

ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВОЗДУХА С УЧЕТОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ

В. П. СТУЛОВ, Л. И. ТУРЧАК

(Москва)

Получено численное решение задачи об обтекании сферы потоком воздуха в условиях, когда в ударном слое происходит неравновесное возбуждение колебательных степеней свободы молекулярных компонент. Задача решена методом, использованным в работе [1]. При вычислении скоростей релаксации учитывались два процесса: 1) переход энергии поступательного движения молекул в энергию колебаний при столкновении, 2) обмен колебательной энергией между компонентами воздуха. Выражения для скоростей релаксации вычислены в работе [2]. Решение показывает, что в состоянии, далеком от равновесия, вблизи поверхности сферы образуется релаксационный слой. Проводится сравнение расчетных значений отхода ударной волны с экспериментальными данными, опубликованными в [3].

Обозначения

uV_{\max}, vV_{\max} — нормальная и касательная к поверхности сферы составляющие скорости,

V_{\max} — максимальная скорость,

$\rho\rho_{\infty}V_{\max}^2$ — давление,

$\rho\rho_{\infty}$ — плотность,

TT_{∞} — температура,

$e_{vi}RT_{\infty}$ — колебательная энергия i -компоненты на 1 моль ($i = O_2, N_2$),

$\epsilon = r\gamma_b - 1$ — форма ударной волны,

a_f — замороженная скорость звука,

HRT_{∞}/m — полная энтальпия газа.

1. Постановка задачи и метод решения. Движение воздуха в слое между отошедшей ударной волной и поверхностью сферы при наличии колебательной релаксации описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \nabla e_{vi} = \omega_i \quad (1.1) \\ \mathbf{v} \cdot \nabla p - a_f^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \gamma p \Phi, \quad p = \frac{\rho T}{2H} \end{aligned}$$

Функция Φ линейно выражается через скорости колебательной релаксации ω_i

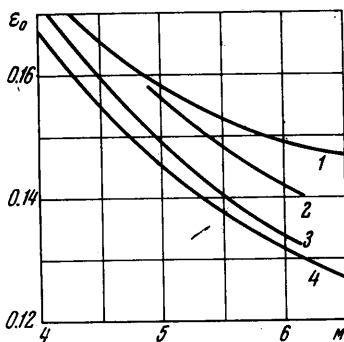
$$\Phi = -\frac{1}{c_p T} \sum_i \gamma_i \omega_i \quad (1.2)$$

где γ_i — молярная концентрация i -й компоненты.

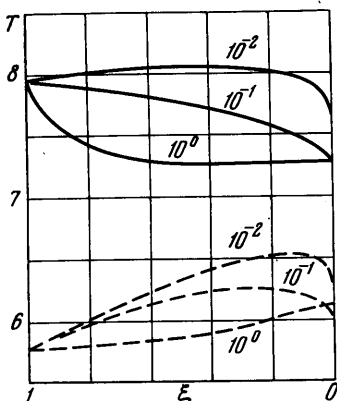
В отличие от случая колебательной релаксации в чистом газе в случае смеси изменение средней колебательной энергии каждой компоненты e_{vi} зависит от скоростей двух процессов, т. е. $\omega_i = \omega_{1i} + \omega_{2i}$. Во-первых, как и в случае чистого газа, в момент столкновения молекул часть энергии из поступательного движения переходит в энергию колебаний. Во-вторых, при столкновении молекул различных компонент происходит обмен колебательной энергией между компонентами (естественно, обмен энергией молекулярных колебаний между частицами одной компоненты не влияет на e_{vi}). Скорости обоих процессов на основе данных о потенциале межмолекулярного взаимодействия для воздуха вычислены в работе [2]. Выражения для ω_i в используемых здесь переменных приведены в [4], где исследовано течение за фронтом ударной волны в воздухе при наличии колебательной релаксации.

Граничными условиями рассматриваемой задачи служат законы сохранения массы, энергии, импульса на ударной волне и условие непроницаемости из поверхности сферы $u = 0$. Предполагаем, как это обычно делается, что на ударной волне происходит мгновенное возбуждение поступательного и вращательного молекулярных движений, а колебания остаются невозбужденными. Поэтому на ударной волне $e_{vi} = e_{vi\infty} = 0$.

