ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ

Г. З. ГЕРШУНИ, Е. М. ЖУХОВИЦКИЙ, Е. Л. ТАРУНИН

(Пермь)

Исследование тепловой конвекции в замкнутой полости представляет большой интерес в связи с проблемой теплопередачи. Задача может быть решена сравнительно просто в случае малой характерной разности температур при боковом подогреве, когда равновесие невозможно и при сколь угодно малом горизонтальном градиенте температуры возникает медленное движение. В этом случае для исследования движения можно применять метод малого параметра, основанный на разложении скорости, температуры и давления в ряды по степеням числа Грассхофа — безразмерного параметра, характеризующего интенсивность конвекции [1-4]. В рассмотренных задачах удавалось найти только два-три члена этих рядов. Найденные в этом приближении решения описывают лишь слабые нелинейные эффекты и область их применимости ограничена, естественно, небольшими значениями чисел Грассхофа (не более 10^3).

С увеличением разности температур характер движения постепенно изменяется — у границ полости формируется конвективный пограничный слой, в котором сосредоточены основные градиенты температуры и скорости; остальная часть жидкости образует ядро течения. На основании анализа уравнений движения для плоского случая Батчелор [4] высказал предположение, что ядро является изотермическим и вращается с постоянным и однородным вихрем скорости. Значение вихря скорости в ядре должно определяться как собственное число задачи о замкнутом пограничном слое. В работах [5,6] по схеме Батчелора был рассмотрен замкнутый конвективный пограничный слой в горизонтальном цилиндре и плоском вертикальном слое. С помощью интегрального метода были определены параметры пограничного слоя и вихрь скорости в ядре. Попытка аналитического решения уравнений пограничного слоя для горизонтального цилиндра методом озееновской линеаризации сделана в работе [7].

Между тем, результаты экспериментов, в которых исследовалась структура конвективного движения различных жидкостей и газов в замкнутых полостях разных форм [8-13], определенно противоречат гипотезе Батчелора. Измерения показывают, что ядро не является изотермическим; напротив, в ядре имеется постоянный вертикальный градиент температуры, направленный вверх. Далее, ядро оказывается практически неподвижным. В нем обнаруживаются попятные движения со скоростями, много меньшими скоростей в пограничном слое.

Выяснению закономерностей конвективного движения в замкнутой полости при больших разностях температур может помочь применение численных методов. В работе [14] плоская задача о стационарной конвекции воздуха в полости квадратного сечения решалась методом разложения по ортогональным полиномам. Автору удалось продвинуться в расчете лишь до значения числа Грассхофа $G = 10^4$. При таких значениях числа G формирование пограничного слоя и ядра еще только начинается, поэтому вывод автора о соответствии численных результатов с гипотезой Батчелора является неосновательным. К тому же, раздвоение центральной изотермы (фиг. 3 работы [14]), на основании которого сделан вывод о формировании изотермического ядра, по-видимому, является результатом недоразумения, так как изотерма такого вида явно противоречит симметрии решения.

В работе [15] методом конечных разностей получено решение задачи о сильной конвекции газа в горизонтальном цилиндре, боковые стороны которого имеют разные температуры. Согласно результатам расчета и в соответствии с экспериментальными данными [9], в полости имеется практически неподвижное ядро. Поскольку, однако, авторы исходили из уравнений конвекции в приближении пограничного слоя, они не получили детальных сведений о структуре ядра, в частности, о распределении в нем температуры.

Ниже приводятся результаты решения методом конечных разностей полной нелинейной задачи о плоском конвективном движении в полости квадратного сечения. Вертикальные границы полости поддерживаются при постоянных температурах; на горизонтальных границах температура меняется линейно. Получено распределение скорости и температуры для значений числа Грассхофа в интервале $0 < G \leqslant 4 \cdot 10^5$ при значении числа Прандтля $P = 1$. Результаты расчета позволяют проследить за формированием замкнутого пограничного слоя и очень медленно движущегося ядра с постоянным вертикальным градиентом температуры. Найден тепловой поток через полость в зависимости от числа Грассхофа.

