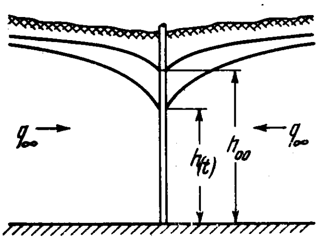
ПРИТОК ГРУНТОВЫХ ВОД К СКВАЖИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ УДАЛЕННОЙ ОБЛАСТИ ПИТАНИЯ

М. А. САТТАРОВ *(Новосибирск)*

Исследуем неустановившийся приток грунтовых вод к совершенной скважине с кусочно-постоянным дебитом, когда из бесконечно удаленной области поступает питание с постоянной интенсивностью q_∞. Пусть в начальный момент времени на стенке скважины $r = r_0$ имеем $h(0, r_0) = h_{00}$ (фиг. 1).

Исходное дифференциальное уравнение осесимметричной фильтрации грунтовых вод в безнапорном пласте, если применить второй способ линеаризации, имеет вид [1]

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h^2}{\partial r}\right) \qquad \left(a = \frac{kh^\circ}{\mu}\right) \tag{1}$$



Фиг. 1

Здесь $h = h(r, t)$ — искомый напор исследуемого водоносного пласта; a — коэффициент пьезопроводности пласта; h° — некоторое среднее значение h; k — коэффициент фильтрации пласта; μ — эффективная пористость грунта.

Если уравнение (1) продифференцировать почленно по r и принять во внимание, что

$$\pi kr\, dh^2/dr = q(r, t)] \tag{2}$$

получим для расхода $q(r, t)$ уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r}\right) \tag{3}$$

для которого существует автомодельное решение $\exp(-r^2/4at)$. Следовательно, функция

$$q = q_\infty + (q_0 - q_\infty)\exp(-r^2/4at) + \sum_{i=1}(q_i - q_{i-1})\exp[-r^2/4a(t - t_i)]\,\sigma(t - t_i) \tag{4}$$

будет решением уравнения (3) при следующих начальном и граничных условиях:

$$q(r, 0) = q_\infty = \text{const}, \qquad q(0, t) = q_0 + \sum_{i=1}(q_i - q_{i-1})\,\sigma(t - t_i)$$

$$q(\infty, t) = q_\infty, \quad \sigma(t - t_i) = \begin{cases} 1 & (t > t_i) \\ 0 & (t < t_i) \end{cases}$$

Из соотношения (2) и формулы (4) для $h(r, t)$ получим

$$h^2(r, t) = h^2(t) + \frac{q_\infty}{\pi k}\ln\frac{r}{r_0} - \frac{q_0 - q_\infty}{2\pi k}\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4at}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_0^2}{4at}\right)\right] -$$

$$- \sum_{i=1}\frac{q_i - q_{i-1}}{2\pi k}\left\{\mathrm{Ei}\left[-\frac{r^2}{4a(t - t_i)}\right] - \mathrm{Ei}\left[-\frac{r_0^2}{4a(t - t_i)}\right]\right\}\sigma(t - t_i) \tag{5}$$

$$\mathrm{Ei}(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi}d\xi; \qquad h^2(t) = h^2(r_0 t)$$

Для определения $h^2(t)$ подставим выражением (5) в уравнение (1) и, полагая $r = r_0$, найдем

$$\frac{\partial h^2(t)}{\partial t} = -\frac{q_0 - q_\infty}{4\pi kt}\exp(-r_0^2/4at) - \frac{1}{4\pi k}\sum_{i=1}\frac{q_i - q_{i-1}}{t - t_i}\exp[-r_0^2/4a(t - t_i)]\,\sigma(t - t_i)$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия $h(r_0, 0) = h_{00}$, получаем (6)

$$h^2(t) = h_{00}^2 + \frac{q_0 - q_\infty}{4\pi k}E_i\left(-\frac{r_0^2}{4at}\right) + \frac{1}{4\pi k}\sum_{i=1}(q_i - q_{i-1})\,\mathrm{Ei}\left[-\frac{r_0^2}{4a(t - t_i)}\right]\sigma(t - t_i)$$

Вводя безразмерные величины

$$\tau = \frac{at}{h_{00}^2}, \quad A_i = \frac{q_i}{4\pi k h_{00}^2}, \quad h(\tau) = \frac{h(t)}{h_{00}},$$