Поставленная задача решается методом, изложенным, например, в работе [1]. Использовалась пятиточечная аппроксимация функций по углу θ в виде полиномов с коэффициентами, зависящими от ξ . Это позволяет выразить производные по θ через значения функций на лучах.



Фиг. 1



Фиг. 2

Полученная таким образом система обыкновенных дифференциальных уравнений совпадает с системой (3.2)—(3.3) работы [1], в которой надо опустить уравнения для концентраций γ_i , так как в рассматриваемом случае $\gamma_i = \text{const}$. Условия на ударной волне также полностью идентичны соотношениям (3.5). Система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась численно методом Рунге—Кутты с автоматическим выбором шага по заданной относительной точности. Подбор положения ударной волны обеспечивал выполнение условия непроницаемости на сфере.

Точность решения оценивалась с помощью уравнения сохранения энтальпии. Это уравнение в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{1}{H} \left(\frac{7}{2} T + \gamma_1 e_{v1} + \gamma_2 e_{v2} \right) + u^2 + v^2 = 1 \quad (1.3)$$

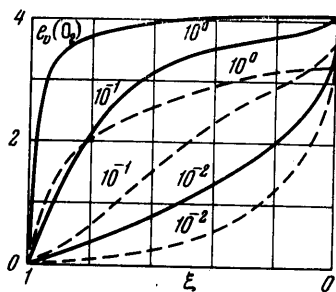
Для типичных вариантов отличие левой части (1.3) от единицы в узлах сетки не превышает 0.5%.

2. Течение в ударном слое. Расчеты обтекания сферы были проведены для такого диапазона чисел Маха, когда за ударной волной происходит заметное возбуждение колебательных степеней свободы молекул, однако диссоциация еще не начинается. При $T_\infty = 290^\circ \text{K}$ это соответствует примерно $M \sim 4 \div 7$. Давление набегающего потока изменялось с таким расчетом, чтобы охватить весь диапазон изменения состояния в ударном слое от замороженного до близкого к равновесному ($p_\infty = 0.01 \div 1 \text{ атм.}$). Все расчеты проводились для сферы радиуса $R = 0.75 \text{ см.}$ Изменять R нет необходимости, поскольку в случае колебательной релаксации бинарное подобие [1] ($Rp_\infty = \text{const}$) имеет место при любой степени неравновесности.

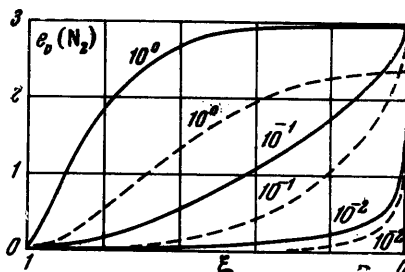
На фиг. 1 представлена зависимость отхода ударной волны вдоль оси симметрии ϵ_0 от числа M для различных давлений p_∞ . Кривая 1 соответствует идеальному газу с $\gamma = 1.4$. Кривая 4 рассчитана в предположении равновесного возбуждения колебательных степеней свободы O_2 и N_2 (химическими реакциями пренебрегается). Кривые

2 и 3 изображают отход волны в неравновесном случае для $p_{\infty} = 0,1 \text{ атм}$ и $p_{\infty} = 1 \text{ атм}$ соответственно. Как и следовало ожидать, при увеличении p_{∞} величина e_0 приближается к равновесному значению.

Распределение температуры газа вдоль оси симметрии течения (сплошные линии) и вдоль крайнего луча ($\theta = 0,75$) (пунктирные линии) представлено на фиг. 2. Кривые рассчитаны для $M=6$ и $p_{\infty} = 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0 \text{ атм}$. Распределение температуры, а также плотности и энергии колебательных степеней свободы e_{vi} (фиг. 3, 4) существенно меняется в зависимости от степени неравновесности течения. На изменение температуры вдоль оси симметрии влияют два фактора: 1) температура растет за счет дополнитель-



Фиг. 3



Фиг. 4

ного торможения потока от скорости за ударной волной до нулевой скорости в критической точке и 2) температура падает за счет возбуждения колебательных степеней свободы. При малых давлениях возбуждение колебаний происходит лишь в окрестности критической точки, поэтому распределение температуры имеет максимум. При больших давлениях интенсивное возбуждение колебаний происходит непосредственно за ударной волной, что приводит к резкому падению температуры. Примерно в середине слоя колебания возбуждены практически равномерно и температура несколько увеличивается за счет торможения; имеется слабо выраженный минимум.