1. Рассмотрим плоское конвективное движение вязкой несжимаемой жидкости в длинном горизонтальном цилиндре квадратного сечения. Оси x и y выберем в плоскости сечения; ось x направим горизонтально, ось y — вертикально вверх. Температуру жидкости на вертикальной границе области $x = 0$ примем за начало отсчета, температура на границе $x = a$ равна Θ; вдоль горизонтальных границ $y = 0$ и $y = a$ температура изменяется линейно. Уравнения движения жидкости имеют вид

$$\frac{\partial \triangle\psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\triangle\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\triangle\psi}{\partial y}\right) = \triangle\triangle\psi - G\frac{\partial T}{\partial x} \qquad \left(G = \frac{g\beta\Theta a^3}{\nu^2}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{1}{P}\triangle T \qquad \left(P = \frac{\nu}{\chi}\right) \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1), (1.2) для функции тока $\psi(x, y, t)$ и температуры $T(x, y, t)$ записаны в безразмерной форме; выбраны следующие единицы: расстояния — сторона квадрата a, времени a^2/ν, температуры Θ, функции тока ν. В уравнения входят безразмерные параметры G — число Грассхофа и P — число Прандтля.

Безразмерная скорость жидкости связана с функцией тока соотношениями $v_x = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial x$; проекция вихря скорости на ось z равна

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_z = -\triangle\psi \equiv \varphi \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1.3}$$

На границах области скорость равна нулю и задана температура

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,\ T = 0 \text{ при } x = 0; \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad T = 1 \text{ при } x = 1 \tag{1.4}$$

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad T = x \quad \text{при } y = 0,\ y = 1$$

Уравнения (1.1)—(1.3) запишем в конечно-разностной форме, используя центральные разности для пространственных производных

$$\varphi_{i,k}^{n+1} = \varphi_{i,k}^{n} + \Big\{\triangle\varphi_{i,k}^{n} + \frac{G}{2h}(T_{i+1,k}^{n} - T_{i-1,k}^{n}) - \tag{1.5}$$

$$- \frac{1}{4h^2}\left[(\psi_{i,k+1}^{n} - \psi_{i,k-1}^{n})(\varphi_{i+1,k}^{n} - \varphi_{i-1,k}^{n}) - (\psi_{i+1,k}^{n} - \psi_{i-1,k}^{n})(\varphi_{i,k+1}^{n} - \varphi_{i,k-1}^{n})\right]\Big\}\tau$$

$$T_{i,k}^{n+1} = T_{i,k}^{n} + \Big\{\frac{1}{P}\triangle T_{i,k}^{n} - \frac{1}{4h^2}\left[(\psi_{i,k+1}^{n+1} - \psi_{i,k-1}^{n+1}) \times\right.$$

$$\left. \times (T_{i+1,k}^{n} - T_{i-1,k}^{n}) - (\psi_{i+1,k}^{n+1} - \psi_{i-1,k}^{n+1})(T_{i,k+1}^{n} - T_{i,k-1}^{n})\right]\Big\}\tau \tag{1.6}$$

$$\triangle\psi_{i,k}^{n+1} = -\varphi_{i,k}^{n+1} \tag{1.7}$$

В уравнениях (1.5)—(1.7) лапласианы $\Delta\varphi_{i,k}$, $\Delta T_{i,k}$ и $\Delta\psi_{i,k}$ определены формулой

$$\triangle f_{i,k} = \frac{1}{h^2}(f_{i+1,k} + f_{i-1,k} + f_{i,k+1} + f_{i,k-1} - 4f_{i,k})$$

и введены обозначения

$$f_{i,k}^{n} \equiv f(x_i, y_k, t_n), \qquad t_n = n\tau \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$x_i = ih \quad (i = 0, 1, 2 \ldots I), \qquad y_k = kh \quad (k = 0, 1, 2 \ldots K)$$

