

РАЗВИТИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ПОТОКЕ ГАЗА С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ЛИНИЯМ ТОКА ЭНТАЛЬПИЕЙ ТОРМОЖЕНИЯ

В. В. ЛУНЕВ, А. Н. РУМЫНСКИЙ

(Москва)

Рассматривается ламинарный пограничный слой, в начальном сечении которого задано переменное по высоте распределение энтальпии торможения. Подобные задачи возникают, например, при расположении тел в следе за телом, при гиперзвуковом обтекании тонких притупленных тел (вследствие больших поперечных градиентов энтропии в высокоэнтропийном слое), при скачкообразном изменении температуры поверхности, на которой уже имеется развитый пограничный слой, при внезапном расширении пограничного слоя вследствие перетекания его через угловую точку поверхности и т. д.

Строго надлежит в подобных случаях решать уравнения пограничного слоя (если продольные градиенты много меньше поперечных) с заданным начальным распределением величин. С физической же точки зрения возмущенную область можно разбить на две — пристеночный пограничный слой и внешнюю область — поток газа с постоянной скоростью и заданным начальным профилем температуры, расчет которого дает граничные условия для пограничного слоя, а граница между областями определяется из условия достаточно гладкого склеивания решений. Такой подход во многом предпочтительней первого, так как дает возможность обойти (в рамках теории пограничного слоя) трудности, связанные с наличием возможной особенности в начальной точке поверхности, обусловленной разрывом граничных условий в ней, а также применять обычную теорию пограничного слоя, если влияние вязкости во внешней области несущественно. Однако такое разбиение требует дополнительных обоснований возможности независимого нахождения решения во внешней области и определения границы пограничного слоя, рассматриваемого как область влияния омываемой поверхности. Пограничный слой в неоднородном потоке рассматривался в ряде работ для линейного начального профиля скорости или температуры [1-3].

Следует отметить, что линейные начальные профили энтальпии или скорости при постоянных свойствах газа не претерпевают изменений под воздействием вязкости или теплопроводности. Так что отмеченные выше принципиальные особенности, связанные с наличием двух областей и их взаимодействием, в сущности не могут быть прослежены на этих примерах.

В данной работе получены и исследованы точные решения уравнений сжимаемого пограничного слоя для степенной зависимости от функции тока начального профиля энтальпии торможения при постоянной начальной скорости. Здесь показано, что влияние граничных условий на стенке действительно локализовано в пристеночном пограничном слое, который близок по размерам к обычному скоростному или тепловому пограничному слоям. Во внешней по отношению к этому слою области, в соответствии с описанной выше физической картиной, решение совпадает с решением задачи Коши для уравнения теплопроводности, описывающего развитие начального профиля температуры в безграничном установившемся потоке с постоянной скоростью.

Показано, что для представляющих практический интерес достаточно плавных начальных профилей внешний поток практически не претерпевает изменения до встречи с внутренним пограничным слоем, и его можно рассчитывать по законам для идеального газа.

1. Рассмотрим пограничный слой на пластине, продольно обтекаемой неоднородным потоком газа с постоянной скоростью в начальном сечении и степенным распределением энтальпии:

$$u = U = \text{const}, \quad i = U^2 a_n \varphi^n \quad \text{при } x = 0, \psi \geq 0 \quad (1.1)$$

$$u = v = 0, \quad i = U^2 i_w \quad \text{при } \psi = 0, x \geq 0 \quad (1.2)$$

$$(\varphi = \varphi/\varphi_0, a_n = \text{const}, \psi_0 = \text{const}, i_w = \text{const}, n \geq 0)$$

Здесь x, y — координаты вдоль и по нормали к поверхности пластины; u, v — составляющие скорости по x, y ; U — скорость набегающего потока; i — энтальпия, ψ — функция тока; a_n, n — произвольные заданные числа. Индекс w относится к параметрам на стенке.

При постоянных произведениях плотности на вязкость $\rho\mu$ и числе Прандтля σ при условиях (1.1), (1.2) получены автомодельные решения уравнений пограничного слоя, которые использованы для анализа качественных особенностей подобного рода задач. Более общее начальное распределение всегда может быть аппроксимировано полиномом

$$i = U^2 \sum_{n=0}^N i_n \varphi^n \quad (1.3)$$

или представлено рядом (1.3) при $N \rightarrow \infty$ в случае его сходимости. В силу линейности уравнения энергии при постоянных $\rho\mu$ и σ , решение в этом случае также представимо в виде суммы из соответствующих автомодельных решений или бесконечного ряда при условии его сходимости. Полученное решение охватывает весь квадрат $x \geq 0, y \geq 0$ и формально не подразделяется на пограничный слой и внешнюю область, хотя фактически анализ решения, как указано в введении, подтверждает возможность такого разбиения.

