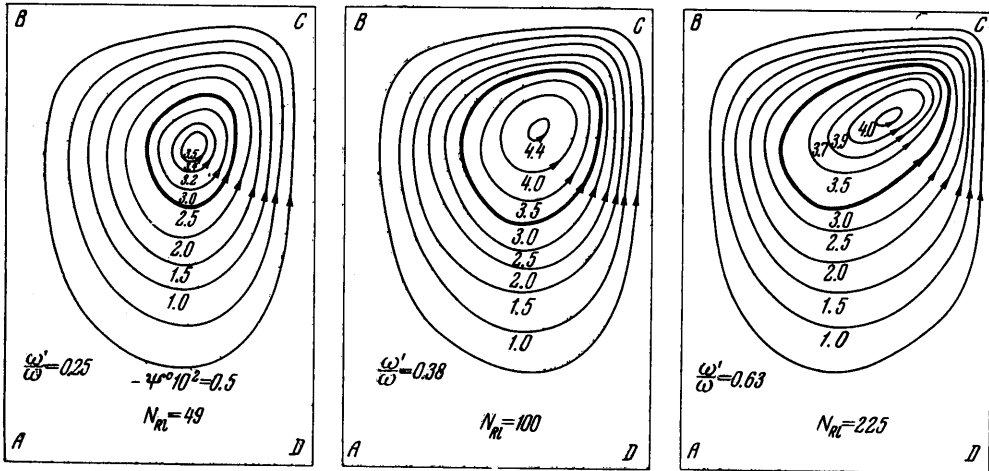
$$(\tau = \Delta\zeta : \Delta\xi, a = 1/2 A\Delta\zeta, b = 1/2 B\Delta\xi, c = C\Delta\zeta\Delta\xi, d = D\Delta\zeta\Delta\xi)$$

Здесь, кроме того, расставлены индексы (n) и $(n-1)$, указывающие номера последовательных приближений при решении этих уравнений



Фиг. 3

методом Зейделя. Заметим, что входящие в выражения a, b, c и d первые производные $\partial f / \partial \xi$ и $\partial f / \partial \zeta$ также вычисляются по приведенным выше разностным отношениям с использованием всех вновь найденных значений $\Phi_{i,k}$.



Фиг. 4

Для проведения итераций по (2.3) необходимо иметь соответствующие сеточные граничные условия. Для функции f условием на твердых границах будет $f = 0$.

Необходимые граничные условия для G следуют непосредственно из (1.7), (1.8). Чтобы получить сеточные граничные условия для Ω , разложим функцию f в ряд Тейлора вблизи твердой границы и используем

(1.6)—(1.7). Например, вблизи левой границы ($i = 0, k = 1, 2, \dots, q - 1$)

$$f_{1,k} = f_{0,k} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{0,k} \Delta \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\right)_{0,k} (\Delta \xi)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3}\right)_{0,k} (\Delta \xi)^3 + \dots \quad (2.4)$$

В соответствии с (1.6), (1.7) и граничным условием $f = 0$ имеем $(\partial f / \partial \xi)_{0,k} \equiv 0$ на всей границе, поэтому $(\partial^2 f / \partial \xi^2)_{0,k} = 0$; тогда из первого уравнения (1.5) следует

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3}\right)_{0,k} = \Omega_{0,k}$$

Аналогично

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2 \partial \zeta}\right)_{0,k} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta}\right)_{0,k} = 0 \quad (2.5)$$

Поэтому из первого уравнения (1.5), продифференцированного по ζ в точке $(0, k)$, будем иметь

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3}\right)_{0,k} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right)_{0,k} \approx \frac{\Omega_{1,k} - \Omega_{0,k}}{\Delta \zeta}$$

Подставив в (2.4), получим окончательно

$$\Omega_{0,k} = \frac{3}{(\Delta \xi)^2} (f_{1,k} - f_{0,k}) - 0.5 \Omega_{1,k} \quad (k = 1, \dots, q - 1) \quad (2.6)$$