Граничные условия (1.4) в разностной форме имеют вид [16, 17]

$$\psi_{0,k}{}^n = \psi_{I,k}{}^n = \psi_{i,0}{}^n = \psi_{i,K}{}^n = 0, \qquad \varphi_{0,k}{}^n = \frac{2}{h^2}\psi_{i,k}{}^n$$

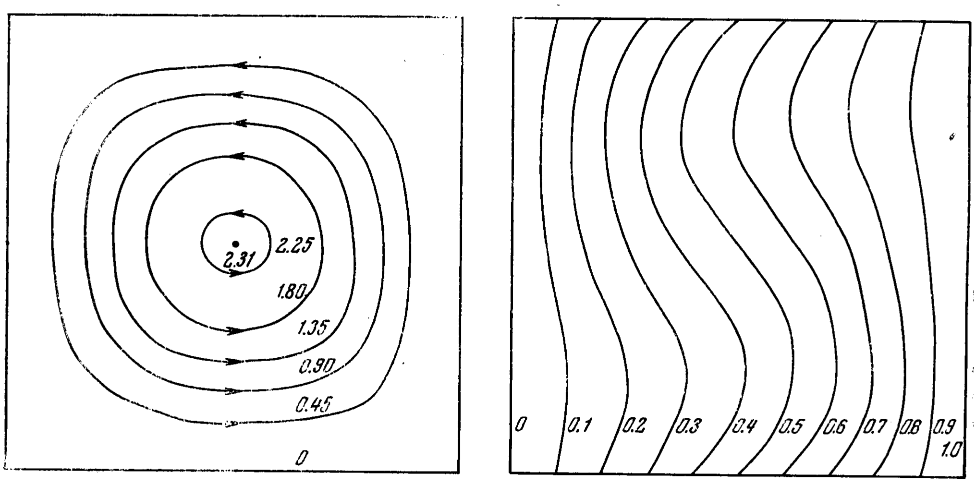
$$\varphi_{I,K}{}^n = \frac{2}{h^2}\psi_{I-1,k}{}^n, \quad \varphi_{i,0}{}^n = \frac{2}{h^2}\psi_{i,1}{}^n, \quad \varphi_{i,K}{}^n = \frac{2}{h^2}\psi_{i,K-1}{}^n \tag{1.8}$$

$$T_{0,k}{}^n = 0, \quad T_{I,k}{}^n = 1, \quad T_{i,0}{}^n = T_{i,K}{}^n = x_i$$

Разностная система (1.5)—(1.7) с граничными условиями (1.8) решается следующим образом. Величины $\psi_{i,k}^n$ и $T_{i,k}^n$ предполагаются в момент t_n известными для всех x_i, y_k. Тогда из уравнения (1.5) можно найти значения вихря скорости $\varphi_{i,k}^{n+1}$ во всех внутренних узлах пространственной сетки в следующий момент времени. Решая далее уравнение Пуассона (1.7), находим $\psi_{i,k}^{n+1}$, а из (1.6) определяем $T_{i,k}^{n+1}$. После этого по формулам (1.8) определяются новые граничные значения для φ^{n+1} и вся процедура повторяется для следующего момента времени. Уравнение Пуассона на каждом шаге по времени решалось методом итераций Либмана.

Вычисления производились с квадратной сеткой $h = {}^1/_{15}$. Были проведены также некоторые проверочные вычисления с более мелкой сеткой $h = {}^1/_{25}$. Шаг по времени τ выбирался из условия устойчивости счета; программа предусматривала также автоматическое изменение τ в процессе вычислений. Стационарное решение получалось в процессе установления и не зависело от начального распределения функции тока и температуры. Получены стационарные решения для 25 разных значений числа Грассхофа в интервале $0 < G \leqslant 4 \cdot 10^5$ при $P = 1$. Все расчеты проведены на ЭВЦМ «Арагац» в Вычислительном центре Пермского университета.