Задача сводится к решению системы уравнений пограничного слоя

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho\mu u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right), \quad \psi = \int_0^y \rho u \, dy, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho\mu i \frac{\partial i}{\partial \psi} \right) + \rho\mu \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 \quad (1.4)$$

при начальных и граничных условиях (1.1), (1.2). Решение первого уравнения совпадает с известным решением Блазиуса

$$u = U f'(\xi), \quad \psi = \sqrt{\rho\mu U x} f(\xi) \quad \text{или} \quad \varphi = \sqrt{X} f(\xi)$$

$$\varphi = \frac{\psi}{\psi_0}, \quad \psi_0 = \sqrt{\rho\mu UL}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad \xi = \left(\frac{U}{\rho\mu x} \right)^{1/2} \eta \quad (1.5)$$

$$\eta = \int_0^y \rho \, dy, \quad 2f''' + ff'' = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1$$

При больших ξ (впредь будем полагать $\xi > 5$) имеем

$$f' = 1 - \frac{\text{const}}{2(\xi - \beta)} \exp \frac{(\xi - \beta^2)}{4} \approx 1, \quad f \approx \xi - \beta \quad (\beta = 1.73) \quad (1.6)$$

Последнее уравнение (1.4) в переменных X, ξ имеет вид

$$\frac{\partial^2 i}{\partial \xi^2} + \frac{\sigma}{2} f \frac{\partial i}{\partial \xi} - \sigma f' X \frac{\partial i}{\partial X} = -\sigma f'^2 \quad (1.7)$$

Это уравнение имеет хорошо известное частное решение $i = U^2 j_0(\xi)$, снимающее правую часть и неоднородное (постоянное) граничное условие на стенке

$$j_0'' + \frac{\sigma}{2} f j_0' = -\sigma f'^2, \quad j_0 = \vartheta_1(\xi) - [1 - i_w + \vartheta_1(0)] \frac{\vartheta_2(\xi)}{\vartheta_2(0)} \quad (1.8)$$

$$\vartheta_1 = \sigma \int_{\xi}^{\infty} f'' \sigma \int_0^{\xi} (f'')^{2-\sigma} d\xi d\xi, \quad \vartheta_2 = \int_{\xi}^{\infty} f''^{\sigma} d\xi, \quad j_0(0) = i_w, \quad j_0(\infty) = 0$$

Полагая полное решение $i^{(n)} = U^2 j_0 + i_n$, сведем задачу к решению однородного уравнения (1.7) с условием $i = 0$ на стенке и начальными условиями (1.4). Это решение представим в виде

$$i_n(X, \xi) = U^2 C_n \alpha_n J_n(\xi) X^{1/2n} \quad (C_n = \text{const}) \quad (1.9)$$

Функция $I_n(\xi)$ удовлетворяет следующим уравнению и граничным условиям:

$$I_n'' + \frac{\sigma}{2} f I_n' - \frac{\sigma n}{2} f' I_n = 0, \quad I_n(0) = 0, \quad I_n'(0) = 1 \quad (1.10)$$

Это уравнение исследовалось в ряде работ (см., например, [4]). Функция I_n — монотонно возрастающая, так как в противном случае она имела бы максимум в некоторой точке со значениями $I_n' = 0$, $I_n > 0$, что невозможно в силу уравнения (1.10). Отсюда также следует, что это уравнение не имеет собственных функций при $n \geq 0$, так что искомое решение — единственное¹.

Рассмотрим две задачи Коши для второго уравнения (1.4), которое при $\xi > 5$ может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial i_n}{\partial X} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 i_n}{\partial \varphi^2} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} i_n^+ &= \varphi^n \quad (\varphi \geq 0), & i_n^+ &= 0 \quad (\varphi \leq 0) \\ i_n^- &= 0 \quad (\varphi \geq 0), & i_n^- &= (-\varphi)^n \quad (\varphi \leq 0) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Решения этих задач, согласно общей теории уравнения теплопроводности, имеют вид:

$$i_n^+ = \frac{\sqrt{\sigma}}{2} \int_0^\infty \varphi^{*n} \exp\left[-\frac{(\varphi - \varphi^*)^2 \sigma}{4X}\right] \frac{d\varphi^*}{\sqrt{X}} = \left(\frac{2}{\sqrt{\sigma}}\right)^n X^{1/2n} J_n^+(z) \quad (1.13)$$

$$i_n^- = \frac{\sqrt{\sigma}}{2} \int_0^\infty \varphi^{*n} \exp\left[-\frac{(\varphi + \varphi^*)^2 \sigma}{4X}\right] \frac{d\varphi^*}{\sqrt{X}} = \left(\frac{2}{\sqrt{\sigma}}\right)^n X^{1/2n} J_n^-$$

$$J_n^\pm = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^n \exp^{-(z \mp t)^2} dt, \quad z = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma} (\xi - \beta) \quad (1.14)$$

Уравнение (1.11) сводится к уравнению для J_n , которое совпадает с (1.10) при больших ξ

$$J_n''(z) + 2z J_n'(z) - 2n J_n = 0, \quad J_n = C_n^+ J_n^+ + C_n^- J_n^- \quad (1.15)$$

Линейная независимость решений I_n^+ и I_n^- ясна из физических соображений и легко устанавливается рассмотрением определителя Вронского.

Заметим, что функции I_n удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} J_{n+2}^\pm(z) &= \frac{1}{2} (n+1) J_n^\pm \pm z J_{n+1}^\pm(z), \quad J^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \text{erf } z) \\ J_1^\pm &= \pm \frac{z}{2} (1 \pm \text{erf } z) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \left(\text{erf } z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

¹ Единственность решения уравнения (1.7) следует аналогично задаче теплопроводности из принципа максимума решения, которому, как легко показать, удовлетворяет это уравнение.

Из общих свойств решения (1.13) и формулы Жувиля для уравнения (1.15) следует

$$J_n^+ \rightarrow z^n (1 + o(z^{-2})) = (1/2 \sqrt{\sigma})^n (\xi - \beta)^n, \quad J_n^- \rightarrow z^n e^{-z^2} \quad (1.17)$$

Решение I_n^- быстро затухает при $z \rightarrow \infty$ и поэтому не влияет на асимптотическое поведение решения¹. Поэтому, сравнивая (1.9) и (1.17), получим следующее предельное соотношение:

$$\alpha_n I_n \rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{\sigma}} \right)^n J_n^+ \rightarrow (\xi - \beta)^n \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty \quad (1.18)$$

Таким образом, условия (1.17), а следовательно, и (1.4) удовлетворяются при следующем выборе:

$$\alpha_n = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \alpha_n^{(1)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \alpha_n^{(2)}, \quad \alpha_n^{(1)} = \left(\frac{2}{\sqrt{\sigma}} \right)^n \frac{J_n^+}{I_n}, \quad \alpha_n^{(2)} = \frac{(\xi - \beta)^n}{I_n} \quad (1.19)$$

Функции $I_n^+(\xi)$ для целых n легко определяются при помощи (1.15) и таблиц вероятностного интеграла. Функции $I_n(\xi)$ для $\sigma = 0.72$ и $n = 0-5$, полученные численным интегрированием уравнения (1.10), приведены в табл. 1 и на фиг. 1. Значения $\alpha_n^* = \alpha_n (1/2\sigma)^n$ приведены в табл. 2. При $n = 1$ данное решение совпадает с решением работы [1].

Таблица 1

ξ	$n = 0.5$	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.4	0.400	0.400	0.400	0.400	0.401	0.401
0.6	0.600	0.600	0.602	0.604	0.605	0.607
0.8	0.800	0.802	0.807	0.812	0.817	0.821
1.0	1.000	1.004	1.016	1.028	1.040	1.052
1.4	1.400	1.417	1.461	1.504	1.550	1.594
1.8	1.799	1.848	1.962	2.081	2.205	2.331
2.2	2.198	2.305	2.554	2.819	3.104	3.403
2.6	2.596	2.797	3.274	3.799	4.381	5.013
3.0	2.989	3.331	4.160	5.089	6.208	7.448
3.4	3.376	3.912	5.249	6.812	8.808	11.110
3.8	3.755	4.537	6.571	9.085	12.450	16.52
4.2	4.122	5.205	8.150	12.02	17.46	24.38
4.6	4.473	5.907	10.00	15.74	24.20	35.58
5.0	4.809	6.636	12.13	20.35	33.11	51.21
6.0	5.572	8.529	18.68	36.52	68.05	119.1
7.0	6.240	10.46	26.41	60.62	128.5	252.6
8.0	6.830	12.40	36.14	94.51	225.5	494.7

