Система уравнений (2.1) разрешается относительно производных

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_1c_1}, \qquad \frac{dp}{d\zeta} = y, \qquad \frac{dy}{d\zeta} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{2.12}$$

Система уравнений (2.12) интегрировалась методом Рунге — Кутта на ЭВМ БЭСМ-2.

Расчеты были выполнены при следующих параметрах: $p_\infty = 35$ *ат*, $\mu_0 = 100$, $K = 10^4$ *кг/см*^{2}, $p_0 = 40$, 45, 50 *ат*. Относительные фазовые проницаемости для газа и воды были взяты следующими:

$$k_1(\sigma) = \begin{cases} (1 - {}^5/_4\sigma)^{3.5} & (0 \leqslant \sigma \leqslant 0.8) \\ 0 & (0.8 \leqslant \sigma \leqslant 1.0) \end{cases}$$

$$k_2(\sigma) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant \sigma \leqslant 0.1) \\ ({}^{10}/_9\sigma - {}^1/_9)^{3.5}(4 - 3\sigma) & (0.1 \leqslant \sigma \leqslant 1.0) \end{cases}$$

Фронтовая насыщенность в этом случае равна $\sigma_0 = 0.2868$.

Результаты расчетов представлены на фиг. 2.

Как и следовало ожидать, неоднородность пласта существенно сказывается на распределении давления. Распределение насыщенности практически можно считать не зависящим от неоднородности.

Поступило 21 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Стклянин Ю. Н., Томельгас В. А. О движении скачков насыщенности при фильтрации двухкомпонентных сжимаемых жидкостей. Изд-во «Наука», Механика жидкости и газа, 1966, № 4.
2. Филинов М. В. О вытеснении воды газом в неоднородном пласте. Изд-во «Наука», Ж. «Механика», 1965, № 2.

К ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДЕБИТА СКВАЖИНЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

С. Д. ОСЯТИНСКИЙ

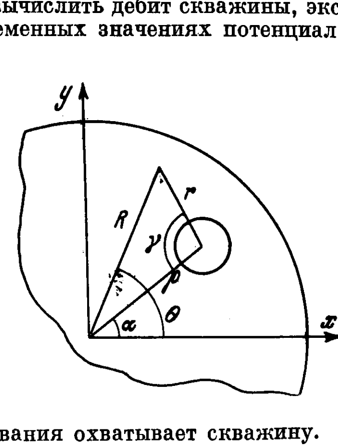
(Южно-Сахалинск)

В настоящей работе получено соотношение, являющееся аналогом теоремы Маскета [1] для случая неоднородного пласта, проницаемость которого удовлетворяет уравнению

$$\Delta \sqrt{k} \pm \mu^2 \sqrt{k} = 0 \quad (\mu = \mathrm{const}) \tag{1}$$

Полагается, что проницаемость ни в одной точке рассматриваемой области не обращается в нуль. Полученный результат позволяет вычислить дебит скважины, эксцентрично расположенной в круглом пласте при переменных значениях потенциала на контуре питания и контуре скважины.

Постановка задачи. В круглом пласте с известным законом изменения проницаемости при заданном значении потенциала на контуре питания $f^\circ\ (x, y)$ и контуре скважины $f_0(x, y)$ необходимо определить дебит скважины.



Полагается, что $f_1^\circ\ (x, y)$ и $f_0\ (x, y)$ удовлетворяют условию Дирихле.

Известно [1], что дебит определяется формулой

$$Q = \oint k \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds \tag{2}$$

Здесь φ — потенциал скорости, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{d\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0 \tag{3}$$

и заданным граничным условиям, а контур интегрирования охватывает скважину.

Решение (3) будем искать в виде

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{k}}\left\{CZ_0(\mu r) + \sum_{n=0}^{\infty}[A_n J_n(\mu R)\cos n\theta + B_n J_n(\mu R)\sin n\theta] + \right.$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}[D_n J_n(\mu r)\cos n\gamma + E_n J_n(\mu r)\sin n\gamma] \tag{4}$$

Здесь r радиус-вектор, исходящий из центра скважины; γ-угол между r и ρ радиус-вектором, определяющий положение центра скважины относительно центра пласта; θ угол между осью x и R радиус-вектором, исходящим из центра пласта; Z_0 — функция Неймана или Макдональда — в зависимости от того, берется ли в уравнении (1) знак + или —; J_n — функция Бесселя от действительного или от мнимого аргумента — в зависимости от знака в уравнении (1).

Из фигуры видно, что

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha), \qquad R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\gamma \tag{5}$$

где α — угол между ρ и осью x.