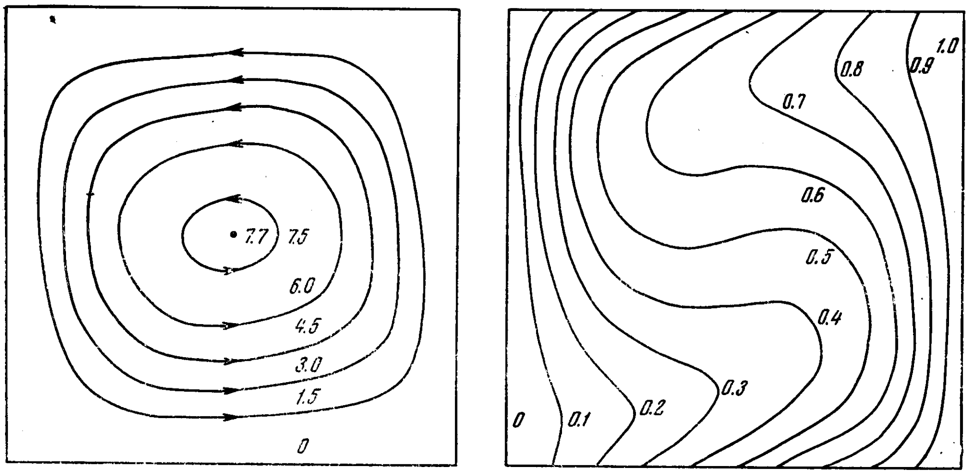
2. На фиг. 1—5 представлены функции тока (*а*) и изотермы (*б*) для некоторых значений числа Грассхофа. При слабой конвекции траектории частиц жидкости в центральной части полости близки к круговым, а изотермы искривлены медленным конвективным движением (фиг. 1; $G = 2 \cdot 10^3$). С ростом G намечается тенденция к образованию пограничного слоя и изотермы принимают S-образную форму. На фиг. 2, *б* ($G = 14 \cdot 10^3$) отчетливо видно зарождение центральной области с относительно малым градиентом температуры.



Фиг. 1 $G = 2 \cdot 10^3$

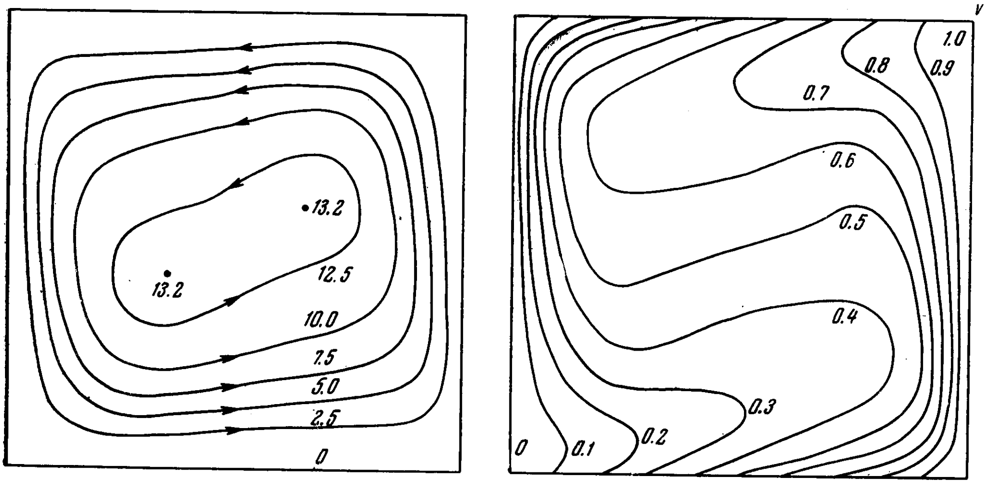
Фиг. 3—5 (G равно соответственно $80 \cdot 10^3$; $200 \cdot 10^3$; $400 \cdot 10^3$) позволяют проследить за дальнейшим формированием пограничного слоя и ядра течения по мере увеличения числа Грассхофа. Скорости в ядре оказываются гораздо меньшими, чем в пограничном слое, и образуется пара вихрей с медленным попятным движением. Полученная картина движения очень близка к экспериментальным результатам работы [13], в которой приведены траектории частиц жидкости в полости квадратного сечения. На фиг. 6 приводятся распределения продольной скорости вдоль горизонтального ($k = 9$) и вертикального ($i = 7$) разрезов для случая развитого пограничного слоя ($G = 4 \cdot 10^5$). Как видно, пограничный слой возле вертикальных границ полости выражен особенно резко.