и учитывая, что

$$\mathrm{Ei}\left[-\frac{r_0^2}{4k(t-t_i)}\right] \approx -\ln\frac{2.25a(t-t_i)}{r_0^2} \qquad \text{при } \frac{r_0^2}{4a(t-t_i)} \leqslant 0{,}01$$

выражение (6) перепишем так (в промежутке времени $t_N < t < t_{N+1}$):

$$h^2(\tau) = 1 - (A_0 - A_\infty)\ln B\tau - \sum_{i=1}^{N}(A_i - A_{i-1})\ln[B(\tau-\tau_i)] \qquad \left(B = \frac{2.25h_{00}^2}{r_0^2}\right) \qquad (7)$$

В частности, предположим, что в промежутке $0 < \tau < \tau_1$ ведется откачка. Тогда

$$h^2(\tau) = 1 - (A_0 - A_\infty)\ln B\tau$$

По этой формуле нетрудно определить время откачки τ_1, когда $h(r_0, t)$ достигает заданного значения αh_{00}, $(0 < \alpha < 1)$

$$\tau_1 = \frac{1}{B}\exp\left(\frac{1-\alpha^2}{A_0 - A_\infty}\right)$$

Предположим теперь, что в промежутке $\tau_1 < \tau < \tau_2$ скважина не работает, т. е. $A_1 = 0$. Тогда для этого промежутка времени будет

$$h^2(\tau) = 1 + A_\infty \ln B - A_0[(1-\gamma)\ln\tau - \ln(\tau-\tau_1)] \qquad \left(\gamma = \frac{A_\infty}{A_0} = \frac{q_\infty}{q_0}\right)$$

Для момента $\tau = \tau_2$ имеем очевидное выражение $h^2(\tau)$.

Отсюда можно выяснить следующие вопросы: (а) для какого значения дебита скважины q_0, если заданы τ_1 и τ_2; (б) для какого значения времени τ_2, если задан q_0 — происходит полное (или, если допустимо, частичное) восстановление первоначального уровня h_{00}?

Так как $\tau_2 = \tau_{11} + \tau_1$ (τ_{11} — продолжительность времени восстановления), то условие $h^2(\tau_{2n}) = \alpha_1^2$ $(0 < \alpha_1 \leqslant 1)$ — частичного восстановления — дает соответственно

$$\text{(а)} \quad \gamma = \frac{\ln(l_1+1) - \ln l_1}{s + \ln[B\tau_1(l_1+1)]}, \qquad \text{(б)} \quad \frac{(l_1+1)^{1-\gamma}}{l_1} = (B\tau_1 e^{-s})^\gamma$$

$$\left(l_1 = \frac{\tau_{11}}{\tau_1} = \frac{t_{11}}{t_1}, \quad s = \frac{1-\alpha_1^2}{A_\infty}\right) \qquad (8)$$

В зависимости от γ продолжительность восстановления l_1, определяемая из соотношения (б) (8) подбором, может быть как больше, так и меньше продолжительности откачки τ_1. При $\gamma \to 0$ для (б) согласно (8)

$$t_{11} = \frac{t_1}{1-\exp(-s^\circ)}, \qquad s^\circ = \frac{1-\alpha_1^2}{A_0} \qquad (9)$$

Как видно из (9), при отсутствии внешнего питания полное возвращение к первоначальной высоте h_{00} $(s^\circ = 0)$ может произойти лишь через очень большой промежуток времени $(t_{11} \to \infty)$.

В таблице даны значения γ, вычислены для (а) согласно (8) в зависимости от $B\tau_1$ при различных значениях l_1.

Значения γ

l_1	$B\tau_1 = 1000$	10 000	100 000	1 000 000
0.5	0.152	0.114	0.092	0.077
1.0	0.091	0.069	0.057	0.048
2	0.051	0.039	0.032	0.027
3	0.034	0.027	0.022	0.018
4	0.026	0.021	0.017	0.014

(а) Предположим теперь, что время τ изменяется в промежутке $\tau_{2n-1} < \tau < \tau_{2n}$. В этом случае непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение (7) соответствует n-му периоду восстановления. Аналогично выше рассмотренному, из (7) определим дебит скважины, при котором происходит неполное восстановление $[h^2(\tau_{2n}) = \alpha_n^2]$ в n-м шаге процесса откачка— восстановления, когда соответствующие дебиты в предыдущих шагах последовательно определены.

