

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ СМЕСИ ОДНОАТОМНЫХ ГАЗОВ

В. С. ГАЛКИН

(Москва)

Дано обобщение класса точных решений уравнений кинетических моментов одноатомного газа при отсутствии внешних сил [1] на случай смеси одноатомных максвелловых газов с учетом внешних сил. Получены простейшие решения этого класса, являющиеся примерами нормальных решений уравнений Больцмана в смысле Чепмена — Энскога [2]. Суммированы выводы о применимости различных методов решения уравнений Больцмана и их свойств, полученные на основе анализа указанных точных решений.

1. Уравнение переноса для компоненты смеси α в декартовой системе координат x_i ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) имеет следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \int f_\alpha \Phi_\alpha dC_\alpha + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \int f_\alpha \Phi_\alpha dC_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_i} \int f_\alpha C_{\alpha i} \Phi_\alpha dC_\alpha + \\ & + \left(\frac{Du_i}{Dt} - F_{\alpha i} \right) \int f_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial C_{\alpha i}} dC_\alpha - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \int f_\alpha C_{\alpha j} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial C_{\alpha i}} dC_\alpha = I_{\alpha, n} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и ниже использовано обычное правило суммирования по повторяющимся индексам, $\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha, n} = m_\alpha C_{\alpha i_1} C_{\alpha i_2} \dots C_{\alpha i_n}$, собственная скорость молекулы $C_\alpha = \xi_\alpha - u$, u — массовая скорость смеси, остальные обозначения те же, что и в монографии [2]: $f_\alpha = f_\alpha(t, x_i, C_i)$ — функция распределения данной компоненты смеси, $F_\alpha = F_\alpha(t, x_i)$ — внешняя сила, отнесенная к массе молекулы m_α , $D/Dt = \partial/\partial t + u_j \partial/\partial x_j$. В общем случае момент от интегралов столкновений $I_{\alpha, n}$ зависит от моментов функции распределения

$$M_{\alpha, n} \equiv M_{\alpha i_1 i_2, \dots, i_n} = \int f_\alpha \Phi_{\alpha, n} dC_\alpha \quad (1.2)$$

любого порядка и лишь в случае максвелловских молекул (межмолекулярная сила обратно пропорциональна пятой степени расстояния между молекулами) $I_{\alpha, n}$ является конечным полиномом $M_{\alpha, k}$, в который входят моменты порядка $k \leq n$.

Плотность ρ_α , суммарная плотность ρ , диффузионные скорости компонент газа U_α , разности которых определяют диффузию одной компоненты относительно другой, даются, соответственно, соотношениями

$$\rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha = m_\alpha \int f_\alpha dC_\alpha, \quad \rho = \sum_\alpha \rho_\alpha, \quad \rho_\alpha U_{\alpha i} = m_\alpha \int f_\alpha C_{\alpha i} dC_\alpha$$

Суммарный момент второго порядка $\tau_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij}$ (здесь p — давление, δ_{ij} — единичный тензор). Массовая скорость определяется равенством

$$\rho u_i = \sum_\alpha \int f_\alpha m_\alpha \xi_{\alpha i} d\xi_\alpha$$

Поэтому

$$\sum_\alpha \rho_\alpha U_{\alpha i} = 0$$

В отличие от других параметров движения газа (ρ_α , $U_{\alpha i}$, $\tau_{\alpha ij}$ и т. д.) массовая скорость не является моментом функции распределения (1.2). Подставляя $\Phi_\alpha = m_\alpha$, $m_\alpha C_{\alpha i}$, $m_\alpha C_{\alpha i} C_{\alpha j}$ и т. д. в уравнение (1.1), получим уравнение неразрывности, уравнения для $U_{\alpha i}$ напряжений, в общем, бесконечную систему уравнений кинетических моментов, которые имеют ту же особенность, что и соответствующие уравнения для однокомпонентного газа: в левую часть уравнения для момента n -го порядка входит под знаком дифференцирования по координате момент порядка $n + 1$. Эти члены с моментами порядка $n + 1$ обращаются в нуль, если для любого n

$$M_{\alpha, n} = M_{\alpha, n}(t) \quad (1.3)$$

Тогда правые части уравнений моментов являются также функцией только времени t , а в случае максвелловских молекул система уравнений кинетических моментов распадается на бесконечный ряд последовательно решаемых систем уравнений.

Левые части уравнений моментов не будут зависеть от координат, если выражения

$$\partial u_i / \partial x_j, \quad Du_i / Dt - F_{\alpha i} \quad (1.4)$$

и, следовательно, разности $F_{\alpha i} - F_{\gamma i}$, где γ — любая другая компонента смеси, зависят только от t . Так как в уравнение импульса τ_{ij} входят под знаком дифференцирования по координатам [2], то с учетом условия (1.3) это уравнение приобретает следующий вид:

$$\rho (Du_i / Dt - F_{\alpha i}) = \sum_{\gamma} \rho_{\gamma} (F_{\gamma i} - F_{\alpha i}) \quad (1.5)$$