На фиг. 3, *б* — 5, *б* видно, что с увеличением числа G в центре полости образуется и увеличивается в размерах область с постоянным вертикальным (направленным вверх) градиентом температуры. Этот градиент температуры в ядре гораздо меньше градиента в пограничном слое, однако ядро нельзя считать изотермическим, так как величина градиента температуры в нем порядка Θ/a.



Фиг. 2 $G = 14 \cdot 10^3$

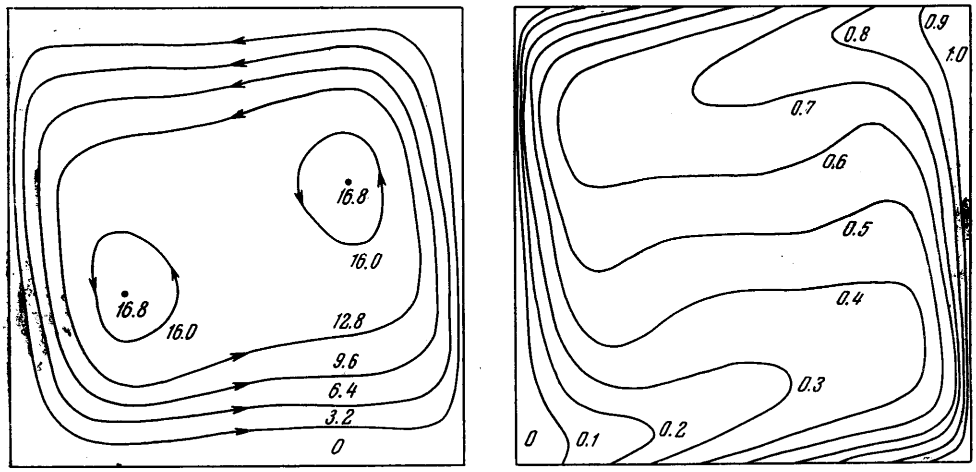
Абсолютная величина градиента температуры в центре полости A и угол α, составляемый вектором $\mathbf{A}$ с горизонтальной осью x, приводятся на фиг. 7, *а*, *б*. Из графиков видно, что с ростом G градиент $\mathbf{A}$, поворачиваясь, становится вертикальным и при $G > 2 \cdot 10^4$ его величина практически стабилизируется около значения 0.8 (в единицах Θ/a).



