

О ТРЕХМЕРНОМ ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ЗАТУПЛЕННОМ ТЕЛЕ

Н. Д. ВВЕДЕНСКАЯ

(Москва)

Рассматривается ламинарный пограничный слой Прандтля, возникающий при стационарном обтекании под углом атаки затупленного конуса. Решение уравнений Прандтля ищется конечно-разностным методом. Оказывается, что гладкое решение задачи существует лишь в окрестности затупленной головки тела, а вдали от нее решения приобретают особенность: в плоскости симметрии задачи (на подветренной стороне) имеется разрыв первых производных от компонент скорости и от плотности.

При исследовании пограничного слоя Прандтля в задаче о стационарном обтекании под углом атаки острого конуса было показано [1], что автомодельное, зависящее от двух независимых переменных, решение уравнений Прандтля имеет разрыв первых производных в плоскости симметрии задачи (на подветренной стороне конуса). Возникло предположение, что в трехмерной задаче об обтекании под углом атаки затупленного тела решения уравнений Прандтля также могут быть негладкими. Настоящая работа проводилась для выяснения характера поведения решений трехмерных уравнений Прандтля. Для этого рассматривалось стационарное сверхзвуковое обтекание идеальным газом затупленного конуса. Результаты этой работы (так же, как и работы [1]) получены численно, конечно-разностным методом. Однако анализ численных результатов (исследование устойчивости схемы, мельчение шагов и т. п.) показывает, что свойства решений конечно-разностных уравнений не являются в данном случае результатом численных эффектов, а отражают поведение решений дифференциальных уравнений.

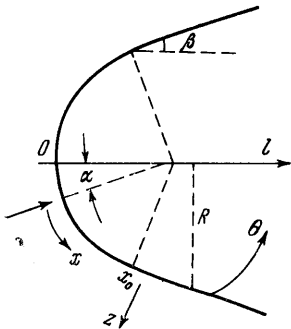
Математическая задача о пограничном слое, которая рассматривается здесь в работе, будет сформулирована в § 2; постановка ее принадлежит К. Н. Бабенко.

Обозначения: x, θ, z — связанные с поверхностью тела координаты (x направлено по образующей тела; z — перпендикулярно его поверхности; θ — угловая координата в плоскости, перпендикулярной оси тела; x отсчитывается от вершины, z — от поверхности, θ — от наветренной полуплоскости симметрии тела); l — расстояние от плоскости $x = \text{const}$ до вершины тела; u, v, w — компоненты скорости в направлениях x, θ, z , соответственно; ρ — плотность; T — температура; p — давление; η, κ — коэффициенты вязкости и теплопроводности; c_p — теплоемкость.

Соответствующие величины на теле при обтекании его невязким газом будем называть величинами, относящимися ко внешнему потоку, и отмечать знаком ∞ .

Граница тела при $l < l_0 = 1 - \sin \beta$ — сфера, а при $l > l_0$ — поверхность конуса с углом полураствора β (фиг. 1).

§ 1. Качественные результаты. В рассмотренных случаях угол атаки был не слишком велик и отрыва пограничного слоя не наблюдалось. Но уже при сравнительно небольших углах атаки (напр., угол атаки $\alpha = 5^\circ$ при угле полураствора $\beta = 15^\circ$) все величины в пограничном слое существенно меняются с изменением θ . С ростом θ от 0 до π толщина вытеснения



Фиг. 1

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u\rho}{u_{\infty}\rho_{\infty}} \right) dz$$

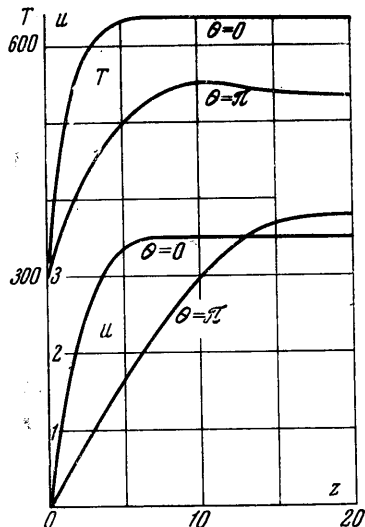
например, вырастает в несколько раз, вид профилей u, ρ, T , как функций z , тоже меняется по θ (фиг. 2—5).