Характер возбуждения колебаний отдельных компонент воздуха и роль механизма обмена при обтекании сферы аналогичны случаю прямой ударной волны [4].

3. Свойства решения в критической точке и вблизи поверхности сферы.

Из системы уравнений (1.1), записанной в переменных (ξ, θ) , легко установить, что критическая точка является особой точкой системы. Свойства решения в этой точке необходимо знать, во-первых, для правильного построения численного решения, во-вторых, для правильного расчета пограничного слоя на поверхности сферы при наличии неравновесности.

Выясним, прежде всего, значения самих параметров в критической точке. Запишем систему уравнений в переменных ξ, θ для оси симметрии

$$u_{\xi} = \frac{1}{\rho u} p_{\xi}, \quad v_0 \xi^{\circ} = -\frac{\xi e''}{1 + \xi \xi} - \frac{a}{u} \left[\frac{p''}{\rho} + v_0^{\circ} (v_0^{\circ} + u) \right]$$

$$p_{\xi} = \frac{\rho u [e \Phi + 2a(u + v_0^{\circ})]}{1 - M_f^2}, \quad \rho_{\xi} = \frac{1}{a_f^2} p_{\xi} - \frac{\varepsilon \rho}{u} \Phi, \quad e_{vi \xi} = \frac{\varepsilon}{u} \omega_i \quad (3.1)$$

$$\left(a = \frac{\varepsilon}{1 + \xi \xi}, \quad v_0^{\circ} = \left. \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}, \quad M_f = \frac{u}{a_f}, \quad f' = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad f_{\xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

Для затупленных тел всегда можно считать, что p'' — конечная величина. Из второго уравнения следует, что в критической точке должно выполняться соотношение $v_0^{\circ 2} = -p''/\rho$, т. е. v_0° в критической точке также конечная величина. Тогда из первого и третьего уравнений можно заключить, что в критической точке $u_{\xi} = \text{const} \neq 0$, т. е. вдоль оси симметрии $u \cong c \cdot \xi$. Обратимся теперь к последнему уравнению (3.1). Для большинства процессов скорость релаксации ω_i можно считать приближенно пропорциональной величине отклонения от равновесия.

Имеем

$$\frac{de_{vi}}{d\xi} = - \frac{e_{vie} - e_{vi}}{\tau\xi} \quad (3.2)$$

Решая линейное уравнение (3.2), получим

$$e_{vi} = e_{vie} (1 - \xi^{1/\tau}) \quad (3.3)$$

Таким образом, в критической точке ($\xi = 0$) всегда имеет место равновесие независимо от времени релаксации τ . Этот факт легко понять и физически. При условии $u \sim c\xi$ время движения частицы газа из любого положения на оси симметрии до критической точки бесконечно, и поэтому всякий релаксационный процесс, идущий с конечной скоростью, успевает прийти в равновесие.

Равновесные колебательные энергии e_{vie} зависят только от температуры, поэтому из соотношения (1.3) следует, что при заданной полной энтальпии H температура в критической точке определяется однозначно, независимо от степени неравновесности течения. С другой стороны, давление в критической точке зависит от времени релаксации и может быть определено лишь в результате интегрирования дифференциальных уравнений от волны к телу (условие постоянства энтропии в случае релаксации, очевидно, не выполняется). Заметим, что в более общем случае химических реакций из условия сохранения полной энтальпии $h + 1/2u^2 + v^2 = H$ следует, что и температура торможения зависит от «предыстории» процесса, так как в этом случае энтальпия газа в равновесии зависит не только от температуры, но и от давления.

Рассмотрим теперь поведение производных по ξ вблизи особой точки. Из (3.3) следует, что $e_{vix} \sim \xi^{1/\tau-1}$, т. е. $e_{vix} = 0$ при $\tau < 1$ (околоравновесное состояние) и $e_{vix} \rightarrow \infty$ при $\tau > 1$ (околозамороженное состояние). Из (3.1) получаем порядки остальных производных

$$u_\xi \sim \text{const}, \quad p_\xi \sim \xi, \quad \omega_i \sim \xi^{1/\tau}, \quad \rho_\xi \sim T_\xi \sim \xi^{\frac{1}{\tau}-1} \quad (3.4)$$

Путем анализа полной системы уравнений можно показать, что оценки (3.4) имеют место не только в критической точке, но и вдоль поверхности обтекаемого тела. Как уже указывалось в [1], в околозамороженном течении вдоль поверхности тела имеет место релаксационный слой, поперек которого происходит резкое изменение плотности, температуры и релаксационных параметров (e_{vi} или концентраций).