Таблица 2

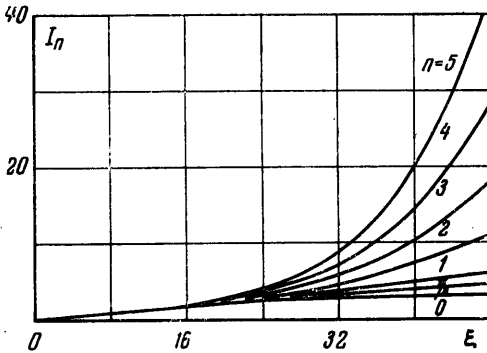
n	0	1/2	1	2	3	4	5
α_n^*	0.296	0.238	0.215	0.210	0.242	0.321	0.484
λ_n	1	0.963	1.00	1.22	1.58	2.53	4.10
λ_n'	1	0.980	1.00	1.18	1.54	2.08	2.8

¹ Заметим, что это решение имеет (по крайней мере при $\sigma = 1$) порядок ошибки, вносимой в решение при переходе от уравнения (1.10) к уравнению (1.15).

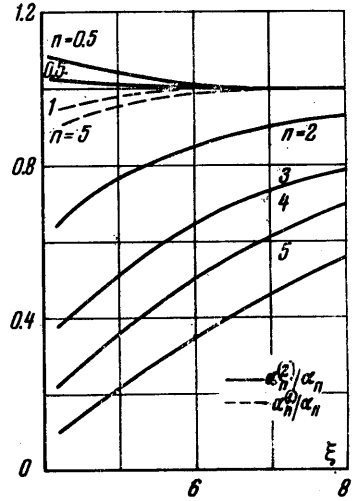
Заметим, что уравнение (1.15) имеет решение в виде ряда Эрмита

$$J_n^+ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n-2k}, \quad \alpha_0 = 1, \quad a_k = \frac{(n+2-2k)(n+1-2k)}{k} a_{k-1} \quad (1.20)$$

При целом значении n этот ряд имеет конечное число членов и использовался ранее при решении ряда задач пограничного слоя. Очевидно, первый член ряда (1.20) уже определяет асимптотику решения I_n и α_n . Однако использование для этой цели соотношений (1.13)—(1.17) имеет большой физический смысл. Кроме того, величина $\alpha_n^{(1)}$ гораздо быстрее достигает своего предельного значения, чем $\alpha_n^{(2)}$ (фиг. 2).



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Выше получено, что решение (1.9), справедливое во всем квадрате $x, y > 0$, на некотором удалении от стенки, вообще говоря, близком (при $n \sim 1$) к границе обычного пограничного слоя, совпадает с первым решением (1.13). Это решение, в свою очередь, соответствует задаче о развитии начального профиля энthalпии $i \sim \varphi^n$, продолженного нулевым образом¹ в область $\varphi \leq 0$, в неограниченном плоско-параллельном потоке с постоянной скоростью. Влияние граничных условий на стенке локализовано, таким образом, в пристеночной области ($\xi = 5-6$, фиг. 2), близкой по размерам к обычному пограничному слою.

Этот результат, вообще говоря, очевиден из общих физических и математических соображений и имеет несомненно более общий характер; и он во многих случаях позволит упростить постановку подобного рода задач, сводя их к рассмотрению развития пограничного слоя в рассчитанном заранее неоднородном внешнем потоке.

Задача существенно упрощается в случае сравнительно слабой неоднородности внешнего потока, когда можно пренебречь деформацией начального профиля до встречи в точке X_0 линий тока с границей пограничного слоя.

Для рассмотренной задачи отношение истинных параметров в этой точке (X_0, ξ_8) к начальным на фиксированной линии тока равно

$$\lambda_n = \frac{\alpha_n}{\varphi^n} I_n(\xi_8) X^{1/2} n = \frac{\alpha_n}{\alpha_n^{(2)}(\xi_8)} \left(X_0 = \frac{\varphi^2}{(\xi - \beta)^2} \right) \quad (2.1)$$

Отношения λ_n для $\xi = 5.2$ приведены в табл. 2. Деформация начальных профилей незначительна при $n < 2$, что соответствует качественно большинству практически интересных задач. Это справедливо, например, для начальных профилей, сформулированных пограничным слоем, профилей скорости в высокоэнтропийном слое на тонких притупленных телах и т. д. Заметим, что эта деформация зависит лишь от начального профиля и не зависит от числа Рейнольдса. Этот результат также носит общий характер. В самом деле, расстояние, на котором линия тока φ входит в пограничный слой в соот-

¹ Поскольку второе решение (1.13) $C_n^- i_n^-$ быстро затухает, и незначительно в области выше границы пограничного слоя, то такое продолжение может быть практически произвольным (если отбросить случай чрезмерно больших C_n^-), тем более, если использовать более общий начальный профиль (1.3).