Вдали от вершины тела все величины зависят в основном от z/\sqrt{x} и θ . Так, при достаточно большом фиксированном $x = x_1$ решение задачи мало отличается от автомодельного, зависящего от z/\sqrt{x} и θ , решения уравнений пограничного слоя на остром конусе (если внешний поток на этом конусе совпадает со внешним потоком, отвечающим x_1).

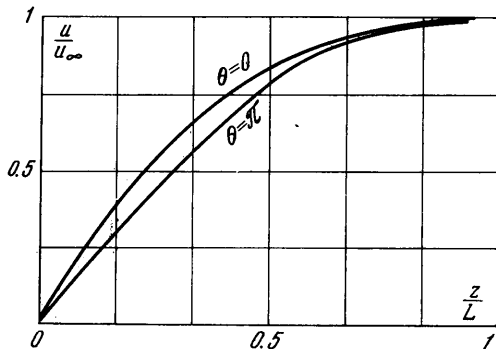
Однако наибольший интерес представляет поведение решения задачи в окрестности подветренной полуплоскости $\theta = \pi$.

На сферической части тела уравнения Прандтля будут иметь гладкое во всей области $|\theta| \leq \pi$ решение. В пограничном слое, как и во внешнем потоке, функции u, w, T, ρ

будут четными функциями угла θ , v — нечетной функцией θ ; $\partial u/\partial\theta = 0$, $\partial\rho/\partial\theta = 0$, $\partial T/\partial\theta = 0$ при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Четными функциями θ будут толщина вытеснения δ^* , тепловой поток на теле $q = \kappa T'_z$ и компонента вектора трения $\eta u'_z$. На конической части тела при небольших значениях l в численных расчетах не наблюдается негладкости решения. При дальнейшем же росте l характер решения меняется и в полуплоскости $\theta = \pi$ у решения возникает особенность, которой нет во внешнем потоке. Именно, первые производные по θ от функций u, w, ρ, T не стремятся к 0 при $\theta \rightarrow \pi$ и, значит, гладкое решение задачи существует при $l > l_1$



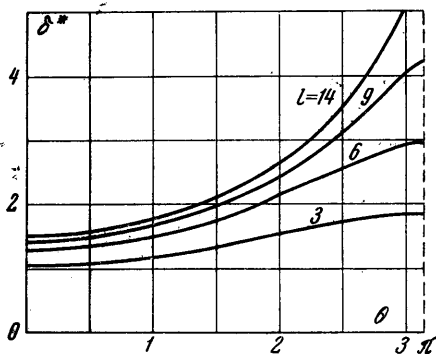
Фиг. 2



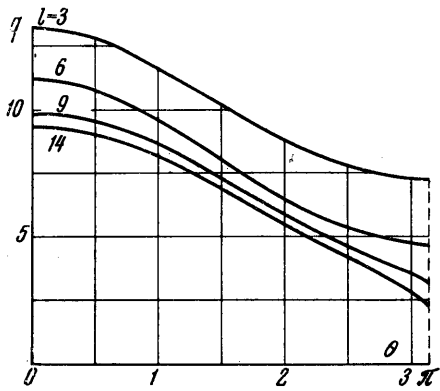
Фиг. 3

лишь в области $|\theta| < \pi$, а при $|\theta| = \pi$ оно имеет слабый разрыв. Толщина вытеснения δ^* , тепловой поток на теле q и компонента вектора трения $\eta u'_z$ тоже имеют при $|\theta| = \pi$ разрыв производной по θ , «угол». С ростом l величина этого угла возрастает (фиг. 4—5).

