№ 5 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1966

О ВЛИЯНИИ ВИБРАЦИИ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ

С. М. ЗЕНЬКОВСКАЯ, И. Б. СИМОНЕНКО

(Ростов-на-Дону)

В [1] выведены уравнения, описывающие конвекцию в поле силы тяжести, и введен критерий, определяющий возникновение конвекции.

В данной работе рассматривается случай, когда на жидкость, заключенную в некотором сосуде, кроме сил тяжести, действуют еще вибрационные силы. Эти силы возникают в результате вибрации сосуда вдоль вертикальной оси. Для исследования влияния вибраций применяется метод осреднения [2,3] по малым вибрациям. Неизвестные разыскиваются в виде суммы двух слагаемых: медленно изменяющегося по времени и быстро изменяющегося слагаемого малой амплитуды.

Составляются осредненные уравнения конвекции (§ 1).

Рассматривается случай плоской горизонтальной полосы и, в предположении выполнения принципа изменения устойчивости, вводятся два параметра, определяющие возникновение конвекции. Один из них уже известный [1] — произведение чисел Грасхофа и Прандтля. Второй, возникающий в результате действия вибрационных сил, видимо, вводится здесь впервые. Выводы относительно влияния вибраций на возникновение конвекции сделаны (§ 3) для модельной задачи: в предположении пространственно-периодических возмущений (не учитывающих истинных граничных условий). В этом случае вибрации стабилизируют состояние относительного покоя, причем можно так выбрать скорость вибрации a, что будет иметь место устойчивость при всех градиентах температуры A (см. (3.7)).

Установлено, что при наличии вибрации (даже малой) состояние относительного покоя устойчиво при высоких градиентах температуры. Кроме того, если известно, что при заданных значениях скорости вибрации $a = a_0$ и градиента температуры $A = A_0$ состояние относительного покоя устойчиво, то можно, отправляясь от значений $a = 0$, $A = 0$, одновременным изменением a и A достичь указанных значений (a_0, A_0), оставаясь в области устойчивости [1]. Эти выводы, разумеется, справедливы для вибраций с достаточно высокой частотой, позволяющей применять метод осреднения. Обоснование метода здесь не приводится.

Исследование на модельной задаче дает представление о качественной картине явления.

Следует ожидать, что сделанные качественные выводы справедливы и в истинных граничных условиях. Авторы надеются в ближайшее время провести эти вычисления и дать обоснование предлагаемого метода.

§ 1. Осреднение уравнений конвекции. Свободная конвекция описывается следующей системой уравнений [1] (стр. 261):

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}'\nabla)\,\mathbf{v}' = -\nabla p' + \nu\Delta\mathbf{v}' - \beta\mathbf{g}T', \quad \partial T'/\partial t + \mathbf{v}'\nabla T' = \chi\Delta T', \quad \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{v}'(x, t)$ — скорость движения жидкости, $T'(x, t)$ — температура, $p'(x, t)$ — давление, ν, β, χ — коэффициенты соответственно вязкости, теплового расширения, температуропроводности, которые будем считать постоянными; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — ускорение силы тяжести. Плотность жидкости полагаем равной единице.

Пусть на границе S задана температура $f(s)$ и пусть область, в которой заключена жидкость, колеблется по закону $(a/\omega \sin \omega t)$ вдоль вертикальной оси. Переходя к подвижной системе координат и рассматривая отно-

[1] Заметим, что, вообще говоря, состояние относительного покоя нельзя стабилизировать за счет одного лишь повышения градиента, так как в ходе его увеличения можно попасть в зону неустойчивости.