Условия (1.4), (1.5) определяют зависимость u_i , $F_{\alpha i}$ от координат и времени. Если внешние силы отсутствуют, то как и в случае однокомпонентного газа [1]

$$u_i = \psi_{ij}(t) x_j + \varphi_i(t), \quad Du_i / Dt = 0 \quad (1.6)$$

Здесь можно положить $\varphi_i = 0$, так как в уравнение (1.1) входят только производные от скоростей по координатам ψ_{ij} . По этим же причинам в случае однокомпонентного газа при заданных ψ_{ij} решение уравнений (1.1) не зависит от F_i , так как здесь $Du_i / Dt = F_i$. Поэтому всюду ниже под однокомпонентным газом будет пониматься однокомпонентный одноатомный газ при отсутствии внешних сил, скорости которых удовлетворяют условиям (1.6) при $\varphi_i = 0$, т. е. случай, рассмотренный в работе [1]. Из (1.6) получаем следующее уравнение для определения ψ_{ij} :

$$d\psi_{ij} / dt + \psi_{ir} \psi_{rj} = 0 \quad (1.7)$$

При $F_{\alpha i} \neq 0$ положим

$$u_i = \chi_i + \varphi_i(t), \quad \chi_i = \psi_{ij}(t) x_j, \quad \frac{D_1 \chi_i}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \chi_i \quad (1.8)$$

Из соотношений (1.4), (1.5), (1.8) следует, что

$$F_{\alpha i} = T_{\alpha i} + D_1 \chi_i / Dt$$

т. е. в общем случае $F_{\alpha i}$ — линейные функции координат ($T_{\alpha i}$ — некоторая функция t). В приближении Навье — Стокса диффузия определяется разностями $F_{\alpha i} - F_{\gamma i}$ [2]. Поэтому для простоты положим $F_{\alpha i} = F_{\alpha i}(t)$.

Тогда из уравнения (1.5) с учетом (1.8) получаем для выбора функций $F_{\alpha i}(t)$, $\psi_{ij}(t)$ следующие условия:

$$\rho (\varphi_i' + \varphi_j \psi_{ij} - F_{\alpha i}) = \sum_{\gamma} \rho_{\gamma} (F_{\gamma i} - F_{\alpha i}), \quad \frac{D_1 \chi_i}{Dt} = 0 \quad (1.9)$$

Из второго условия следует уравнение (1.7), т. е. ψ_{ij} такие же, что и в случае однокомпонентного газа [1]. Так как по предположению ρ_α и $U_{\alpha i}$ зависят только от t , то из уравнений неразрывности [1] следует:

$$\rho_\alpha(t) = \rho_\alpha(0) \exp \left[- \int_0^t (\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}) dt \right] \quad (1.10)$$

Остальные моменты функции распределения определяются при помощи уравнения (1.1), которое приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int f_\alpha \Phi_\alpha dC_\alpha + \psi_{ii} \int f_\alpha \Phi_\alpha dC_\alpha + \sum_\gamma \frac{\rho_\gamma}{\rho} (F_{\gamma i} - F_{\alpha i}) \times \\ \times \int f_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial C_{\alpha i}} dC_\alpha - \psi_{ij} \int f_\alpha C_{\alpha j} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial C_{\alpha i}} dC_\alpha = I_{\alpha, n} \end{aligned} \quad (1.11)$$

В случае однокомпонентного газа из левой части исчезает член с внешними силами, так что в нее будут входить только моменты порядка n .

Из вышесказанного ясно, что данный класс течений существует для любых межмолекулярных потенциалов взаимодействия атомов. Однако решения уравнений моментов, описывающих эти течения, можно получить лишь для максвелловских молекул, когда система уравнений кинетических моментов распадается на бесконечный ряд последовательно решаемых систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Эти решения можно получить и для других законов взаимодействия при использовании упрощенных моделей интегралов столкновений (релаксационной модели и т. п.).

2. В работе [1] был рассмотрен ряд простейших решений системы уравнений (1.7) и соответствующих им течений и было найдено ее решение для плоского случая¹, которое можно записать в следующем виде:

$$\psi_{ij} = \frac{\delta_{ij} (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})t + c_{ij}}{(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})t^2 + (c_{11} + c_{22})t + 1} \quad (c_{ij} = \psi_{ij}(0)) \quad (2.1)$$

По аналогии с формулой (2.1) общее решение системы уравнений (1.7) можно искать в виде

$$\psi_{ij} = \Delta^{-1} (\delta_{ij} a_{ij} t^2 + b_{ij} t + c_{ij}), \quad \Delta = a_3 t^2 + a_2 t + a_1 \quad (2.2)$$

где a_1, a_2, a_3 должны быть полиномами первой, второй и третьей степени по c_{ij} и не должны зависеть от круговой перестановки индексов в их членах, так что $a_1 = c_{11} + c_{22} + c_{33}$. Подставим (2.2) в (1.7) и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях t . Из коэффициентов при t^4, t^3 и t^2 получим

$$a_{ij} = a_3, \quad b_{ij} = a_1 c_{ij} - \omega_{ij}, \quad \omega_{ij} = c_{ir} c_{rj} \quad (2.3)$$