Уравнения Прандтля выводятся в предположении, что в пограничном слое все величины в потоке медленно меняются в направлениях, касательных к поверхности тела.



Фиг. 4



Фиг. 5

Поэтому существование у решений уравнений Прандтля разрыва указывает на то, что эти уравнения не пригодны для описания течения во всем пограничном слое. Возможно, что в окрестности полуплоскости $|\theta| = \pi$ решения уравнений Навье — Стокса имеют большие градиенты в направлениях, касательных к поверхности.

На фиг. 2 приведены графики u и T как функций z при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, на расстоянии $l = 14$ от вершины тела (за единицу принят радиус затупления тела). На фиг. 3 представлены графики функций $u(z/L)/u_\infty$ при этих же θ и l . (L — «толщина» пограничного слоя, см. ниже (2.7) (2.8).) На фиг. 4 и 5 представлены графики функций δ^* и q при различных l . Эти расчеты относятся к случаю, когда $\beta = 20^\circ$, $\alpha = 5^\circ$, число Маха $M = 4$, температура тела $T_0 = \text{const} = 300^\circ$, $c_p = 0,014$, $\eta = \eta_0 (T + C)^{-1} T^{3/2}$, $\eta_0 = 0.149$, $C = 117$, $\eta/\kappa = 52$, $\rho = p/VT$, $B = 0.04$. Величины для внешнего потока взяты из расчетов К. И. Бабенко и В. В. Русанова [2].

§ 2. Постановка краевой задачи. Разностная схема. Пусть затупленный круговой конус обтекается идеальным газом. Ищется решение уравнений пограничного слоя Прандтля, отвечающего этому обтеканию

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{R_x'}{R} v^2 \right) - \frac{\partial}{\partial z} \eta \frac{\partial u}{\partial z} = \\ = \rho_\infty \left(u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} + \frac{v_\infty}{R} \frac{\partial u_\infty}{\partial \theta} - \frac{R_x'}{R} v_\infty^2 \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{R_x'}{R} uv \right) - \frac{\partial}{\partial z} \eta \frac{\partial v}{\partial z} = \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$= \rho_\infty \left(u_\infty \frac{\partial v_\infty}{\partial x} + \frac{v_\infty}{R} \frac{\partial v_\infty}{\partial \theta} + \frac{R_x'}{R} u_\infty v_\infty \right)$$

$$\begin{aligned} c_p \rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \eta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial T}{\partial z} = \\ = c_{p\infty} \rho_\infty \left(u \frac{\partial T_\infty}{\partial x} + \frac{v}{R} \frac{\partial T_\infty}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \rho v + \frac{R_x'}{R} \rho u + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = 0 \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{P_\infty}{BT}, \quad B = \text{const}, \quad \eta = \eta(T), \quad \kappa = \kappa(T), \quad c_p = c_p(T), \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad |\theta| \leq \pi$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, 0) = v(x, \theta, 0) = w(x, \theta, 0) = 0, \quad T(x, \theta, 0) = T_0 \\ u(x, \theta, \infty) = u_\infty(x, \theta), \quad v(x, \theta, \infty) = v_\infty(x, \theta), \quad T(x, \theta, \infty) = T_\infty(x, \theta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $R = R(x)$ — расстояние от точки на поверхности тела до его оси, $R = \sin x$ при $x < x_0 = 1/2\pi - \beta$, $R = \sin x_0 + (x - x_0) \sin \beta$ при $x > x_0$. Правые части (2.1) написаны с учетом того, что в невязком потоке справедлив интеграл Бернулли, а энтропия на теле постоянна.

