О ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ В НЕОДНОРОДНОМ ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

Т. Ф. ИВАНОВ *(Гурьев)*

Большинство нефтегазовых месторождений платформенного типа или относящихся к соляно-купольным структурам характеризуется почти горизонтальным залеганием продуктивных пластов. При оценке проницаемости таких пластов, в связи с их слоистостью, в большинстве случаев можно полагать, что горизонтальная проницаемость k_r и вертикальная проницаемость k_z — непрерывные функции координаты z

$$k_r = k_r(z), \qquad k_z = k_z(z) \tag{0.1}$$

Пласт, удовлетворяющий условиям (0.1), будем называть z-неоднородным пластом.

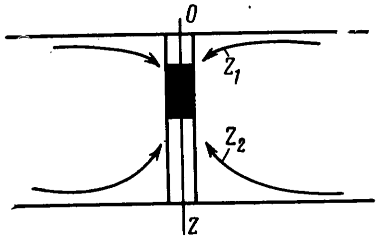
В работе рассматривается осесимметричная задача об установившемся притоке несжимаемой вязкой жидкости к несовершенной скважине, вскрывающей горизонтальный z-неоднородный пласт с непроницаемыми кровлей и подошвой (фигура).

Метод исследования задачи фильтрации основан на разложении решения по собственным функциям дифференциального уравнения второго порядка (1.8) и, в отличие от методов разделения пласта на несколько однородных пропластков [1], позволяет решить задачу с любой точностью.

Приняты обозначения: r_0 — радиус контура питания, r_1 — радиус скважины, H — мощность пласта, (z_1, z_2) — интервал вскрытия пласта, γ — удельный вес жидкости, μ — вязкость жидкости, $\sigma = (z_2 - z_1) / H$ — коэффициент вскрытия пласта.

1. Пусть начало цилиндрической системы координат $(zr\,\theta)$ находится в точке пересечения оси скважины и кровли пласта, а ось z направлена вниз.

Учитывая осесимметричность задачи и полагая, что в области фильтрации жидкости существует силовой потенциал Φ, запишем, согласно (0.1), закон Дарси в виде [2]



$$v_r = -\frac{k_r}{\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad v_z = -\frac{k_z}{\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad v_\theta = 0 \tag{1.1}$$

Потенциал Φ определяем равенством $\Phi = p - \gamma z$

Из (1.1) и уравнения неразрывности имеем

$$k_z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{dk_z}{dz}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + k_r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{k_r}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \tag{1.2}$$

Введем безразмерные независимые переменные ρ, y и функции $\varepsilon(y)$, $\lambda(y)$

$$\rho = \pi r H^{-1}, \quad y = \pi z H^{-1}, \quad \varepsilon^2(y) = k_r, \quad \lambda^2(y) = k_z \tag{1.3}$$

Согласно (1.1), (1.3), дебит скважины определяется равенством

$$Q = \frac{2\pi r_0}{\mu}\int_0^H k_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=r_0} dz = \frac{2\pi r_0}{\mu}\int_0^\pi \varepsilon^2(y)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0} dy \tag{1.4}$$

Из (1.2) и (1.3) получим

$$\lambda^2(y)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2\lambda \frac{d\lambda}{dy}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \varepsilon^2(y)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{\varepsilon^2(y)}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0 \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) нужно решить при граничных условиях

$$\Phi = \Phi_0 = \text{const при } \rho = \rho_0 \quad [0 \leqslant y \leqslant \pi] \quad \rho_0 = \pi r_0 / H$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=0,\,\pi} = 0, \quad [\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_0], \quad \rho_1 = \frac{\pi r_1}{H} \tag{1.6}$$

$$\Phi = \Phi^\circ = \Phi_1 + \varphi(y) \quad \text{при } \rho = \rho_1, \quad [y_1 \leqslant y \leqslant y_2], \quad y_1 = \pi z_1 / H$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_1} = 0 \quad (0 < y < y_1), \quad (y_2 < y < \pi), \quad y_2 = \frac{\pi z_2}{H}$$

Здесь Φ_1 — минимальное значение потенциала. Функция $\varphi(y)$ должна быть задана.