сительные скорости, уравнения (1.1) и граничные условия записываем следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}'\nabla)\mathbf{v}' = -\nabla p' + \nu\Delta\mathbf{v}' - \mathbf{j}\beta(a\omega\sin\omega t - g)T' \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}'\nabla T' = \chi\Delta T', \quad \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0, \quad v'|_S = 0, \quad T'|_S = f(s)$$

Здесь $\mathbf{v}'$ — относительная скорость, $\mathbf{j}$ — единичный вектор, направленный вверх. К задаче (1.2) применяем метод осреднения в предположении, что имеют место вибрации высокой частоты ($\omega \to \infty$). По аналогии с методом осреднения, изложенным в [2] (стр. 119), будем искать неизвестные $\mathbf{v}'$, T', p' в виде суммы «плавного» члена ($\mathbf{v}$, T, p) и быстро изменяющегося слагаемого (ζ, η, θ)

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \zeta, \qquad T' = T + \eta, \qquad p' = p + \theta$$

Если подставить эти выражения в систему (1.2) и в каждом из уравнений сохранить только главные вибрационные члены, то функции ζ, η, θ определяются из системы

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla\theta - \mathbf{j}\omega\beta a T\sin\omega t \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\zeta\nabla T, \qquad \operatorname{div}\zeta = 0 \qquad (1.3)$$

Решаем эту систему в предположени, что за промежуток времени длиной $2\pi / \omega$, в течении которого функции ζ, η, θ могут существенно измениться, «плавная» температура T изменяется мало, и потому на этом интервале времени ее можно считать постоянной. Функции ζ, η, θ явно выражаются через функцию T следующим образом. Исключим давление θ, применяя к первому уравнению системы (1.3) оператор Π проектирования на подпространство соленоидальных векторов [4] (стр. 34). В результате получим уравнение для определения функции ζ

$$\partial\zeta/\partial t = -\omega\beta a \sin\omega t\mathbf{w} \qquad (1.4)$$

Вектор $\mathbf{w} = \Pi(\mathbf{j}T)$ определяется условиями

$$\mathbf{w} = \mathbf{j}T + \operatorname{grad}\varphi, \qquad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \qquad w_n|_S = 0 \qquad (1.5)$$

где w_n — проекция $\mathbf{w}$ на внешнюю нормаль.

Интегрируя уравнение (1.4), получим

$$\zeta = \beta a\cos\omega t\mathbf{w} \qquad (1.6)$$

Функцию η находим из системы (1.3)

$$\eta = -a / \omega\,\beta\sin\omega t(\mathbf{w}\nabla T) \qquad (1.7)$$

Затем подставляем функции $\mathbf{v}'$, T', p' в систему (1.2), учитывая формулы (1.6), (1.7).

Полученную систему уравнений вместе с граничными условиями осредняем по периоду времени $2\pi/\omega$, считая, что среднее от функций $\mathbf{v}$, T, p за этот период времени равно этим же функциям.

В результате получим осредненную систему уравнений конвекции

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu\nabla\mathbf{v} + \mathbf{j}\beta g T + \mathbf{j}\frac{\beta^2 a^2}{2}(\mathbf{w}\nabla T) - \frac{\beta^2 a^2}{2}(\mathbf{w}\nabla)\mathbf{w}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{w} = \Pi(\mathbf{j}T) \qquad (1.8)$$

$$\mathbf{v}|_S = 0, \qquad T|_S = f(s), \qquad w_n|_S = 0$$

§ 2. Условия возникновения конвекции. Рассмотрим случай, когда жидкость заключена в плоской горизонтальной полосе шириной l $(0 < y \leqslant l)$. На нижней и верхней границах заданы температуры T_1, T_2. Известно, что подогреваемая снизу жидкость может находиться в состоянии покоя, если температура изменяется линейно вдоль вертикальной оси. Однако при достижении критической разности температур состояние покоя может оказаться неустойчивым, и начнется конвекционное движение жидкости. Критическое значение разности температур определяется значением величины $g\beta l^3 (T_1 - T_2)/\chi\nu$ [1]. При наличии вибрационных сил начало конвекции будет зависеть дополнительно еще от одного параметра, учитывающего влияние вибрации. Чтобы найти этот «вибрационный критерий», в системе (1.8) проведем линеаризацию в окрестности состояния относительного покоя

$$\mathbf{v}_0 = 0, \qquad T_0 = -Ay + B, \qquad p_0 = \beta g\left(\tfrac{1}{2}Ay^2 - By\right) + \mathrm{const} \tag{2.1}$$
$$A = (T_1 - T_2)/l, \; B = T_1$$

Заметим, что решение (2.1) удовлетворяет также системе (1.1).