При такой постановке задачи течение в пограничном слое целиком задается граничными условиями (2.2). Если

$$u > 0 \quad \text{при } z > 0, \quad u = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (2.3)$$

в некоторой области $\{x \geq x_1, z \geq 0, |\theta| \leq \pi\}$, то в этой области для уравнений (2.1) можно искать решение смешанной задачи, задавая при $z = 0$, $z = \infty$ граничные условия (2.2) и задавая начальные значения для u , v , T , w при $x = x_1$ (координата x будет при этом времяобразной).

Ограничимся случаем такого обтекания, при котором $\alpha + \beta \leq 1/2\pi$ (для того, чтобы на сферической головке тела поток был симметричным относительно диаметра сферы, параллельного направлению набегающего потока). Условие (2.3) будет тогда выполнено при $x > \alpha$ (фиг. 1) и в области $\{x \geq x_1 > \alpha, z \geq 0, |\theta| \leq \pi\}$ можно искать решение задачи (2.1) — (2.2), если при $x = x_1$ известны функции u , v , T , w .

Решение задачи (2.1) — (2.2) при $x \leq 1/2\pi - \beta$ находится сравнительно просто, задача о расчете осесимметричного пограничного слоя неоднократно решалась (см. например, [3,4]).

В численных расчетах, как обычно, решение уравнений (2.1) ищется не в области $\{x \geq 0, z \geq 0, |\theta| \leq \pi\}$, а в ограниченной по z области

$$x \geq 0, \quad |\theta| \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq L$$

При этом второе условие (2.2) ставилось не при $z = \infty$, а при $z = L(x, \theta)$:

$$u(x, \theta, L) = u_\infty(x, \theta), \quad v(x, \theta, L) = v_\infty(x, \theta), \quad T(x, \theta, L) = T_\infty(x, \theta) \quad (2.4)$$

Значение $L = L(x, \theta)$ выбиралось достаточно большим (L находилось в процессе счета). Заметим, наконец, что в силу симметрии задачи достаточно искать ее решение для $0 \leq \theta \leq \pi$, задавая при $\theta = 0, \pi$ условия периодичности.

Численные расчеты удобнее вести в прямоугольной области, поэтому перейдем к новым независимым переменным

$$x, \theta, \zeta = f(z/L(x, \theta)), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f' > 0, \quad f'(0) \gg f'(1)$$

Функция f вводится потому, что в пограничном слое u, v, ρ, T имеют большие градиенты по z в окрестности тела (там f' велико) и мало меняется при $z \sim L$ (где f' мало). Для примера выпишем первое и последнее из уравнений системы (2.1) в новых переменных

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{f'\rho}{L} \left(w - L_x' \frac{z(\zeta, L)}{L} u - L_\theta' \frac{z(\zeta, L)}{LR} v \right) \frac{\partial u}{\partial \zeta} -$$

$$- \frac{f'}{L^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} f' \eta \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \rho \frac{R_x'}{R} v^2 = \rho_\infty \left(u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} + \frac{v_\infty}{R} \frac{\partial u_\infty}{\partial \theta} - \frac{R_x'}{R} v_\infty^2 \right) \quad (2.5)$$

$$\rho w = \frac{\rho z(\zeta, L)}{L} \left(L_x' u + L_\theta' \frac{v}{R} \right) -$$

$$- \int_0^\zeta \left(\frac{LR_x'}{R} \rho u + L_x' \rho u + L_\theta' \frac{\rho v}{R} + L \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{L}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \rho v \right) \frac{d\zeta}{f'} \quad (2.6)$$

Разностные уравнения аппроксимируют уравнения вида (2.5), (2.6). Опишем, как они выводятся¹. Область $x \geq x_1, 0 \leq \zeta \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$ покрывается прямоугольной сеткой с шагами

$$\tau_{n+1/2}^x \text{ по } x, \quad \tau_{k+1/2}^\theta \text{ по } \theta, \quad h \text{ по } \zeta$$

$$x_{n+1} = x_n + \tau_{n+1/2}^x, \quad \theta_{k+1} = \theta_k + \tau_{k+1/2}^\theta, \quad \zeta_{m+1} = \zeta_m + h$$

Шаги h по ζ постоянны (что соответствует переменным шагам по z).