Остальные уравнения с учетом (2.3) имеют следующий вид:

$$2a_3 \delta_{ij} - 2a_2 c_{ij} + 2a_1 \omega_{ij} = \omega_{im} c_{mj} + c_{im} \omega_{mj} \quad (2.4)$$

$$a_3 a_1 \delta_{ij} - a_3 c_{ij} = a_2 b_{ij} - b_{im} b_{mj} \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.4) при $i \neq j$, $i = j$ находим следующее решение, тождественно удовлетворяющее уравнению (2.5):

$$a_3 = |c_{mn}|, \quad 2a_2 = b_{11} + b_{22} + b_{33}, \quad a_1 = c_{11} + c_{22} + c_{33} \quad (2.6)$$

где $|c_{mn}|$ — определитель. Общее решение системы уравнений (1.7), записанное через определители, найдено в работе [4] с использованием оригинальной кинематической трактовки класса течений [1]. Здесь показано, как это решение можно получить прямым путем. С учетом (2.2), (2.3), (2.6) из формулы (1.10) следует:

$$\rho_\alpha(t) = \rho_\alpha(0) \Delta^{-1} \quad (2.7)$$

¹ В последней формуле работы [1], относящейся к этому решению, имеется опечатка: два ее последних члена нужно разделить на $4c_3$.

Так как $\Delta > 0$ (величина ρ_α конечна), то в общем случае $a_3 > 0$ и при больших t все коэффициенты $\psi_{ij} > 0$. Будем рассматривать только случай $a_i \geq 0$, когда плотность ρ_α монотонно убывает со временем, либо постоянна. При $a_3 \geq 0, a_2 \geq 0, a_1 > 0$ $\psi_{ij} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Можно показать, что если при этом $a_3 = 0, b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$, то произвольными являются пять коэффициентов c_{ij} , все $b_{ij} = 0$. Тогда, например

$$\chi_1 = c_{11}\eta, \quad \chi_2 = \frac{c_{22}c_{31}}{c_{32}}\eta, \quad \chi_3 = c_{31}\eta, \quad \eta = \frac{1}{1+a_1t} \left(x + \frac{c_{32}}{c_{31}}y + \frac{c_{32}c_{23}}{c_{31}c_{22}}z \right) \quad (2.8)$$

т. е. имеем пространственное нестационарное сдвиговое течение (скорости постоянны на плоскостях $\eta = \text{const}$ при данном t). Частным случаем этого течения является пространственное сдвиговое течение с $\psi_{ij} = \text{const}$ и постоянной плотностью [1], когда $a_1 = 0, c_{11} = -c_{22} - c_{32}c_{23}/c_{22}$.

В случае течений с постоянной плотностью ($a_i = 0$)

$$\psi_{ij} = -c_{ir}c_{rj}t + c_{ij}$$

Если при этом все c_{ij} положительны, то не равны нулю только три коэффициента c_{ij} [1]. Например

$$\chi_1 = (-c_{13}c_{32}t + c_{12})y + c_{13}z, \quad \chi_2 = 0, \quad \chi_3 = c_{32}y \quad (2.9)$$

С увеличением t коэффициент ψ_{12} меняет знак. В общем случае коэффициенты c_{ij} можно выбрать так, чтобы все ψ_{ij} были положительными и стремились к нулю при $t \rightarrow \infty$.

3. Для течений рассматриваемого класса естественно полагать¹ $f_\alpha = f_\alpha(t, C_{\alpha i})$, так как все моменты такой функции распределения зависят только от t . При этом правые части уравнений Больцмана (интегралы столкновений) J_α для любых межмолекулярных потенциалов зависят лишь от t и $C_{\alpha i}$, так как процесс столкновений зависит только от относительных скоростей частиц. Левые части не будут зависеть от координат при тех же условиях, что и левые части уравнений переноса. Действительно, записав уравнения Больцмана [2] в переменных $t, C_{\alpha i}, x_i$ и отбросив производные по x_i , будем иметь:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(F_{\alpha i} - \frac{Du_i}{Dt} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial C_{\alpha i}} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} C_{\alpha j} \frac{\partial f_\alpha}{\partial C_{\alpha i}} = J_\alpha$$

Далее с учетом (1.5), (1.8), (1.9) получаем:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \sum_{\gamma} \frac{\rho_\gamma}{\rho} (F_{\gamma i} - F_{\alpha i}) \frac{\partial f_\alpha}{\partial C_{\alpha i}} - \psi_{ij} C_{\alpha j} \frac{\partial f_\alpha}{\partial C_{\alpha i}} = J_\alpha \quad (3.1)$$

Обычным способом отсюда можно получить (1.11). Уравнение (3.1) без учета внешних сил использовалось в ряде работ А. А. Никольского [4,5] при изучении соответствующих («однородных») течений одноатомных газов. Аналогично вышеизложенному легко обобщить условия существования однородных течений на случай ионизованного газа или смесей многоатомных газов (например, для модели шероховатых молекул [2], когда f_α будут еще зависеть от собственных угловых скоростей молекул). Следует отметить, что из-за сложности J_α решение задачи Коши для уравнений Больцмана является столь же трудным, что и для любых движений газа в бесконечной области с заданными начальными условиями. Поэтому не получено решение даже простейшей задачи Максвелла — Карлемана (релаксация неподвижного газа к равновесному состоянию).