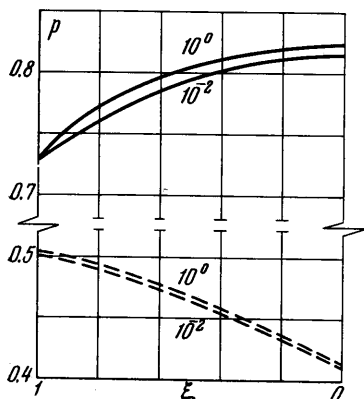
Все эти особенности неравновесного течения в ударном слое были подтверждены и проанализированы на численных решениях. При расчете особенность при $\xi = 0$ преодолевалась путем экстраполяции переменных с малых значений ξ . Поэтому в околозамороженном состоянии, когда T_ξ, ρ_ξ, e_{vix} на поверхности сферы очень велики, соответствующие параметры получаются с ошибкой. Как уже отмечалось в [1], это не влияет на точность всего решения, поскольку подбор положения ударной волны ведется по условию $u|_{\xi=0} = 0$, а скорость u не испытывает резкого изменения вблизи поверхности тела.

Приведем значения параметров торможения T и p при $M = 6$ для различных p_∞ атм.

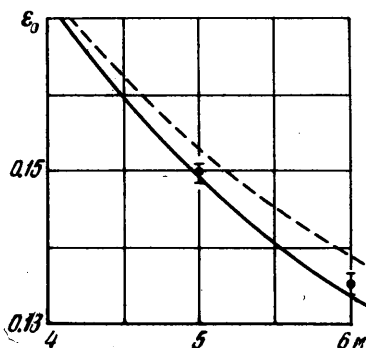
$p_\infty = 0$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
$T_0^\circ = 8.200$	7.673	7.338	7.238	7.283	7.284	7.284	7.284
$p_0^\circ = 0.8156$	0.8162	0.8174	0.8184	0.8198	0.8206	0.8219	0.8230

До $p_{\infty} = 0.05$ атм величина T_0° несколько завышена из-за экстраполяции. Для $p_{\infty} > 0.05$ атм T_0° практически постоянна. Давление торможения монотонно возрастает от замороженного до равновесного значения.

Появление релаксационного слоя при низких p_{∞} видно из графиков на фиг. 2, 3, 4, где изображены, соответственно, распределения температуры, e_{vO_2} и e_{vN_2} для $M=6$ при $p_{\infty} = 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0$ атм вдоль оси симметрии (сплошные линии) и вдоль второго луча (пунктирные линии). На фиг. 5 представлено распределение давления для $M=6$ при $p_{\infty} = 10^{-2}, 10^0$ атм.



Фиг. 5



Фиг. 6

Для всех p_{∞} давление (и скорости) вблизи поверхности тела меняется плавно.

4. Сравнение с экспериментом. Расчеты обтекания сферы проводились как с учетом обмена колебательной энергией между компонентами воздуха, так и без него. Было проведено сравнение отхода волны ϵ_0 в том и другом случае с экспериментальными данными [3]. Результаты сравнения для $p_{\infty} = 1$ атм приведены на фиг. 6 (сплошная линия — результаты с учетом обмена, пунктирная — без учета обмена, экспериментальные данные нанесены с учетом ошибок эксперимента). Эксперимент отчетливо указывает на то, что в воздухе кроме перехода поступательной энергии в колебательную существует другой, достаточно сильный, процесс, который ускоряет возбуждение колебательных степеней свободы основной компоненты воздуха — азота.

Институт механики МГУ

Поступило 9 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Стулов В. П., Теленин Г. Ф. Неравновесное обтекание сферы сверхзвуковым потоком воздуха. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
2. Генералов Н. А., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксация колебательной энергии молекул воздуха за фронтом прямой ударной волны. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 5.
3. Масленников В. Г., Парийский И. Г., Розов С. И., Студенков А. М. Экспериментальное исследование положения отошедшей ударной волны в реальных газах. 1965, ПМТФ, № 1.
4. Турчак Л. И. Обмен колебательной энергией между компонентами воздуха за фронтом прямой ударной волны. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 4, 1966.