Для других границ аналогично находим

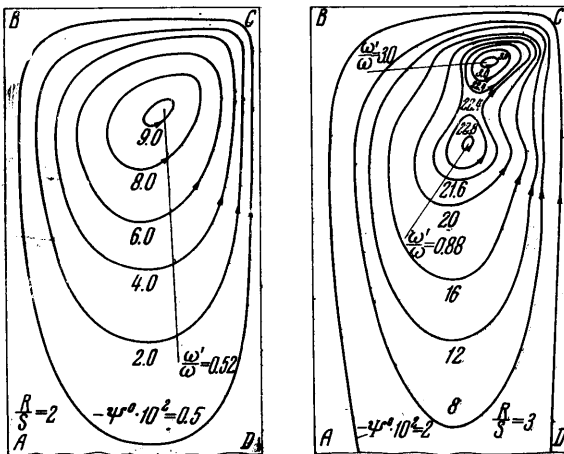
$$\Omega_{p,k} = \frac{3}{(\Delta \xi)^2} (f_{p-1,k} - f_{p,k}) - 0.5 \Omega_{p-1,k} \quad (k = 1, \dots, q - 1) \quad (2.7)$$

$$\Omega_{i,q} = \frac{3}{(\Delta \xi)^2 [1 - (R/s)^{-1} \Delta \xi]} (f_{i,q-1} - f_{i,q}) - \frac{0.5}{1 - (R/s)^{-1} \Delta \xi} \Omega_{i,q-1} \quad (i = 1, \dots, p - 1) \quad (2.8)$$

Условия (1.8) принимают вид

$$f_{i,0} = f_{i,1}, \quad \Omega_{i,0} = \Omega_{i,1}, \quad G_{i,0} = G_{i,1}, \quad (i = 1, \dots, p - 1) \quad (2.9)$$

Расчет трех полей функций f, Ω, G ведется, согласно (2.3), (2.6)—



Фиг. 5

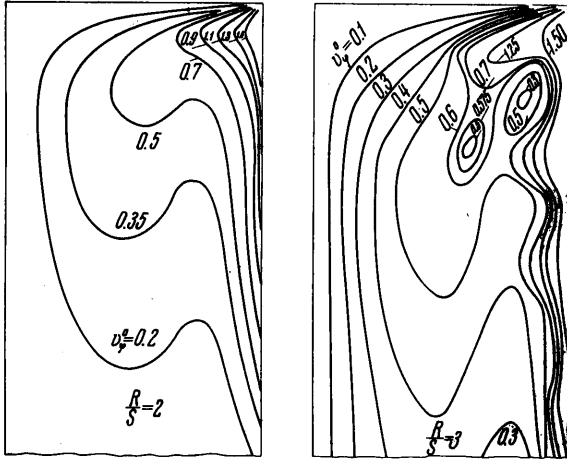
результат $\Phi_{i,k}^{(n)}$ непосредственного расчета по формуле (2.3), а некоторое

(2.9), по строкам слева направо и сверху вниз. При этом в каждой точке и при каждой итерации подсчитываются все три функции — вначале f , затем Ω , потом G — с использованием всех обновленных значений искомых величин. Такая последовательность вычислений обеспечивает лучшую сходимость итераций. Другое средство, используемое для той же цели, — применение параметра релаксации κ , когда в качестве исходного значения для следующей итерации берется не ре-

осредненные $\varphi_{i,k}^{(n-1)}$, равные

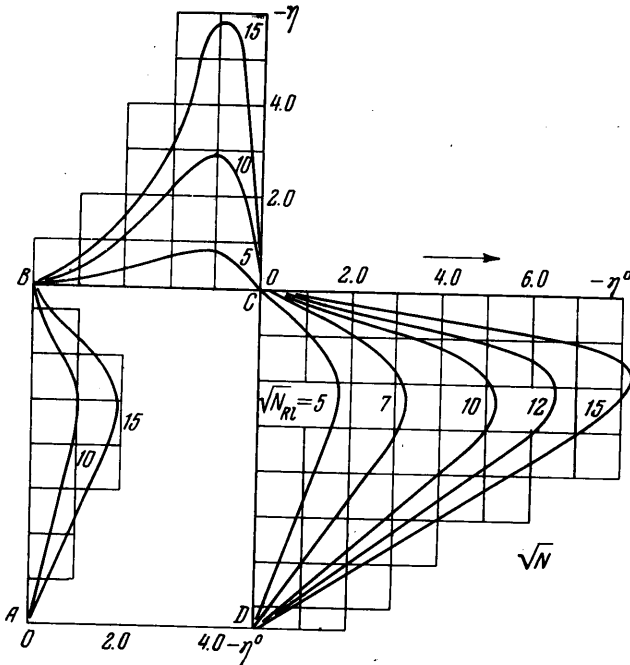
$$\kappa \varphi_{i,k}^{(n)} + (1 - \kappa) \varphi_{i,k}^{(n-1)}$$

Величины κ определялись путем подбора (они не превышали 1), а для граничных значений Ω выбиралось $\kappa = 0.5$.