В работе [4] путем замены переменных в уравнении (3.1) при отсутствии внешних сил к этой задаче сведена задача о сферическом разлете газа

$$u_i = \frac{x_i}{t+c}, \quad p = \frac{p(0)}{(1+t^*)^5}, \quad c = \text{const}, \quad t^* = \frac{t}{c} \quad (3.2)$$

и показано, что при произвольных начальных данных $\nu > 7/3$ и $t \rightarrow \infty$ функция f_α не стремится к локально-максвелловской функции $f_{0\alpha}$, при $\nu \leq 7/3$ функция $f_\alpha \rightarrow f_{0\alpha}$ (здесь ν — показатель степени в законе межмолекулярного взаимодействия, для максвелловских молекул $\nu = 5$). То, что при $\nu = 5$ и $t \rightarrow \infty$ решение в общем случае не стремится к ло-

¹ Так же как и при отсутствии внешних сил [4,5].

кально-максвелловскому, следовало из результатов работы [1], где получено решение

$$p_{ij} = \frac{E p_{ij}(0)}{(1+t^*)^5} \exp \frac{1}{2\beta(1+t^*)^2}, \quad E = \exp\left(-\frac{1}{2\beta}\right), \quad \beta = \frac{\mu(0)}{c p(0)} \sim K \quad (3.3)$$

μ — коэффициент вязкости, K — характерное число Кнудсена.

Если $p_{ij}(0) \neq 0$, $\beta = \text{const}$, то при $t^* \rightarrow \infty$

$$\tau_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij} \rightarrow p[\delta_{ij} + E p_{ij}(0)/p(0)]$$

а не к локально-максвелловскому значению $\tau_{ij} = p\delta_{ij}$.

Если при $t = 0$ функция $f_\alpha = f_{0\alpha}$, то она будет локально-максвелловской при любом v и t . Это связано с тем, что течение (3.2) является единственным из рассматриваемых здесь течений, для которого уравнение Больцмана имеет точное локально-максвелловское решение [3]. Остальные течения не описываются функцией $f_{0\alpha}$.

Для этого течения в приближении Навье — Стокса $p_{ij} = 0$. В этом отношении оно менее интересно, чем другие течения рассматриваемого класса, которые в приближении Навье — Стокса имеют отличные от нуля решения для p_{ij} , $U_{\alpha i}$, что позволяет делать выводы о применимости различных методов кинетической теории. В основном, эти методы в данном случае являются асимптотическими разложениями решений при фиксированном t и малом K (методы Чепмена — Энскога и Гильберта) или большим K — метод разложения решения относительно свободномолекулярного (безстолкновительного) решения. Естественно, что при фиксированном K и $t \rightarrow \infty$ приближенные решения, даваемые этими методами, могут сколь угодно сильно отличаться от точных [6-8]. Асимптотика решений уравнений моментов для некоторых течений класса [1] при $K = \text{const}$ и $t \rightarrow \infty$ рассматривалась также в работе [9].

4. Рассмотрим для наглядности двухкомпонентную смесь максвелловских молекул. Из формулы (1.10) следует, что

$$\rho_1 = \eta\rho, \quad \rho_2 = (1 - \eta)\rho, \quad \eta = \text{const} \quad (4.1)$$

Из (1.11) следует система уравнений для диффузионных скоростей

$$\frac{dU_{\alpha i}}{dt} + \eta F_{1i} + (1 - \eta) F_{2i} - F_{\alpha i} + \psi_{ij} U_{\alpha j} = \frac{T_\alpha}{\rho_\alpha} \quad (4.2)$$

$$T_{1,2} = \mp 2\pi A_1 \sqrt{\kappa_{12}\mu_{12}} n_1 n_2 W_i, \quad W_i = U_{1i} - U_{2i}, \quad \mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad A = 0.422$$

Здесь κ_{12} — коэффициент в законе зависимости межмолекулярной силы от расстояния [2]. Выражение для правой части уравнения (4.2) можно найти, например, в работе [10].

Вычитая из уравнения для U_{1i} уравнение для U_{2i} , окончательно найдем

$$\begin{aligned} \frac{dW_i}{dt} - \Delta F_i + \psi_{ij} W_j + \frac{R}{\tau} W_i &= 0, \quad \Delta F_i = F_{1i} - F_{2i} \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{2\pi A_1 \rho_0 \sqrt{\kappa_{12}\mu_{12}}}{m_1 m_2}, \quad \tau \sim K, \quad \rho = \rho_0 R(t), \quad \rho_0 = \text{const} \end{aligned} \quad (4.3)$$

При $\tau \ll 1$ широко используемый в настоящее время итерационный процесс, эквивалентный методу Чепмена — Энскога, здесь имеет следующую форму:

$$\frac{R}{\tau} W_i^{(n+1)} = \Delta F_i - \frac{dW_i^{(n)}}{dt} - \psi_{ij} W_j^{(n)} \quad (4.4)$$

В общем случае (в соответствии с основной идеей метода Чепмена — Энскога) на каждом этапе этого итерационного процесса приходится исключать $\partial\rho/\partial t$, $\partial u_i/\partial t$ и $\partial p/\partial t$ при помощи уравнений сохранения [7]. В случае течений класса [1] ρ , u_i заданы, поэтому исключается

только $\partial p / \partial t$. Таким путем были получены третьи приближения метода Чепмена—Энскога для напряжений в сдвиговом и одномерном нестационарном течениях [7,8]. В данном случае функции R и ΔF_i заданы. В приближении Навье — Стокса

$$W_i^{(1)} = \Delta F_i \tau / R \quad (4.5)$$

Отсюда легко установить связь τ с коэффициентом диффузии [2].