Уравнение (1.5) имеет формальное решение, удовлетворяющее первому граничному условию (1.6)

$$\Phi = \Phi_0 - A \ln \frac{\rho_0}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[K_0(c_n\rho) - \frac{K_0(c_n\rho_0)}{I_0(c_n\rho_0)} I_0(c_n\rho)\right]\psi_n(y) \tag{1.7}$$

Здесь $K_0(x)$, $I_0(x)$ — Бесселевы функции мнимого аргумента x; c_n, b_n — произвольные вещественные постоянные. Функции $\psi_n(y)$ определяются дифференциальными уравнениями в самосопряженном виде

$$[\lambda^2(y)\psi_n'(y)]' + c_n^2\varepsilon^2\psi_n(y) = 0 \tag{1.8}$$

Для того чтобы формальное решение (1.7) удовлетворяло и второму граничному условию (1.6), потребуем, чтобы каждая из функций ψ_n удовлетворяла краевым условиям

$$\psi_n'(0) = \psi_n'(\pi) = 0 \tag{1.9}$$

Полагаем, что в области фильтрации горизонтальная проницаемость $k_r = \varepsilon^2(y)$ непрерывна, а вертикальная проницаемость пласта $k_z = \lambda^2(y)$ имеет непрерывную первую производную. Тогда краевая задача (1.8), (1.9) есть частный случай самосопряженной краевой задачи Штурма, и на основании известных теорем [3,4] нетрудно убедиться, что ее решения удовлетворяют следующим условиям. Существует бесконечная возрастающая последовательность действительных собственных значений параметра c_n^2, причем все значения параметра c_n^2 положительны, и минимальное из них равно нулю.

Каждому собственному значению параметра c_n^2 соответствует, с точностью до постоянного множителя, одна собственная функция ψ_n, удовлетворяющая (1.8), (1.9), причем нулевому собственному значению $c_n^2 = 0$ соответствует собственная функция $\psi_0 = \mathrm{const}$. Все собственные функции ψ_n взаимно ортогональны, и их можно нормировать

$$\int_0^\pi \varepsilon^2\psi_p\psi_q\,dy = \delta_{pq}, \qquad \delta_{pq} = \left|\begin{matrix} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{matrix}\right| \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.10}$$

Из (1.10), в частности, следует

$$\int_0^\pi \varepsilon^2\psi_n\,dy = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.11}$$

Нормированные собственные функции ψ_n образуют полную систему функций, и если $F(y)$ — некоторая непрерывная в промежутке $[0, \pi]$ кусочно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $F'(0) = F'(\pi) = 0$, то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0, \pi]$ ряд

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n + F_0, \qquad a_n = \int_0^\pi \varepsilon^2 F(y)\,\psi_n(y)\,dy \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.12}$$

В рассматриваемой задаче потенциал на стенках скважины Φ° есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция от y (производная $d\Phi\,/\,dy$ при $\rho = \rho_1$ может испытывать разрыв при $y = y_1, y_2$). Поэтому, полагая в равенствах (1.7), (1.12)

$$\Phi^\circ = F(y), \qquad \Phi_0 - A\ln\rho_0/\rho_1 = a_0$$

$$b_n\left[K_0(c_n\rho_1) - \frac{K_0(c_n\rho_0)}{I_0(c_n\rho_0)}I_0(c_n\rho_1)\right] = a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.13}$$

принципиально можно осуществить разложение потенциала $\Phi^c(y)$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ψ_n, и ряд в правой части (1.7) равномерно сходится к потенциалу $\Phi(y, \rho)$ во всей области фильтрации. Последнее верно в силу выполнения неравенств

$$0 \leqslant K_0(c_n\rho) - \frac{K_0(c_n\rho_0)}{I_0(c_n\rho_0)}I_0(c_n\rho) \leqslant K_0(c_n\rho_1) - \frac{K_0(c_n\rho_0)}{I_0(c_n\rho_0)}I_0(c_n\rho_1)$$

Итак, если горизонтальная проницаемость $k_r(z)$ непрерывна, а вертикальная проницаемость $k_z(z)$ имеет и непрерывную первую производную, то граничная задача (1.5), (1.6) имеет равномерно сходящееся решение (1.7), и это решение единственно [5]. Согласно (1.4), (1.7) и в силу (1.11), дебит скважины в единицу времени определяется равенством

$$Q\mu = 2\pi A\int_0^H k_r\,dz, \qquad A = \frac{\Phi_0 - a_0}{\ln(\rho_0\,/\,\rho_1)} \tag{1.14}$$

Согласно (1.13), при заданных параметрах пласта k_r, k_z, H, r_0, r_1 постоянная a_0 характеризует характер и степень несовершенства скважины. Так как Φ_0 не зависит от проницаемости пласта, то из формул (1.14) следует, что дебит скважины в общем больше зависит от горизонтальной проницаемости пласта, чем от вертикальной.