Рассмотрим случай: при восстановлении откачка полностью выключена, т. е. в формуле (7) положим $A_1 = A_3 = \ldots = A_{2n-1} = 0$.
По условию задачи $h^2(\tau_{2n}) = \alpha_n^2$, тогда из (7) получим

$$s_n + A_\infty \ln(B\tau_{2n}) - \sum_{i=1}^{n} A_{2i-2}\ln\frac{\tau_{2n}-\tau_{2i-2}}{\tau_{2n}-\tau_{2i-1}} = 0 \qquad (s_n = 1-\alpha_n^2,\ \tau_0 = 0) \qquad (10)$$

Так как τ_{2n} — время, прошедшее от начала работы скважины до начала $n+1$-й откачки, то его можно записать еще так:

$$\tau_{2n} = \sum_{i=1}^{n}(\tau_{0i} + \tau_{1i}) = \tau_{01}\sum_{i=0}^{2n-1} l_i \qquad \left(l_{2i-2} = \frac{\tau_{0i}}{\tau_{01}},\ l_{2i-1} = \frac{\tau_{1i}}{\tau_{01}}\right)$$

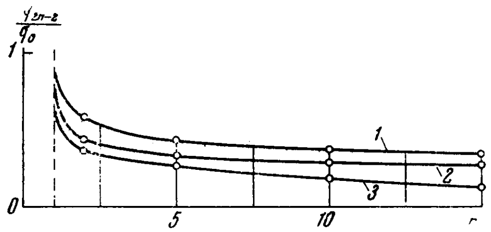
где τ_{0i} — продолжительность i-й откачки, τ_{1i} — продолжительность i-го восстановления. В этих обозначениях, учитывая условие, что безразмерные дебиты A_0, A_2, ..., A_{2n-4} последовательно определены, для A_{2n+2} получим

$$\gamma_{2n-2}=\left[\ln\left(1+\frac{l_{2n-2}}{l_{2n-1}}\right)\right]\left\{s+\ln\left[B\tau_1\sum_{i=0}^{2n-1}l_i\right]-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\gamma_{2i-2}}\left[\ln\left(\sum_{2i-2}^{2n-1}l_k\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\ln\left(\sum_{2i-1}^{2n-1}l_k\right)\right]\right\}^{-1}\qquad\left(s=\frac{s_n}{A_\infty},\ \gamma_{2n-2}=\frac{q_\infty}{q_{2n-2}}\right)\tag{11}$$

Если продолжительность восстановления в m раз больше, чем продолжительность откачки, т. е. если $l_{2i-2}=1$ и $l_{2i-1}=m$, тогда (11) примет вид (12)

$$\gamma_{2n-2}=\left[\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]\left\{s+\ln\left[B\tau_1 n(m+1)\right]-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\gamma_{2i-2}}\ln\left[\frac{(n-i+1)(m+1)}{(n-i)(m+1)+m}\right]\right\}^{-1}$$

Если интервалы между откачками одинаковы, тогда, естественно, для восстановления уровня дебит скважины приходится последовательно уменьшать, что соответствует увеличению $\gamma_{2n-2}=q_\infty/q_{2n-2}$ в формуле (12). При этом для конечного числа шагов возможна откачка с последующим восстановлением (в том числе — и полным восстановлением) уровня при дебитах скважины, больших q_∞, иначе говоря, имеют место неравенства $q_\infty<q_{2n-2}<\infty$ или $\gamma_{2n-2}<1$.



Фиг. 2

Определенный интерес представляет определение значений отношения γ_{2n-2} при бесконечном увеличении числа откачек и восстановлений ($n\to\infty$). Ввиду того что с возрастанием n отношение γ_{2n-2} возрастает (расчеты указывают на монотонность этого процесса) в формуле (12) заменим все γ_{2i-2} бо́льшим значением γ_{2n-2} и вынесем γ_{2n-2} из-под знака суммы. Дальше, применяя к функции $\ln[(n-i)(m+1)+m]$ в промежутке $[(n-i)(m+1)+m,\ (n-i)(m+1)+m+1]$ формулу конечных приращений, найдем, что

$$\ln[(n-i)(m+1)+m+1]-\ln[(n-i)(m+1)+m]=\frac{1}{(n-i)(m+1)+m+\theta_n}$$
$$(0<\theta_n<1)\tag{13}$$

Тогда, вводя новую нумерацию $n-i=k$, выражение (12) можно записать в виде

$$\gamma_{2n-2}>\left[\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+\theta_k}\right]\{s+\ln[B\tau_1 n(m+1)]\}^{-1}$$
$$\left(\theta_k=\frac{m+\theta_n}{m+1}<1\right)\tag{14}$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в неравенстве (14) и учитывая, что гармонический ряд [2]