Аналогичный итерационный процесс для больших τ , который эквивалентен разложению решения в ряд по обратным степеням K относительно «свободномолекулярного» решения, дается соотношением

$$\frac{dW_i^{(n)}}{dt} + \psi_{ij} W_j^{(n-1)} = \Delta F_i - \frac{R}{\tau} W_i^{(n-1)}, \quad W_i^{(0)} = 0 \quad (4.6)$$

Под свободномолекулярным понимается решение для условий, когда интегралами столкновений в уравнениях Больцмана можно пренебречь (молекулы газа движутся по инерции).

Рассмотрим два простейших фундаментальных течения данного класса: одномерное течение однокомпонентного газа, рассмотренное в работе [8],

$$\chi_x = \frac{x}{t+c}, \quad \psi_{xx} = \frac{1}{t+c}, \quad R = \frac{1}{t+c} \quad (4.7)$$

и сдвиговое течение в случае однокомпонентного газа, рассмотренное в работах [6,7],

$$\chi_x = \psi_{xy} y, \quad \chi_y = \chi_z = 0, \quad \psi_{xy} = \text{const}, \quad R = 1 \quad (4.8)$$

В первом случае уравнение (4.3) имеет следующее решение:

$$W_x(t^*) = \left(\frac{1}{1+t^*} \right)^{1+\frac{1}{\tau}} \left[W_x(0) + c \int_0^{t^*} \Delta F_x (1+t^*)^{1+1/\tau} dt^* \right] \quad (4.9)$$

При $W_y(0) = \Delta F_y = 0$ имеем следующее решение для сдвигового течения (4.8):

$$W_x(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left[W_x(0) + \int_0^t \Delta F_x \exp\frac{t}{\tau} dt \right] \quad (4.10)$$

При больших t первыми членами в формулах (4.9), (4.10) можно пренебречь и решения перестают зависеть от начальных условий, т. е. при увеличении t эти решения стремятся к нормальным решениям уравнения Больцмана, зависящим только от гидродинамических переменных. Это единственные из полученных точных решений уравнения Больцмана, которые принадлежат к классу нормальных при произвольных начальных значениях кинетических моментов.

Решение (4.9) и, вообще, решения для любых кинетических моментов одномерного течения (4.7) являются примером тех решений данного класса, для которых влияние начальных условий затухает не по экспоненциальному, а по степенному закону (этот закон справедлив не только для максвелловых молекул, но и для других типов межмолекулярных взаимодействий). Видимо из-за того, что при исследовании асимптотики решений уравнения Больцмана при $K \ll 1$ во всех работах [11] рассматриваются решения, ограниченные по x_i, t , в них предполагается экспоненциальность закона затухания влияния начальных значений негидродинамических моментов функции распределения. В рассматриваемом здесь случае решения ограничены по x_i , если $\psi_{ij} = 0$, т. е. $u_i = \varphi_i(t)$, $\rho_\alpha = \text{const}$. Тогда для всех моментов этот закон — экспоненциальный.

Далее будет рассматриваться только случай больших t , когда первыми членами в формулах (4.9), (4.10) можно пренебречь.

Интегрируя по частям, представим (4.9) рядом (4.11)

$$W_x(t) = \frac{\tau}{R} \frac{\Delta F_x(t)}{1+2\tau} \left[1 - \frac{\tau}{R} \frac{\Delta F_x'}{\Delta F_x} \frac{1}{1+3\tau} + \frac{\tau^2}{R^2} \frac{\Delta F_x''}{\Delta F_x} \frac{1}{(1+3\tau)(1+4\tau)} + O\left(\frac{\tau^3}{R^3}\right) \right]$$

Этот ряд для малых τ/R сходится для широкого класса функций ΔF_x . При малых τ и фиксированных R из формулы (4.11) следует:

$$W_x = \frac{\tau}{R} \Delta F_x - \tau^2 \left(\frac{2}{R} \Delta F_x + \frac{\Delta F_x'}{R^2} \right) + O(\tau^3) \quad (4.12)$$

Такое же выражение получается с помощью итерационного процесса (4.4): первый член соответствует приближению Навье—Стокса, второй — Барнетта и т. д. Аналогичные (но более простые) соотношения получаются и для сдвигового течения. При $\Delta F_x = \text{const}$ из формулы (4.10) следует, что

$$W_x(t) = \tau \Delta F_x \quad (4.13)$$

т. е. в случае сдвигового течения решение задачи при больших t совпадает с ее решением в приближении Навье — Стокса (4.5). Аналогично из формулы (4.9) имеем

$$W_x(t) = (1 + 2\tau)^{-1} \Delta F_x \tau / R \quad (4.14)$$

Легко показать, что в этом случае итерационные процессы (4.4), (4.6) соответствуют разложениям $(1 + 2\tau)^{-1}$ по малым или большим τ с областями сходимости $\tau < 1/2$, $\tau > 1/2$.