Строгое математическое обоснование линеаризации в вопросах гидродинамической устойчивости дано В. И. Юдовичем в работе [5]. В данной ситуации линеаризация может быть обоснована аналогичными методами.

Потеря устойчивости решения $(\mathbf{v}_0, T_0, p_0)$ будет означать начало конвекции. Устойчивость исследуется относительно бесконечно малых возмущений. Произведя замену переменных $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$, $T = T_0 + \tau$, $p = p_0 + q$ и линеаризацию в системе (1.8), получим для возмущений $\mathbf{u}$, τ, q) следующую задачу:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla q + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{j}\beta g\tau - \tfrac{1}{2}\mathbf{j}\beta^2 a^2 A w_y \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - Au_y = \chi\Delta\tau, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{w} = \Pi(\mathbf{j}\tau) \\ \mathbf{u}|_S = 0, \qquad \tau|_S = 0, \qquad w_y|_S = 0\end{gathered} \tag{2.2}$$

где S — граница полосы $(y = l,\ y = 0)$.

Возмущения $(\mathbf{u}, \tau, q)$ будем искать в виде

$$\mathbf{u} = e^{\sigma t}\mathbf{u}_1(x, y), \qquad \tau = e^{\sigma t}\tau_1(x, y), \qquad q = e^{\sigma t} q_1(x, y) \tag{2.3}$$

Состояние относительного покоя неустойчиво, если среди всех собственных значений σ есть хотя бы одно σ, у которого $\operatorname{Re}\sigma > 0$.

Поэтому момент наступления неустойчивости определяется появлением значения σ, у которого $\operatorname{Re}\sigma = 0$.

Ниже будем предполагать, что выполняется принцип изменения устойчивости, т. е. неустойчивость вызывается стационарными возмущениями. В оправдание такого предположения заметим, что этот принцип установлен в ряде интересных случаев.

Так, в отсутствие вибрации принцип изменения устойчивости для слоя доказан в [5] (стр. 137); отсюда следует, что он справедлив и при малых скоростях вибрации a. Другой случай, когда принцип выполнен, будет рассмотрен в § 3.

Поэтому в системе (2.2) полагаем $\sigma = 0$.

Для определения параметров, характеризующих начало конвекции, перейдем к безразмерным величинам

$$x_1 = \frac{x}{l}, \quad y_1 = \frac{y}{l}, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{l}{\nu}\mathbf{u}, \quad \tau_1 = \frac{\chi}{\nu}\frac{\tau}{T_1 - T_2}, \quad q_1 = \frac{l^2}{\nu^2} q \tag{2.4}$$

В результате получим следующую задачу в единичной полосе ($0 \leqslant y \leqslant 1$):

$$\nabla q_1 - \Delta \mathbf{u}_1 - \mathbf{j} \frac{(T_1 - T_2) \beta g l^3}{\chi \nu} \tau_1 + \frac{1}{2} \mathbf{j} \frac{(T_1 - T_2)^2}{2\chi\nu} \beta^2 a^2 l^2 w_{1y} = 0$$

$$u_{1y} + \Delta \tau_1 = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \qquad \mathbf{w}_1 = \Pi(\mathbf{j}\tau_1) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{u}_1 |_{S_1} = 0, \qquad \tau_1 |_{S_1} = 0, \qquad w_{1y} |_{S_1} = 0$$

где S_1 — граница ($y_1 = 0$, $y_1 = 1$). Отсюда следует вывод.