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+\theta_k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=0.5772+\ln n+\frac{1}{2n}-\varphi(n)$$

$$\varphi(n)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A_k}{n(n+1)\ldots(n+k-1)},\qquad A_k=\frac{1}{k}\int_0^1 x(1-x)(2-x)\ldots(k-1-x)\,dx$$

находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_{2n-2}=\gamma_\infty\geqslant\frac{1}{m+1},\qquad\text{или}\qquad q\leqslant(m+1)\,q_\infty\left(\gamma_\infty=\frac{q_\infty}{q}\right)\tag{15}$$

Так как и во время бесконечной не непрерывной откачки оказывается возможным извлекать воды не меньше, чем ее поступает за один период откачка — восстановления, то в выражении (15) знаком неравенства можно пренебречь. Тогда получим

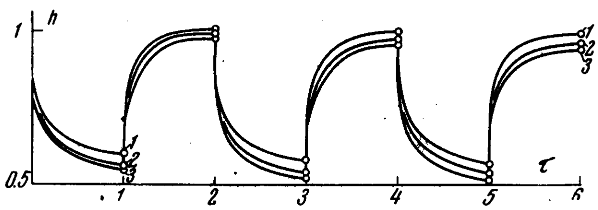
$$q = (m+1)q_\infty \tag{16}$$

Таким образом, при бесконечной периодической откачке после некоторого числа шагов, в отличие от первых, основной определяющей величиной для неполного (тем более, для полного) восстановления уровня является интенсивность внешнего питания q_∞.

На фиг. 2 построен график q_{2n-2}/q_0 в зависимости от n для следующих случаев:

1. $s \neq 0$, $A_\infty \neq 0$; 2. $s = 0$, $A_\infty \neq 0$; 3. $s \neq 0$, $A_\infty = 0$

При вычислениях приняты следующие значения постоянных: $m = 3$, $s_n = 0.2$, $A_\infty = 0.054$, $\ln B\tau_1 = 10$, $A_0 = 2.7$, $\gamma = 0.02$, q_0 и q_{2n-2} — дебит скважины при первой и n-й откачке соответственно.



Фиг. 3

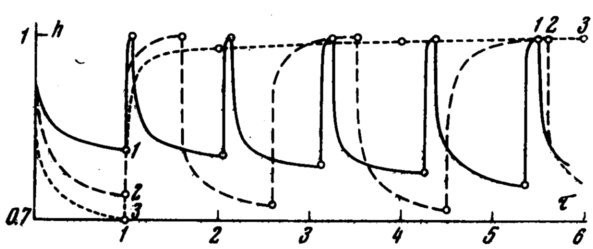
Как видно из графика, кривые *1* и *2* с возрастанием n сближаются, а кривая *3*, наоборот, удаляется от них. При $n \to \infty$ кривые *1* и *2* сливаются, имея общую асимптоту $q_{2n-2}/q_0 = 0.08$, а кривая *3* имеет асимптоту $q_{2n-2}/q_0 = 0$.

На поливных участках, когда $\tau_1, \tau_2, \ldots$ выбираются по условиям орошения, полное восстановление может не успевать происходить.

В качестве простейшего примера примем $\tau_{2n} = 2n\tau_1$, т. е. будем считать продолжительности периодов откачек и периодов восстановлений (шаги) одинаковыми и равными τ_1 (например, 12 часов идет откачка, 12 часов скважина не работает). На фиг. 3 представлен ряд кривых при значениях ($\ln B\tau_1 = 10$)

1. $A_0 = 0.07$, $A_\infty = 0.08A_0$; 2. $A_0 = 0.07$, $A_\infty = 0.03A_0$; 3. $A_0 = 0.07$, $A_\infty = 0$.

Из графика видно, что при отсутствии внешнего питания линия максимальных значений уровня неуклонно понижается, хотя и более медленно, чем при одномерной фильтрации [3].



Фиг. 4

(б) Теперь рассмотрим следующую задачу: при заданных значениях γ_{2n-2} и продолжительностях откачек определить время, затраченное на восстановление первоначального уровня h_{00} через n шагов процесса откачка — восстановления, если в предыдущих шагах соответствующие времена восстановлений определены. Рассмотрим случай $q_{2n-2} = q_{2n-4} = \ldots q_0 = q$, и $l_{2i-2} = 1$.