При помощи решений класса [1] (несмотря на их «вырожденность») получен ряд интересных выводов о применимости различных методов решения уравнения Больцмана. В работе [7] впервые было отмечено, что метод Чепмена — Энскога является асимптотическим даже тогда, когда при определенных начальных условиях он сходится в обычном смысле. Полученные в работах [6–8] решения для τ_{ij} в сдвиговом и одномерном нестационарном течениях однокомпонентного газа при увеличении t в общем случае не стремятся к нормальным.

Если при больших t^* отбросить быстро убывающие во времени члены, то для одномерного нестационарного течения будем иметь [8]

$$\frac{p}{p(0)} = A(\beta, \Pi) (1 + t^*)^{r/\beta}, \quad \frac{p_{xx}}{p} = -\frac{5+r}{2}$$

$$\Pi = \frac{p_{xx}(0)}{p(0)}, \quad r = -\frac{3}{2\beta} [1 + 4\beta - \sqrt{1 + 4\beta(1/\beta + \beta)}] \quad (4.15)$$

(см. также (3.3)). При малых β и фиксированных значениях Π

$$r = -5 + \frac{8}{3}\beta - \frac{16}{9}\beta^2 + O(\beta^3), \quad A = 1 - \frac{2}{3}\Pi\beta + O(\beta^2) \quad (4.16)$$

При решении этой задачи методом Чепмена — Энскога $A = 1$, показатель степени r представляется в виде ряда по степеням β , совпадающего с разложением (4.16), которое сходится при $\beta < (\sqrt{10} - 1) / 6 \approx 0.36$. Первые два члена разложения r по β (4.16) соответствуют приближению Навье — Стокса ($r^{(1)}$), три члена — Барнетта ($r^{(2)}$) и т. д.

Величина $A = 1$, если $\Pi = -(5 + r) / 2$. Тогда отброшенные в формулах (4.15) быстро убывающие во времени члены равны нулю при любых t^* , форма точного решения совпадает с формой решений, даваемого методом Чепмена — Энскога. Только в этом случае при $\beta < 0.36$ ряд Чепмена — Энскога сходится в обычном смысле к точному решению [8] (это легко показать с помощью итерационного процесса, аналогичного (4.4)),

а само решение является нормальным. При любых фиксированных значениях t^* , Π и $\beta \rightarrow 0$ из соотношений (4.15), (4.16) получим следующие нулевые члены асимптотического разложения решения по малым β :

$$p/p(0) = (1 + t^*)^{-5/3}, \quad p_{xx}/p = -4/3 \beta$$

которые совпадают с решением задачи в приближениях Эйлера и Навье—Стокса и не зависят от Π (учет отброшенных в (4.15) членов не изменяет результата). Если Π является соответствующим рядом (или полиномом) по β , то можно получить аналогичные асимптотические решения, совпадающие с решениями в приближениях Барнетта и т. п. Важно отметить, что при малых, но конечных β такие решения применимы для конечных интервалов времени. С одной стороны, t^* должно быть достаточно большим, чтобы отброшенные в (4.15) члены были пренебрежимо малы. С другой стороны, при $t^* \rightarrow \infty$ и фиксированных β , Π отношения точных значений p , p_{xx} к приближенным сколь угодно сильно отличаются от единицы. То, что указанные интервалы времени для одномерного и сдвигового течений существуют, следует из результатов работ [7, 8].

Сформулированные выше выводы о применимости метода Чепмена — Энскога для одномерного течения справедливы и для сдвигового течения однокомпонентного газа [6, 7]. Интересно отметить, что в этом случае нулевой член асимптотического разложения точного решения для p_{yy} по малым β совпадает с решением в приближении Барнетта (в приближении Навье — Стокса $p_{yy} = 0$). Следовательно, могут быть случаи, когда приближение Барнетта играет ту же роль, какую обычно играет приближение Навье — Стокса. Таким образом, только при определенных условиях решения [6-8] для τ_{ij} могут быть нормальными. Остановимся более подробно на выводах, вытекающих из результатов анализа таких нормальных решений, а также нормальных решений (4.9), (4.10).

Так как область применимости метода Чепмена — Энскога ограничена малыми числами K , где еще сравнительно хороши уравнения Навье — Стокса, то, вообще говоря, уравнения Барнетта позволяют провести сравнительно небольшое уточнение решений в приближении Навье — Стокса, что делает их использование непрактичным. Действительно, область сходимости (в обычном смысле) ряда Чепмена — Энскога для течений (4.7), (4.8) по характерному K значительно меньше единицы: для случая (4.14) значение $\tau < 1/2$, для одномерного течения однокомпонентного газа (4.15) значение $\beta < 0.36$. В случае сдвигового течения [6, 7] величина p_{xy} одинакова в приближениях Навье — Стокса и Барнетта («барнеттовские» члены равны нулю).