Фиг. 6

Ввиду того что наиболее резкое изменение функций происходит вблизи твердых границ, в этих зонах для достижения необходимой точности использовалась вдвое более густая сетка.



Фиг. 7

§ 3. Результаты расчетов и их анализ. Расчеты проводились на различных сетках: Сетки 1° и 3° при $\Delta \zeta = 1/8$, у каждой стенки по два таких участка разбивались пополам ($\Delta \zeta = 1/16$), всего — 12 участков.

Сетка 2° при $\Delta\zeta = 1/14$, у кожуха 4 участка по $\Delta\zeta = 1/28$, у диска — 6 таких участков, всего — 19 участков.

Сетка 4° при $\Delta\zeta = 1/15$, у кожуха — 4 участка по $\Delta\zeta = 1/30$, у диска — 6 таких участков, всего — 20 участков.

Сетка 5° при $\Delta\zeta = 1/25$, у кожуха — 8 участков по $\Delta\zeta = 1/50$, у диска — 12, всего — 35 участков.

Таблица 1

Значения функции $-f$ для сеток разной густоты 1°, 2°, 5° при $R/s = 2$ и $N_{Re} = 25$

ζ	$\xi = 0$			$\xi = 1.375$			$\xi = 1.875$		
	1°	2°	5°	1°	2°	5°	1°	2°	5°
$1/16$	0.0014	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013	0.0013	0.0002	0.0002	0.0002
$1/8$	0.0053	0.0053	0.0053	0.0044	0.0044	0.0044	0.0003	0.0003	0.0003
$3/16$	0.0107	0.0107	0.0108	0.0088	0.0088	0.0090	0.0006	0.0006	0.0006
$1/4$	0.0171	0.0171	0.0173	0.0138	0.0140	0.0142	0.0010	0.0011	0.0011
$3/8$	0.0296	0.0296	0.0299	0.0238	0.0253	0.0256	0.0020	0.0022	0.0023
$1/2$	0.0379	0.0375	0.0380	0.0305	0.0321	0.0323	0.0029	0.0036	0.0038
$5/8$	0.0380	0.0374	0.0376	0.0312	0.0320	0.0326	0.0034	0.0036	0.0038
$3/4$	0.0284	0.0277	0.0279	0.0237	0.0240	0.0242	0.0033	0.0033	0.0033
$13/16$	0.0203	0.0201	0.0204	0.0171	0.0171	0.0172	0.0027	0.0027	0.0027
$7/8$	0.0114	0.0113	0.0114	0.0097	0.0097	0.0097	0.0019	0.0019	0.0019
$15/16$	0.0036	0.0036	0.0038	0.0030	0.0030	0.0030	0.0007	0.0007	0.0007

Таблица 2

Сопоставление результатов расчетов на оси вращения ($\xi = 0$) с автомодельным решением ($R/s = \infty$)

ζ	$-f$			G		
	$R/s = \infty$	$R/s = 2.5$	$R/s = 3.0$	$R/s = \infty$	$R/s = 2.5$	$R/s = 3.0$
$N_{Re} = 49$						
$1/16$	0.0014	0.0014	0.0014	0.0348	0.0347	0.0348
$1/8$	0.0050	0.0050	0.0050	0.0689	0.0691	0.0692
$3/16$	0.0100	0.0102	0.0103	0.1010	0.1024	0.1026
$1/4$	0.0162	0.0164	0.0165	0.1342	0.1339	0.1342
$3/8$	0.0287	0.0291	0.0293	0.1900	0.1897	0.1900
$1/2$	0.0381	0.0390	0.0392	0.2360	0.2356	0.2360
$5/8$	0.0414	0.0421	0.0422	0.2834	0.2839	0.2841
$3/4$	0.0340	0.0347	0.0348	0.3740	0.3747	0.3749
$13/16$	0.0258	0.0263	0.0263	0.4595	0.4606	0.4608
$7/8$	0.0156	0.0158	0.0158	0.5893	0.5905	0.5907
$15/16$	0.0053	0.0054	0.0054	0.7703	0.7732	0.7734
$N_{Re} = 100$						
$1/16$	0.0017	0.0017	0.0017	0.0497	0.0501	0.0502
$1/8$	0.0060	0.0061	0.0060	0.0972	0.0990	0.1001
$3/16$	0.0119	0.0120	0.0120	0.1420	0.1441	0.1307
$1/4$	0.0185	0.0186	0.0175	0.1813	0.1843	0.1608
$3/8$	0.0308	0.0308	0.0300	0.2408	0.2430	0.2209
$1/2$	0.0390	0.0390	0.0370	0.2667	0.2690	0.2452
$5/8$	0.0417	0.0414	0.0400	0.2676	0.2690	0.2559
$3/4$	0.0368	0.0365	0.0360	0.2782	0.2810	0.2801
$13/16$	0.0298	0.0296	0.0285	0.3302	0.3320	0.3330
$7/8$	0.0196	0.0194	0.0190	0.4490	0.4504	0.4523
$15/16$	0.0076	0.0075	0.0065	0.6700	0.6719	0.6707