2. Из предыдущего параграфа следует, что при выполнении (1.10) постоянными b_n в принципе можно распорядиться так, чтобы решение (1.7) удовлетворяло всем граничным условиям (1.6). Однако, в силу разрывности граничных условий на стенках скважины, определение постоянных b_n осуществляется, исходя из приближенного выполнения граничных условий (1.6) на стенках скважины. Если в правой части (1.7) взять первые N членов ряда, то для приближенного решения задачи можно N постоянными b_n распорядиться так, чтобы третье граничное условие (1.6) выполнялось в M точках интервала вскрытия пласта, а четвертое граничное условие — в $M - N$ точках вне интервала вскрытия пласта.

Однако такой метод приближенного решения задачи приводит к значительным погрешностям при определении дебита скважины и связан с вычислительными трудностями в каждом конкретном случае даже при однородности пласта [6].

Точнее (и во многих случаях проще) метод определения постоянных b_n, при котором третье граничное условие (1.6) выполняется строго, а приближенно выполняется лишь четвертое граничное условие (вне интервала вскрытия пласта). Согласно теореме Вейерштрасса о приближении непрерывных функций полиномами, представим потенциал на стенках скважины в виде

$$\Phi^\circ \approx F(y) = \Phi_1 + \begin{cases} \sum\limits_{l=2}^{p} \alpha_l (y_1{}^l t y^l), & [0 \leqslant y \leqslant y_1] \\ \varphi(y), & [y_1 \leqslant y \leqslant y_2] \\ \sum\limits_{l=2}^{q} \beta_l [(\pi - y_2)^l - (\pi - y)^l], & [y_2 \leqslant y \leqslant \pi] \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь p, q — некоторые числа, α_l, β_l — неизвестные постоянные, суммирование начинается с $l = 2$, так как $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, в силу второго условия (1.6). Функция $\varphi(y)$ задана. Разлагая (2.1), согласно (1.12), в ряд по ψ_n, сравнивая полученное разложение с (1.7) и учитывая (1.13), найдем связь между коэффициентами α_l, β_l, с одной стороны, и A, b_n, с другой.

Подставляя в (1.7) вместо A, b_n полученные выражения через α_l, β_l, можно, как и в случае однородного пласта, определить постоянные α_l, β_l, потребовав или выполнения четвертого условия (1.6) в p точках интервала $(0, y_1)$ и в q точках интервала (y_2, π) [7], или потребовав выполнения условий

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{y_1} \varepsilon^2 y^m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_1} dy = 0, \qquad (m = 0, 1, \ldots, p-2) \\ &\int\limits_{y_2}^{\pi} \varepsilon^2 (\pi - y)^m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_1} dy = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots, q-2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

В пластовых условиях нет строгого равенства между номинальным и истинным диаметрами скважин с учетом цементного кольца, поэтому для практических расчетов дебита скважины, вместо четвертого условия (1.6), можно ограничиться требованием нулевого расхода жидкости через стенки скважины вне интервала вскрытия пласта, т. е. потребовать выполнения условий (2.2) при $p = q = 2$.

Из формулировки и геометрических данных задачи (фигура) следует, что потенциал $\Phi^\circ(y)$ монотонно убывает в промежутке $[0, y_1]$ и монотонно возрастает в промежутке $[y_2, \pi]$, так что функция $F(y)$ из (2.1) при $p = q = 2$ тождественно равна потенциалу в промежутке вскрытия пласта и изменяется согласованно с потенциалом вне промежутка вскрытия пласта. Поэтому, учитывая непрерывную зависимость решений уравнения (1.5) от граничных условий, можно полагать, что нестрогое выполнение граничных условий на стенках скважины вне интервала вскрытия мало повлияет на поведение решения в интервале вскрытия, и для практических расчетов дебита в (2.1) и (2.2) достаточно положить $p = q = 2$.

Условие нулевого расхода жидкости через стенки скважины вне интервала вскрытия пласта имеет вид

$$\int\limits_0^{y_1} \varepsilon^2 \left[\frac{A}{\rho_1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n \Omega_n \psi_n\right] dy = \int\limits_{y_2}^{\pi} \varepsilon^2 \left[\frac{A}{\rho_1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n \Omega_n \psi_n\right] dy = 0 \tag{2.3}$$

$$\Omega_n = K_1(c_n\rho_1) + \frac{K_0(c_n\rho_0)}{I_0(c_n\rho_0)} I_1(c_n\rho_1), \qquad I_1(x) = I_0'(x), \qquad K_1(x) = -K_1'(x) \tag{2.4}$$