Вместе с тем, могут быть случаи, когда приближение Барнетта существенно уточняет приближение Навье — Стокса. В сдвиговом течении однокомпонентного газа, как отмечалось выше, главный член в p_{yy} — барнеттовский. Результаты расчетов в приближении Барнетта для одномерного течения (4.15) хорошо согласуются с точными даже в той области значений β , где ряд Чепмена — Энскога расходится, а приближение Навье — Стокса дает большие ошибки [8]: только при $\beta \geq 1/2$ точное значение r начинает отличаться от $r^{(2)}$ на несколько единиц третьей значащей цифры, при $\beta = 1$ относительная ошибка в $r^{(2)}$ становится равной примерно 10% (при этом $r = -4.1$, $r^{(2)} = -3.7$, $r^{(1)} = -2.3$).

Остановимся на вопросе о сравнительной точности методов Чепмена — Энскога и Гильберта на примере решения (4.15) при $A = 1$. Если первый из них сводится к разложению r по малым β , то в методе Гильберта, как легко показать, необходимо разлагать все выражение $(1 + t^*)^{r/3}$ по малым β . В приближении, аналогичном Барнетта, имеем (4.17)

$$\frac{p}{p(0)} = (1 + t^*)^{5/3} \left[1 + \frac{8}{9} \beta \left(1 - \frac{2}{3} \beta \right) \ln(1 + t^*) + \frac{32}{81} \beta^2 \ln^2(1 + t^*) + O(\beta^3) \right]$$

Ясно, что при больших t^* решение по методу Гильберта менее точно, чем решение по методу Чепмена — Энскога. Например, при $\beta = 0.3$ и $t^* = 9$ отношения приближенных значений p , рассчитанных в приближении Барнетта (4.16) и по формуле (4.17), к точным равны соответственно 1.005 и 1.033.

Важным свойством рассмотренных решений является то, что их разложения в ряды по обратным степеням K относительно свободномолекулярного решения сходятся в значительно более широком интервале K , чем ряд Чепмена—Энскога, охватывая область $K \gg 1$. Например, в случае (4.14) этот ряд сходится при $\tau > 1/2$ (ряд Чепмена—Энскога при $\tau < 1/2$), в случае (4.15) ряд для p_{ij}/p при $\beta > \beta_1 \approx 0.7$ (соответственно $\beta < 0.36$), для сдвигового течения этот вопрос рассматривался в работе [1]. Это является одним из подтверждений того, что при расчетах обтекания тел разреженным газом при $K \gg 1$ могут быть эффективными методы итераций или разложения в ряды решения уравнения Больцмана относительно свободномолекулярного.

В настоящее время для расчета течений разреженного газа широко используется релаксационная модель уравнения Больцмана (известное уравнение Крука и др.). В работе [12] путем расчета кинетических моментов третьего порядка в сдвиговом течении однокомпонентного газа показано, что при больших отклонениях от равновесия эта модель дает качественно неправильные результаты (по сравнению с точными). Это заставляет с осторожностью относиться к результатам расчета при помощи релаксационной модели течений разреженного газа с большими градиентами параметров потока. В то же время это уравнение применимо в гораздо более широкой области значений параметров течений, чем методы Чепмена—Энскога, Гильберта и т. д.

5. Сдвиговое и одномерное нестационарное течения являются характерными плоскими течениями класса [1]. В этих случаях удается наиболее просто провести анализ точных решений уравнений для p_{ij} , установить область применимости различных методов решения уравнения Больцмана. Эта простота объясняется тем, что уравнения моментов для этих течений сводятся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, зависящими лишь от одного параметра $\beta \sim K$ (в случае одномерного течения для этого используется подстановка $\tau = \ln(t+c)$). Указанной подстановкой можно свести к уравнениям с постоянными коэффициентами, зависящим от нескольких параметров, и уравнения для течения (2.8), которое обладает теми же основными особенностями, что и одномерное нестационарное течение. Типичным представителем цилиндрических течений является плоский разлет однокомпонентного газа

$$u_1 = x/(t+c), \quad u_2 = y/(t+c), \quad u_3 = 0, \quad \rho = \rho(0)/(1+t^*)^2 \quad (5.1)$$

В работе [9] выписаны уравнения для τ_{ij} для этого течения и указано, что уравнение для температуры можно свести к вырожденному гипергеометрическому уравнению. Легко показать, что для отношения p_{zz}/p получается уравнение Риккати, которое обычными преобразованиями [13] также сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению, решение которого записывается так:

$$\frac{p_{zz}}{p} = -1 + \xi \frac{\Psi(5/3, 4; \xi) - A/3 \Phi(5/3, 4; \xi)}{\Psi(2/3, 3; \xi) + A\Phi(2/3, 3; \xi)}, \quad \xi = \frac{1}{\beta(1+t^*)} \quad (5.2)$$

$$A = \frac{\alpha \Psi(5/3, 4; \alpha) - (\Pi + 1) \Psi(2/3, 3; \alpha)}{1/3 \alpha \Phi(5/3, 4; \alpha) + (\Pi + 1) \Phi(2/3, 3; \alpha)}, \quad \Pi = \frac{p_{zz}(0)}{p(0)}, \quad \alpha = \frac{1}{\beta} \quad (5.3)$$

Здесь Φ, Ψ — вырожденные гипергеометрические функции от целого второго аргумента, так что в выражение для Ψ входят логарифмические члены [14].