Сравнение с автомодельным решением для $R/s = \infty$ [4] значений функций f и G на оси вращения AD может служить некоторым критерием точности расчетов.

В радиальном направлении выбирались 12 участков (сетки 1° , 2°) и 28 участков (сетки 3° , 4° , 5°), причем у цилиндрической стенки кожуха — 6 половинных участков и вблизи оси — 2.

Влияние выбора сетки на значения функции f при трех значениях радиуса $\xi = 0, 1.376, 1.875$ ($R/s = 2$, $N_{Re} = 25$) видно из табл. 1. Для сеток 2° и 5° решения практически совпадают. В табл. 2. приводится сопоставление полученных значений f и G на оси вращения AD при $R/s = 2.5$ и 3.0 и $N_{Re} = 49$ и 100 . Это сопоставление указывает на достаточную точность расчетов даже на сравнительно грубых сетках (1° , 2°). При увеличении числа N_{Re} свыше 100 расхождения на этих сетках могут достигать больших размеров. Из фиг. 2, построенной для $R/s = 3$ и $N_{Re} = 144$, видно, что даже для сетки 4° автомодельное решение на оси не достигается (расхождение не свыше 7.5%).

При малых R/s влияние цилиндрического кожуха на характер течения во всей области велико (фиг. 3 для f и G при $\xi = 0.5$), однако уже при $R/s = 3$, начиная с $N_{Re} = 1$ и выше, вблизи оси вращения имеет место хорошее совпадение с автомодельным решением a .

Распределение линий тока $\psi^\circ = \psi/\psi_s^3 = \text{const}$ в меридиональном сечении при малых числах

$$N_{Re} = \frac{\omega R^2}{\nu} = \left(\frac{R}{s}\right)^2 N_{Re}$$

имеет характерный вид вторичного течения, указанного в работах [1,2]. Причем с ростом N_{Re} (фиг. 4 для $R/s = 1.5$ и $N_{Re} = 49, 100, 225$) эти линии входят к стенкам AB , а ядро вторичного течения перемещается в направлении верхней кромки вращающегося диска CD и вытягивается в этом направлении от оси вращения AD .

С увеличением R/s при $N_{Re} = 144$ наблюдается (фиг. 5) дробление ядра вторичного течения и появление второго ядра. При этом возрастает угловая скорость ω' вторичного течения жидкости в ядрах.

С ростом R/s и N_{Re} становится более неравномерным и распределение окружной составляющей скорости v_φ : на фиг. 6 представлено изменение $v_\varphi^\circ = v_\varphi/\omega s = \text{const}$ при переходе от $R/s = 2$ к $R/s = 3$ для $N_{Re} = 144$.

На фиг. 7 видно, как изменяется завихренность $\eta^\circ = \eta/\omega$ на твердых границах для $R/s = 1.5$ при различных N_{Re} .

Своего максимального значения η° достигает на вращающемся диске CD примерно на $3/4$ его радиуса.

Поступило 13 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Schult z - G r u n o w F. Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen, Z. angew. Math. und Mech. 1935, No 4, B. 15.
2. G r o h n e D. Über die laminare Strömung in einer kreiszylindrischen Dose mit rotierendem Deckel, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl, 1956, No 1.
3. Д о р ф м а н Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. Физматгиз, 1960.
4. Д о р ф м а н Л. А. Течение вязкой жидкости между неподвижным и обдуваемым вращающимися дисками. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1966, № 2.