ветствии с (1.5), равно $l \approx \psi^2/\rho\mu U c^2$, где коэффициент $c \approx f(\zeta_0) \approx 3.3$ — для пластины. Тогда изменение какой-либо величины F за счет диссипации на расстоянии l будет в соответствии с (1.4) иметь порядок

$$\Delta F \sim \rho\mu U \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} \sim \frac{1}{c^2} \psi^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial \psi^2} \quad (F_0 = F(x=0)) \quad (2.2)$$

Как видно, величина справа (2.2) действительно зависит от начального профиля. Для $F_0 = i \sim \psi^n$ и $c = 3.3$ из (2.2) получим $\Delta i/i_0 \approx 0.09n(n-1)$; соотношение $\lambda_n = i/i_0$, приведенное в табл. 2, близко к точным значениям λ_n , полученным по (2.1).

Рассмотрим некоторые особенности в распределении тепловых потоков на поверхности в случае неоднородного набегающего потока. Ограничимся простейшим случаем начального профиля

$$i = U^2 (a_0 + a_n \psi^n) \quad (2.3)$$

Тогда получим

$$q = \sigma^{-1} \sqrt{\rho\mu U/x} U^2 (j'(0) + a_0 \alpha_0 + a_n \alpha_n X^{1/2 n}) = q_0 + q_n \quad (2.4)$$

$$q_0 = 0.332 \sigma^{-1/2} \sqrt{\rho\mu U/x} (i_e - i_w), \quad q_n = \sigma^{-1} \sqrt{\rho\mu U/x} U^2 a_n \alpha_n X^{1/2 n}$$

Здесь q_0 — тепловой поток, обусловленный постоянной слагаемой энтальпии торможения i_{00} в набегающем потоке и граничным условием на стенке, и для него использовано обычное представление, i_e — энтальпия восстановления, q_n — добавочный тепловой поток, обусловленный неоднородностью энтальпии торможения. Величина q_n возрастает при $n > 1$ и убывает при $n < 1$.

Представив суммарный тепловой поток в виде

$$q = AR_x^{-1/2} (1 + B_n R_x^{1/2 n}), \quad R_x = \frac{\rho U x}{\mu} \quad (2.5)$$

легко убедиться, что при $n > 1$, $a_n > 0$ величина q будет иметь минимум в точке $R_x = [(n-1) B_n]^{-1}$. При этом $q = q_0 n/(n-1)$.

Этот результат имеет очевидный физический смысл и объясняется взаимно противоположным влиянием утолщения пограничного слоя и одновременного роста энтальпии торможения на его внешней границе. При $a_n < 0$, очевидно, тепловой поток будет быстрее падать с ростом x , чем в классическом случае $n = 0$. В случае начального профиля более общего вида, очевидно, всегда будет $q/q_0 > 1$ при возрастающей с ростом x начальной энтальпии, и $q/q_0 < 1$ — при убывающей.

Пользуясь случаем, авторы благодарят Л. Д. Переходову, выполнившую численное интегрирование уравнений и получившую все численные результаты, приведенные в работе.

Поступило 8 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. T i n g Y i L i. Effects of Free-Stream Vorticity of the behavior of a Viscous Boundary Layer. JAS, 1956, vol. 23, N 12, p. 1128, 1129.
2. G l a u e r t M. B. The Boundary Layer in Simple Shear Flow Past a Flat Plate. JAS, 1957, vol. 24, N 11, p. 848—849.
3. S p a r r o w E. M., G r e g g J. L. The effect of a Noniso-thermal Free Stream on Boundary-Layer Heat Transfer. JAM, 1959, N 2, p. 161—165.
4. Ч е п м е н Д., Р у б е з и н М. Профили температур и скоростей в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа при произвольном распределении температуры вдоль обтекаемой поверхности. Сб. пер. «Механика», 1950, № 4.