Шаги $\tau_{n+1/2}^x$ и $\tau_{k+1/2}^\theta$ переменны.

Узлы сетки с координатами (x_n, θ_k, ζ_m) будем обозначать через (n, k, m) . Функции u, v, T, ρ, η, z вычисляются в узлах этой сетки, ρw — в узлах другой сетки с «полудельными» координатами $(x_n + 1/2 \tau_{n+1/2}^x, \theta_k + 1/2 \tau_{k+1/2}^\theta, \zeta_m)$. На точки, не принадлежащие сетке, все функции при необходимости интерполируются линейно (по ближайшим узлам).

Для аппроксимации уравнения (2.5) и двух аналогичных уравнений была выбрана «явная по x и θ » и «неявная по ζ » разностная схема, в которой учитывается направление линий тока. Разностные уравнения аппроксимируют уравнение (2.5) в точках $A(n, k, m)$, лежащих на пересечении плоскости $x = x_n - 1/2 \tau_{n-1/2}^x$ с прямыми, проходящими через узлы (n, k, m) в направлении

$$(n, k, m) = (u, v/R, 0), \quad u = u(n, k, m), \quad v = v(n, k, m), \quad R = R(x_n - 1/2 \tau_{n-1/2}^x)$$

Производные заменяются разностями так:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \rightarrow \frac{U(n, k, m)}{\sqrt{(\tau_{n-1/2}^x)^2 + (s_{n, k, m})^2}} [u(n, k, m) - u(n, k, m)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} \rightarrow \frac{1}{2h} \{ \delta [u(n, k, m+1) - u(n, k, m-1)] +$$

$$+ (1 - \delta) [u(n-1, k, m+1) - u(n-1, k, m-1)] \} \quad (1/2 \leq \delta \leq 1)$$

$$U = \sqrt{u^2 + v^2/R^2}, \quad s_{n, k, m} = \tau_{n+1/2}^x v(n, k, m) / Ru(n, k, m)$$

(Выражения для остальных членов уравнения (2.5) выписываются аналогично).

Здесь $u(n, k, j), j = m-1, m+1$ — значение функции u , вычисленное (при помощи интерполяции) в точке пересечения плоскости $x = x_{n-1}$ с прямыми, проходящими через узлы (n, k, j) в направлении $e(n, k, m)$, т. е. в точках с координатами

$$(x_{n-1}, \theta_k - s_{n, k, m} jh)$$

¹ Близкая разностная схема использовалась в работе [5], см. также [4].

В коэффициенты и свободные члены входят значения функций в точке $A(n, k, m)$. В уравнениях, аппроксимирующих (2.6), интеграл вычисляется по формуле трапеций, а все функции и производные в подинтегральном выражении и в свободном члене вычисляются в точке $(x_n - 1/2 \tau_{n-1/2}^x, \theta_k - 1/2 \tau_{k-1/2}^\theta, \zeta_m)$.

Члены, в которые входят величины из внешнего потока, аппроксимируются так же, как и остальные члены в уравнениях. Для того чтобы написать разностные уравнения для $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, используется четность функции w по θ и равенство нулю компоненты скорости v при $\theta = 0, \pi$. При вычислении $L(x_n, \theta_k) = L(n, k)$ требуется, чтобы на каждом луче $x = x_n$, $\theta = \theta$ функции u и T мало отличались от u_∞ и T_∞ при $(1 + \delta_1)^{-1} L(n, k) \leq z \leq L(n, k)$, $\delta_1 = \text{const} > 0$. Функция $L(n, k)$ определяется из условия

$$L(n, k) = (1 + \delta_1) \min z^*(n, k) \quad (2.7)$$

где для $z^*(n, k) = L(n, k) f^{-1}(\zeta^*)$

$$\begin{aligned} |u(n, k, \zeta) - u_\infty(n, k)| &< \delta_2 u_\infty(n, k) \quad \text{при } \zeta > \zeta^* \\ |T(n, k, \zeta) - T_\infty(n, k)| &< \delta_2 T_\infty(n, k) \quad (0 < \delta_2 < 1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