Коэффициенты b_n, согласно (1.12), (1.13), (2.1), при $p = q = 2$ определяются равенствами

$$b_0 = B_0 + \alpha_2 L_0 + \beta_2 S_0, \qquad b_n D_n = B_n + \alpha_2 L_n + \beta_2 S_n$$

$$B_n = \Phi_1 \int_0^\pi \varepsilon^2 \psi_n \, dy + \int_{y_1}^{y_2} \varepsilon^2 \psi_n \varphi \, dy, \qquad L_n = \int_0^{y_1} \varepsilon^2 \psi_n (y_1^2 y^2) \, dy$$

$$S_n = \int_{y_2}^{\pi} \varepsilon^2 \psi_n [(\pi - y_2)^2 - (\pi - y)^2] \, dy \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

$$D_n = K_0 (c_n \rho_1) - \frac{K_0 (c_n \rho_0)}{I_0 (c_n \rho_0)} I_0 (c_n \rho_1) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Получив из (1.13) и (2.4) выражения постоянных A, b_n через неизвестные коэффициенты α_2, β_2 и подставив эти выражения в (2.3), получим два линейных алгебраических уравнения относительно двух неизвестных коэффициентов α_2, β_2, которые и определяют эти коэффициенты, а затем постоянные A, b_n.

Уравнения для определения постоянных A, b_n значительно упрощаются, если пласт вскрыт скважиной у кровли или подошвы пласта. Например, при вскрытии пласта у его кровли ($y_1 = 0$) неизвестный коэффициент β_2 определяется равенством (2.6)

$$\beta_2 \int_{y_2}^{\pi} \varepsilon^2 \left[\frac{S_0}{\rho_1 \ln (\rho_0 / \rho_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n S_n \Omega_n \frac{\psi_n}{D_n} \right] dy = \int_{y_2}^{\pi} \varepsilon^2 \left[\frac{\Phi_0 - B_0}{\rho_1 \ln (\rho_0 / \rho_1)} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n B_n \Omega_n \frac{\psi_n}{D_n} \right] dy$$

Здесь Ω_n определяется (2.4), B_n, S_n, D_n определяется (2.5). Уравнения для определения коэффициентов α_2, β_2 в случае однородного пласта проведены в [7].

3. При изучении горизонтального неоднородного пласта в окрестности вскрывшей его скважины обычно определяется горизонтальная проницаемость пласта, вертикальная же определяется лишь при специальных исследованиях.

Если коэффициент вскрытия пласта не очень мал и проницаемость пласта во всей области фильтрации отлична от нуля, то, как показано в п. 1, дебит скважины зависит от горизонтальной проницаемости в значительно большей мере, чем от вертикальной. Поэтому, в целях упрощения исследований, допустимо полагать, что вертикальная проницаемость в заданной области фильтрации, с достаточной для прикладных задач точностью, определяется формулой

$$a^2 k_z = k_r \tag{3.1}$$

Здесь a — некоторая постоянная. Пласт, удовлетворяющий условиям (3.1), будем называть пластом постоянной анизотропии.

Сравнительно точные значения горизонтальной проницаемости пласта можно определить только путем лабораторных измерений локально, т. е. не по всей мощности пласта, а лишь в некоторых интервалах; распределения значений проницаемости по всей мощности пласта в призабойной зоне, как правило, неизвестны. Поэтому для решения задач фильтрации целесообразно представлять горизонтальную проницаемость k_r в виде функции, которая близка к истинной проницаемости в интервалах лабораторных измерений и согласуется с качественной характеристикой изменения проницаемости по всей мощности пласта, полученной из данных геофизического исследования (каротажные диаграммы, кавернограммы). Вместе с тем, аналитическую функцию, которая выражает горизонтальную проницаемость, следует выбирать такой, чтобы краевая задача (1.8), (1.9) имела легко определимые собственные числа c_n^2 и собственные функции ψ_n, позволяющие определять интегралы в равенствах (2.5).

Поступило 1 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуссейн-Заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. Изд. «Недра», 1965.
2. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкости через пористые среды. Гостоптехиздат, 1960.
3. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., 1958.
4. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. Изд. 1950.
5. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд. иностр. лит., 1958.
6. Глоговский М. М. Дебит скважин, несовершенных по степени вскрытия пласта. Тр. Ин-та им. Губкина, 1951, вып. 11.
7. Иванов Т. Ф. О притоке однородной жидкости к несовершенной скважине. Изв. АН СССР, ОТН, 1961, № 4.