Если выполнен принцип изменения устойчивости, то возникновение конвекции определяется двумя параметрами

$$\lambda = \frac{(T_1 - T_2) \beta g l^3}{\chi \nu}, \qquad \mu = \frac{(T_1 - T_2)^2 \beta^2 a^2 l^2}{2\chi\nu} \tag{2.6}$$

Первый параметр — хорошо известный критерий, представляющий собой произведение чисел Грассхофа и Прандтля. Второй, насколько известно авторам, ранее не вводился и назван вибрационным критерием.

Заметим, что параметр λ может принимать любые вещественные значения, а параметр μ всегда неотрицателен.

§ 3. Случай пространственно-периодических возмущений. Чтобы ответить на вопрос о том, как влияет вибрация стенок на возникновение конвекции, нужно в системе (2.2) отделить время при помощи замены (2.3) и найти зависимость $\sigma(a)$. Однако решение этой задачи в истинных граничных условиях связано с громоздкими вычислениями. Поэтому здесь, подобно тому, как сделано в [7], ограничимся более простой, модельной задачей: возмущения считаем пространственно-периодическими с периодами $2\pi/\alpha_0$, $2\pi/\gamma_0$ соответственно вдоль осей x, y. Тогда система (2.2) проводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \Delta^2 \tau}{\partial t^2} - (\chi + \nu) \frac{\partial \Delta^3 \tau}{\partial t} + \chi\nu \Delta^4 \tau - A\beta g \frac{\partial^2 \Delta \tau}{\partial x^2} + \frac{A^2 \beta^2 a^2}{2} \frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4} = 0 \tag{3.1}$$

В предположении периодичности функцию $\tau(x, y, z)$ ищем в виде

$$\tau(x, y, t) = e^{\sigma t + i(\alpha x + \gamma y)} \tag{3.2}$$

$$(\alpha = k\alpha_0;\ \gamma = m\gamma_0,\ k, m = 0, \pm 1, \ldots, k^2 + m^2 \neq 0)$$

Подставляя выражение (3.2) в уравнение (3.1), для определения собственных значений σ получим уравнение

$$\sigma^2 (\alpha^2 + \gamma^2)^2 + \sigma (\chi + \nu)(\alpha^2 + \gamma^2)^3 + C = 0 \tag{3.3}$$

$$C = \chi\nu (\alpha^2 + \gamma^2)^4 - A\beta g \alpha^2 (\alpha^2 + \gamma^2) + \frac{{}^1\!/_2 A^2 \beta^2 a^2}{2} \alpha^4 \tag{3.4}$$

Если $C > 0$ при любых значениях α и γ вида (3.2), то все корни уравнения (3.3) лежат в левой полуплоскости, и, таким образом, имеет место устойчивость. Если же $C < 0$ хотя бы при некоторых α и γ, то уравнение (3.3) имеет один положительный и один отрицательный корень.

Таким образом, в рассматриваемой задаче принцип изменения устойчивости выполняется, а уравнение нейтральной поверхности имеет вид $C = 0$. Под нейтральной поверхностью понимается поверхность в пространстве переменных α, γ, λ, μ, разделяющая область устойчивости и неустойчивости. Из выражения (3.4) следует, что при $A \leqslant 0$ всегда имеет место устойчивость, поэтому представляет интерес случай $A > 0$, который и будет рассматриваться дальше. Кроме того, отметим, что относительно возмущений, не зависящих от координаты x ($\alpha = 0$), имеет место устойчивость. Поэтому будем рассматривать значения $\alpha = k\alpha_0$ при $k \neq 0$.

Из выражения (3.4) видно, что наличие вибрации способствует стабилизации состояния относительного покоя.

Покажем, что при наличии вибрации (даже малой) состояние относительного покоя устойчиво при высоких градиентах температуры.

В отсутствие вибрации ($a = 0$) кривая $C(A)$, соответствующая фиксированным возмущениям вида (3.2), в плоскости (A, C) представляет собой прямую. Зоны устойчивости и неустойчивости разделяются точкой пересечения этой прямой с осью A.