(Здесь как обычно, $u(n, k, \zeta)$, $T(n, k, \zeta)$ вычисляются по $u(n, k, m)$, $T(n, k, m)$ при помощи линейной интерполяции).

Нелинейная система разностных уравнений решается итерациями. Итерации организованы следующим образом: сначала на слое при $n = \text{const}$ на всех лучах пересчитываются u, v, T, ρ, η , значения же ρw и L берутся с предыдущей итерации (в силу нелинейности уравнений этот пересчет тоже делается с помощью итераций). Затем пересчитывается ρw и, наконец, на каждом луче пересчитывается L , для чего по значениям $L(n, k)$ с предыдущей итерации находятся $z^*(n, k)$, удовлетворяющие условиям (2.8), после чего $L(n, k)$ вычисляются по формуле (2.7). Заметим, что схема позволяет вычислять решение задачи (2.1), (2.2) в подобласти $0 \leq \theta \leq \theta_1 < \pi$.

На сферической поверхности решение, естественно, искать в координатах x', θ', ζ' , $x' = x - \alpha$, связанных с направлением набегающего потока, в которых это решение не зависит от θ' . Переход к нужным координатам делается затем простым поворотом. Двумерная разностная схема строится при этом так же, как и основная трехмерная схема (с естественными упрощениями). Начальными значениями для расчета сферически симметричного пограничного слоя, как обычно, служат функции $u(z) \equiv 0$, $w(z)$, $T(z)$, где w и T находятся из решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \rho \left[(u')^2 + w \frac{du'}{dz} \right] - \frac{d}{dz} \eta \frac{du'}{dz} &= \rho_\infty \left(\frac{du_\infty}{dz} \right)^2_{x'=0} \\ c_p \rho w \frac{dT}{dz} - \frac{d}{dz} \kappa \frac{dT}{dz} &= 0, \quad \frac{d}{dz} \rho w - 2\rho u' = 0 \\ u'(0) = w(0) = 0, \quad T(0) = T_0; \quad u'(L) &= \frac{du_\infty}{dx} \Big|_{x'=0}, \quad T(L) = T_\infty \Big|_{x'=0} \end{aligned}$$

Автор благодарит К. И. Бабенко и Э. Э. Шноля, с которыми работа детально обсуждалась, и благодарит сотрудников Математического института М. Г. Орлову, составившую программу на ЭВМ, и Л. Н. Евграфову, помогавшую в оформлении работы.

Поступило 28 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

- Введенская Н. Д. Расчет пограничного слоя, возникающего при обтекании конуса под углом атаки. Ж-л выч. матем. и матем. физики, 1966, т. 6, № 2.
- Бабенко К. И., Русанов В. В. Разностные методы решения пространственных задач газовой динамики. Тр. Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. (Обзорные доклады), Изд-во «Наука», 1965.
- Анкудинов А. Л. Результаты расчета пограничного слоя на затупленном конусах в сверхзвуковом потоке. Ж-л выч. матем. и матем. физики, 1965, т. 5, № 5.
- Пасконов В. В. Стандартная программа для решения уравнений пограничного слоя. «Численные методы в газовой динамике». Сб. работ ВЦ МГУ, Изд-во МГУ, 1963, вып. 2.
- Пасконов В. М., Рабинкина Н. В. Решение уравнений нестационарного пограничного слоя разностным методом. Численные методы в газовой динамике. Сб. работ ВЦ МГУ, Изд-во МГУ, 1965, вып. 4.