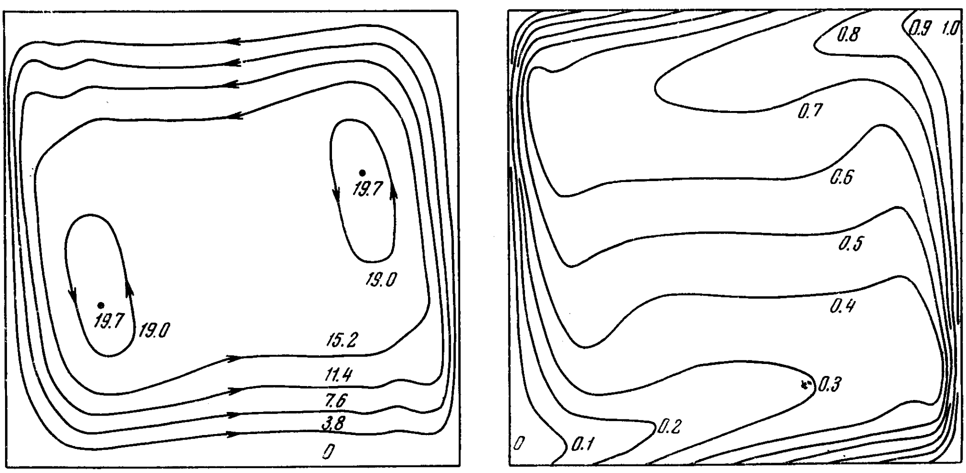
Фиг. 3 $G = 80 \cdot 10^3$

Заметим, что формирование ядра с вертикальным однородным градиентом температуры тесно связано с отсутствием в ядре заметных движений. В самом деле, уравнения Навье — Стокса и теплопроводности, как легко видеть, удовлетворяются при $\mathbf{v} = 0$, $T = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\gamma}$ ($A = \text{const}$, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вертикальный вектор).

Результаты расчета поля температур показывают, что при всех значениях числа Грассхофа G поток тепла направлен к жидкости на нагретой вертикальной границе $x = a$ и на нижней горизонтальной границе



Фиг. 4 $G=200\cdot 10^3$



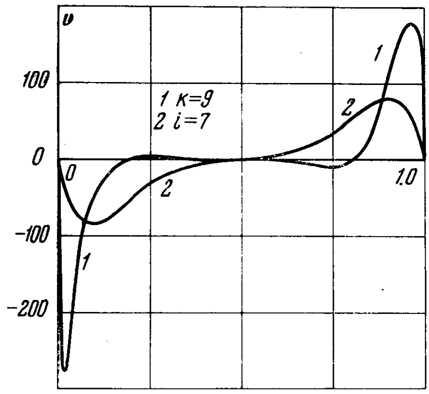
Фиг. 5 $G=400\cdot 10^3$

$y=0$; через два других участка границы тепло передается от жидкости к окружающей среде. Полный тепловой поток через полость (на единицу длины вдоль оси z) равен

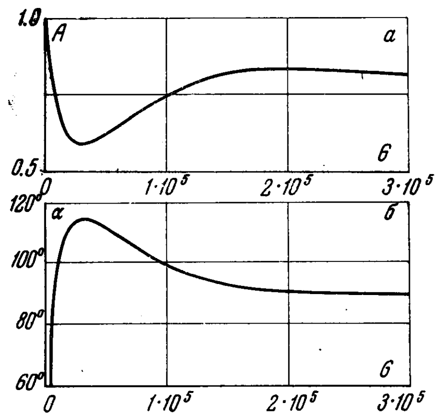
$$Q=-\varkappa\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\Gamma}dl \qquad (2.1)$$

Здесь T — размерная температура, n — нормаль к границе. Интегрирование в (2.1) производится по двум участкам границы $x=a$ и $y=0$. Тепловой поток Q можно характеризовать безразмерным числом Нуссельта $N=Q/\varkappa\Theta$. Представляет интерес также тепловой поток через вертикальную границу Q_h; соответствующее число Нуссельта

$$N_h=\frac{Q_h}{\varkappa\Theta}=-\frac{1}{\Theta}\int\limits_0^a\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{y=a}dy \qquad (2.2)$$



Фиг. 6



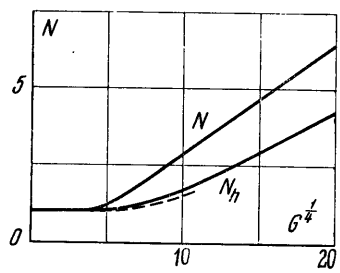
Фиг. 7

Зависимость N и N_h от G дана на фиг. 8; здесь же изображены пунктиром значения N_h, полученные в работе [14] для несколько иного значения числа Прандтля ($P = 0.73$) методом разложения по ортогональным полиномам.