При наличии вибрации кривая $C(A)$ представляет собой параболу, направленную ветвями вверх. Эта парабола может быть расположена либо полностью над осью A, либо пересекать ее.

В первом случае имеет место устойчивость для всех градиентов температуры.

Во втором случае парабола разбивает ось A на три зоны. Две полубесконечные — соответствуют состоянию устойчивости, третья, представляющая собой отрезок, является зоной неустойчивости.

Далее покажем, что сформулированные выше выводы имеют место, если рассматривать устойчивость относительно всевозможных возмущений вида (3.2).

Из выражения (3.4) следует, что необходимым и достаточным условием устойчивости состояния относительного покоя является выполнение неравенства

$$\chi\nu(\alpha^2+\gamma^2)^4 - A\beta g\alpha^2(\alpha^2+\gamma^2) + {}^1/_2\, A^2\beta^2a^2\alpha^4 > 0$$
$$\alpha = k\alpha_0,\ \gamma = m\gamma_0\ (k, m = 0, \pm 1, \ldots) \qquad k \neq 0$$

Если воспользоваться безразмерными параметрами λ, μ (см. (2.6)), то последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$\varphi(\alpha, \gamma) \equiv (\alpha^2+\gamma^2)^4 - \lambda\alpha^2(\alpha^2+\gamma^2) + \mu\alpha^4 > 0 \qquad (3.5)$$
$$\alpha = k\alpha_0,\ \gamma = m\gamma_0,\ k \neq 0,\ (\alpha, \gamma \text{ — безразмерные})$$

Неравенство (3.5) всегда будет иметь место, если

$$\min \varphi(\alpha, \gamma) > 0 \qquad (-\infty < \gamma < \infty)$$

Имеем

$$\min \varphi(\alpha, \gamma) \geqslant \min_\alpha \min_\gamma \varphi(\alpha, \gamma) = \begin{cases} \alpha_0^4(\mu - \lambda + \alpha_0^4) & \text{при } \lambda < 4\alpha_0^4 \\ \alpha_0^{8/3}(\mu\alpha_0^{4/3} - 3.4^{-4/3}\lambda^{4/3}) & \text{при } \lambda \geqslant 4\alpha_0^4 \end{cases}$$

Следовательно, на плоскости μ, λ область устойчивости относительно возмущений вида (3.2) при $\alpha = k\alpha_0$ $(k \neq 0)$ и произвольных γ определяется неравенствами

$$\lambda < \mu + \alpha_0^4 \text{ при } \lambda < 4\alpha_0^4 \quad \lambda < 4\cdot 3\,\mu^{-3/4}\mu \text{ при } \lambda \geqslant 4\alpha_0^4 \qquad (3.6)$$

Из этих неравенств видно, что при наличии вибрации ($\mu \neq 0$) состояние относительного покоя устойчиво при высоком градиенте температуры. Кроме того, область устойчивости связана, в силу чего можно сделать следующий вывод. Если известно, что при заданных значениях параметров $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$ система находится в состоянии относительного покоя, то можно, отправляясь от значений $\mu = 0$, $\lambda = 0$, одновременным их изменением привести систему в заданное состояние, не выходя из области устойчивости.

Наконец, из неравенства (3.6) следует еще один вывод. Если скорость вибрации a удовлетворяет условию

$$a > \sqrt{6}\,\frac{g}{\sqrt{\chi\nu}\,\alpha_0^2} \qquad (3.7)$$

то состояние относительного покоя устойчиво при любых градиентах температуры A.

Авторы благодарят В. И. Юдовича за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Поступило 1 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2-е, Гостехиздат, 1953.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, Изд. 2-е, т. 1, Механика, Изд-во «Наука», 1965.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1955.
4. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Физматгиз, 1961.
5. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
6. Линь Цзя-цзю. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., 1958.
7. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.