Тогда из (7), учитывая, что $h^2(\tau_{2n}) = 1$ для l_{2n-1}, получим уравнение (17)

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{(n-i+\beta_i+l_{2n-1}+1)}{(n-i+\beta_i+l_{2n-1})}\right] \{\ln [B\tau_1(n+\beta_1+l_{2n-1}]\}^{-1} = \frac{q_\infty}{q} \qquad \left(\beta_i = \sum_{k=i}^{n-1} l_{2k-1}\right)$$

На фиг. 4 приведены кривые при $A_0 = 0.05$ и при значениях 1. $A_\infty = 0.3\,A_0$, 01 A_0, 0.01 A_0, причем $\ln B\tau_1 = 10$.

Видно, что чем меньше A_∞, тем больше время полного восстановления, однако оно стремится к конечному пределу при $n \to \infty$

$$t_\infty = (q / q_\infty - 1)\, t_1 \tag{18}$$

которая получается из (17) так же, как выше, t_1 — продолжительность первой откачки.

Автор благодарит П. Я. Полубаринову-Кочину под руководством которой написана работа.

Поступило 5 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-перераб. Физматгиз, 1963.
3. Саттаров М. А. Движение грунтовых вод при наличии удаленной области питания. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 3, 1966.

ЗАМЕЧАНИЯ О СТАТЬЯХ Г. А. ДЖИМШЕЛИ (Г. А. ДЖИМШИЛЕЙШВИЛИ) ПО ГИДРАВЛИКЕ ОТКРЫТЫХ РУСЕЛ

И. П. АНДРЕЕВА *(Москва)*

В настоящей заметке рассматриваются статьи [1-4], которые касаются интегрирования уравнения так называемого плавно изменяющегося неравномерного движения жидкости в открытых руслах (одномерное стационарное уравнение гидравлики). В [1-3] предлагаются расчетные формулы для неравномерного движения потока, а в [4] делается попытка распространения подходов, используемых в [1-3], на задачи гидравлики неустановившегося движения.

Если бы эти статьи содержали отдельные устранимые некорректности, то мимо этого можно было бы пройти. Но они создают вполне законченную ошибочную концепцию, которая не может не обратить на себя внимание, особенно при настойчивых пожеланиях автора о внедрении этих концепций в практику гидравлического и гидротехнического проектирования. Тот факт, что эта концепция получает распространение, как видно, например, из отклика [5] на одну из статей Г. А. Джимшели, в котором предлагается несколько модифицированный, но по существу тождественный с [1] подход, не может не настораживать.

Остановимся на статье [1], излагающей, судя по заглавию, итог исследований автора в области гидравлики неравномерного движения в открытых руслах.

В этой статье уравнение гидравлики неравномерного движения берется в форме

$$-\frac{dz}{ds} = \frac{dh_v}{ds} + \frac{Q^2}{K^2} \qquad \left(h_v = \frac{\alpha V^2}{2g},\ K = \omega C\, \sqrt{R}\right) \tag{1}$$

Здесь dz / ds — уклон свободной поверхности потока, h_v — скоростной напор, Q — расход жидкости, K — модуль расхода, ω — площадь живого сечения, C — коэффициент Шези, R — гидравлический радиус.

Замечая, что «интегрирование уравнения (1) в общем виде невозможно из-за сложности функциональной зависимости между входящими в него переменными...», автор предлагает «простое и достаточно точное решение уравнения (1) для условий искусственного русла любого поперечного сечения.., применив известный способ осреднения выносимых из-под знака интеграла переменных...» (делается ссылка на работы [6,7]).

В цитированных предложениях уже кроется непонимание автором сущности интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: уравнение (1) для наиболее важного случая призматического русла есть уравнение с разделяющимися переменными и, следовательно, оно сразу интегрируется.

Действительно, если ввести в рассмотрение уклон дна i_0 и глубину потока h, то уравнение (1) принимает общеизвестный вид, приводимый в любом курсе гидравлики

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i_0 - Q^2 / K^2}{1 - F} \tag{2}$$

Здесь правая часть зависит только от глубины h, ибо в условиях установившегося течения при $Q = \mathrm{const}$ число Фруда F и пропускная способность русла K суть функции только h. Поэтому

$$s = \int_1^2 \frac{1 - F}{i_0 - Q^2 / K^2}\, dh \tag{3}$$