При малых значениях числа Грассхофа ($G < 10^3$) имеют место зависимости

$$N = 1 + 3.25 \cdot 10^{-4} G, \qquad N_h = 1 + 5.15 \cdot 10^{-8} G^2 \qquad (2.3)$$

В формулах (2.3) член, линейный по G в выражении для N, и квадратичный по G в выражении для N_h описывают конвективные добавки к молекулярному потоку тепла при слабой конвекции.



Фиг. 8

При больших значениях G имеет место характерная для ламинарного пограничного слоя линейная зависимость безразмерных коэффициентов теплопередачи N и N_h от $G^{1/4}$; угловые коэффициенты предельных прямых равны соответственно 0.37 и 0.28.

Приведенные выше стационарные результаты относятся к интервалу значений числа Грассхофа $0 < G \leqslant 4 \cdot 10^5$. При $G > 4 \cdot 10^5$ численные расчеты не приводят к стационарным решениям: после стадии переходного режима устанавливаются стационарные колебания, при которых функция тока и температура, а также все параметры решения — градиент температуры в ядре, число Нуссельта и т. д. — осциллируют около некоторых средних значений, причем частота этих осцилляций растет с увеличением G. Появление этих колебаний, возможно, обусловлено возникновением мелкомасштабных движений, не разрешаемых сеткой. Не исключено, однако, что эти колебания связаны с физическими причинами — образованием при больших G в пограничном слое бегущих волн. Такие волны экспериментально наблюдались в работах [12,18,19].

Поступило 4 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапошников И. Г. К теории слабой конвекции. ЖТФ, 1952, т. 22, вып. 5.
2. Жуховицкий Е. М. О свободной стационарной конвекции в бесконечной горизонтальной трубе. ЖТФ, 1952, т. 22, вып. 5.
3. Драхлин Е. Х. О тепловой конвекции в сферической полости. ЖТФ, 1952, т. 22, вып. 5.

4. Batchelor G. K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. Quart. Appl. Math., 1954, vol. 12, 3.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Замкнутый конвективный пограничный слой. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 2.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О теплопередаче через вертикальную щель прямоугольного сечения при сильной конвекции. Инж.-физ., ж., 1960, т. 3, № 12.
7. Weinbaum S. Natural convection in a horizontal circular cylinder. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, p. 409.
8. Шайдуров Г. Ф. О конвективном теплопереносе через шаровую полость. ЖТФ, 1958, т. 28, № 4.
9. Martini W. R., Churchill S. W. Natural convection inside a horizontal circular cylinder. A. I. Ch. E. J., 1960, vol. 6, p. 251.
10. Сорокин М. П. Свободная конвекция жидкости в полости, происходящая в условиях пограничного слоя. Инж.-физ. ж., 1961, т. 4, № 8.
11. Eckert E. R. G., Carlson. W. O. Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperature. Int. J. Heat Mass Transfer, 1961, vol. 2, 1—2.
12. Mordchelles-Regnier G. Convection naturelle en espase confine. Entropie, 1965, 1, p. 19.
13. Elder J. W. Laminar free convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, part 1, p. 77.
14. Poots G. Heat transfer by laminar free convection in enclosed plane gas layers. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1958, vol. 11, p. 257.
15. Hellums J. D., Churchill S. W. Computation of natural convection by finite difference methods. Int. Develop. Heat Transfer, 1961, part 5, p. 985.
16. Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в технике и физике. «Энергия», 1964.
17. Симуни Л. М. Численное решение некоторых задач движения вязкой жидкости. Инж. ж., 1964, т. 14, № 3.
18. Шайдуров Г. Ф. Устойчивость конвективного пограничного слоя в жидкости, заполняющей горизонтальный цилиндр. Инж.-физ. ж., 1964, т. 2, № 12.
19. Elder J. W. Turbulent free convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, part 1, p. 99.