Анализ решения проводится точно так же, как и в случае (4.15), многие из получающихся выводов те же: метод Чепмена—Энскога при произвольных Π является асимптотическим, справедливым лишь в приближении Навье—Стокса и т. д. Решение же будет зависеть от Π и является нормальным только при $A = 0$. Тогда

$$p_{zz}/p = -1 + \xi \Psi(5/3, 4; \xi) / \Psi(2/3, 3; \xi) \quad (5.4)$$

Метод Чепмена—Энскога в данном случае справедлив при больших ξ (т. е. при фиксированных t^* и $\beta \ll 1$). Используя асимптотические разложения функции Ψ в окрестности бесконечно удаленной точки [14], из формул (5.3), (5.4) найдем

$$\Pi = \frac{4}{3} \beta - \frac{4}{9} \beta^2 + O(\beta^3), \quad \frac{p_{zz}}{p} = \frac{4}{3\xi} - \frac{4}{9\xi^2} + O(\xi^{-3}) \quad (5.5)$$

Первые члены в формулах (5.5) совпадают с решением этой задачи в приближении Навье—Стокса, вторые — Барнетта. При малых ξ (т. е. при $t^* = \text{const}$ и $\beta \gg 1$, либо при $\beta = \text{const}$, $t^* \gg 1$) из (5.4) получим

$$p_{zz}/p = 2 - 2\xi + O(\xi^2 \ln \xi) \quad (5.6)$$

Таким образом, в разложениях решения относительно свободномолекулярного появляются логарифмические члены. Это характерно для задач обтекания цилиндрических тел потоком, близким к свободномолекулярному.

Другим отличием от сдвигового и одномерного течений является то, что ряд (5.5) для p_{zz}/p сходится лишь асимптотически, как отношение двух асимптотических рядов, причем начальные данные Π также задаются асимптотическим рядом. Это является общим свойством систем однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными и ограниченными переменными коэффициентами, содержащими большой параметр α .

Такой системой является система уравнений для τ_{ij} однокомпонентного газа [1], которую можно записать в следующем схематичном виде:

$$y_p'(t) = -\frac{\gamma_p}{\Delta} y_p + \sum_{q=1}^n g_{p,q}(t) y_q \quad (p = 1, 2, \dots, n) \quad (5.7)$$

где Δ — дается формулой (2.2) (см. также (2.7)), $\gamma_1 = 0$ (уравнение энергии), $\gamma_p = \alpha$ ($p \geq 2$), $g_{p,q}$ являются линейными комбинациями $\psi_{ij}(t)$, так что в общем случае $g_{p,q} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для таких систем известно, что при $\alpha \rightarrow \infty$ существуют их решения (в нашем случае соответствующие ряду Гильберта)

$$y_p(t) \sim \sum_{v=1}^{\infty} \omega_{p,v}(t) \frac{1}{\alpha^v} \quad (5.8)$$

Начальные условия при $\alpha \rightarrow \infty$ также должны представляться асимптотическим рядом.

Для однокомпонентного газа в приближении Навье — Стокса свернутые моменты третьего порядка, т. е. тепловые потоки, $S_{ikk} = 0$. Уравнения для S_{ijk} обладают той же структурой [3], что и уравнения для любых нечетных моментов одноатомного маквеллова газа порядка $n \geq 3$: в левую часть входят только моменты порядка n , в правую часть входят только нечетные моменты M_k ($k \geq 3$). Поэтому если в начальный момент времени эти нечетные моменты функции распределения отсутствуют, то они равны нулю при любых t . Уравнения для четных моментов порядка $n > 2$ являются (в отличие от уравнений для τ_{ij}) неоднородными линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями (в правые их части входят моменты низших порядков).

Автор благодарен М. Н. Когану и А. А. Никольскому за интерес к работе.

Поступила 24 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. Об одном классе решений уравнений кинетических моментов Грэда. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. Comm. Pure Appl. Math., 1949, vol. 2, No 4 (русск. пер. Сб. пер. Механика, 1952, вып. 4, 5).
4. Никольский А. А. Об одном классе однородных движений сплошных сред и разреженных газов. Инж. ж., 1965, т. 5, № 6.
5. Никольский А. А. Трехмерное однородное расширение — сжатие разреженного газа со степенными функциями взаимодействия. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3.
6. Галкин В. С. Об одном решении кинетического уравнения Больцмана. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
7. Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwells Kinetic theory. J. of Rational Mechan. and Anal., 1956, vol. 5, No 1.
8. Галкин В. С. Одномерное нестационарное решение уравнений кинетических моментов одноатомного газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
9. Борисов А. С. Асимптотическое поведение некоторых решений системы кинетических моментов Грэда. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 6.
10. Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А. Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовой смеси. ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 3.
11. Grad H. Asymptotic of the Boltzmann equation. The Physics of Fluids, 1963, vol. 6, No 2.
12. Галкин В. С. О пределах применимости релаксационной модели кинетического уравнения Больцмана. Инж. ж., 1961, т. 1, вып. 3.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд-во «Наука», 1965.
14. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. Изд-во «Наука», 1965.