Обозначим радиус скважины r_0 и радиус пласта R°. Удовлетворим граничным условиям, положив $r = r_0$ на контуре скважины и $R = R^\circ$ на контуре питания. Подставляя (5) в (4) и используя теорему сложения [2], после некоторых преобразований найдем

$$a_0^\circ = CZ_0(\mu r_0) + D_0 J_0(\mu r_0) + J_0(\mu r_0)\sum_{k=0}^{\infty}(A_k\cos k\alpha + B_k\sin k\alpha)J_k(\mu\rho) \tag{6.1}$$

$$a_n^\circ = D_n J_n(\mu r_0) + J_n(\mu r_0)\sum_{k=0}^{\infty}(A_k\cos k\alpha + B_k\sin k_\alpha)[J_{k+n}(\mu\rho) + J_{k-n}(\mu\rho)] \tag{6.2}$$

$$b_n^\circ = E_n J_n(\mu r_0) + J_n(\mu r_0)\sum_{k=0}^{\infty}(B_k\cos k_\alpha - A_k\sin k_\alpha)[J_{k+n}(\mu\rho) - J_{k-n}(\mu\rho)] \tag{6.3}$$

$$a_0' = A_0 J_0(\mu R^\circ) + CJ_0(\mu\rho)Z_0(\mu R^\circ) + J_0(\mu R^\circ)\sum_{k=0}^{\infty}J_k(\mu\rho)D_k \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} a_n' &= A_n(\mu R^\circ) + 2CJ_n(\mu\rho)Z_n(\mu R^\circ)\cos n\alpha + \\ &+ J_n(\mu R^\circ)\cos n\alpha\sum_{k=0}^{\infty}[J_{k+n}(\mu\rho) + J_{k-n}(\mu\rho)]D_k + \\ &+ J_n(\mu R^\circ)\sin n\alpha\sum_{k=0}^{\infty}[J_{k-n}(\mu\rho) - J_{k+n}(\mu\rho)]E_k \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} b_n' &= B_n J_n(\mu R^\circ) + 2CJ_n(\mu\rho)Z_n(\mu R^\circ)\sin n\alpha + \\ &+ J_n(\mu R^\circ)\sin n\alpha\sum_{k=0}^{\infty}[J_{k+n}(\mu\rho) + J_{k-n}(\mu\rho)]D_k + \\ &+ J_n(\mu R_n)\cos n\alpha\sum_{k=0}^{\infty}[J_{k+n}(\mu\rho) - J_{k-n}(\mu\rho)]E_k \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{7.3}$$

Здесь a_0°, a_n°, b_n° и a_0', a_n', b_n' — коэффициенты Фурье разложения функций $\sqrt{kf_0}(x, y)$ и $\sqrt{kf^\circ}(x, y)$.

Для определения постоянных A_n, B_n, D_n, E_n получили четыре бесконечные системы линейных уравнений (6.2), (6.3), (7.2), (7.3) из (6.1) и (7.1).

Рассматриваемые системы являются нормальными [3]. Поскольку определители матриц этих систем отличны от нуля, то системы имеют единственное ограниченное решение.

Из вышеизложенного следует, что решение, взятое в виде (4), удовлетворяет (3) и заданным граничным условиям.

В области, ограниченной контуром питания и контуром скважины, рассмотрим функцию

$$\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{k}}\left\{C^* Z_0(\mu r) + \sum_{n=0}^{\infty}[A_n^* J_n(\mu R)\cos n\theta + B_n^* J_n(\mu R)\sin n\theta] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty}[D_n^* J_n(\mu\rho)\cos n\gamma + E_n^* J_n(\mu r)\sin n\gamma]\right\} \tag{8}$$

Пусть на контуре питания $\varphi^* (R^\circ, \theta) = f^\circ (x, y)$, а на контуре скважины $\varphi^* (r_0, \gamma) \neq f_0 (x, y)$, но

$$\oint \sqrt{k}\, \varphi^* (r_0, \gamma)\, ds = \oint \sqrt{k} f_0 (x, y)\, ds \tag{9}$$

Покажем, что при этих условиях

$$\oint k \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds = \oint k \frac{\partial \varphi^*}{\partial n}\, ds \tag{10}$$

где контур интегрирования охватывает скважину.

Доказательство. Из определения φ^* следует, что

$$a_0'^* = a_0', \qquad a_n'^* = a_n', \qquad b_n'^* = b_n \tag{11}$$

Здесь $a_0'^*$, $a_n'^*$, $b_n'^*$ коэффициенты Фурье разложения $\sqrt{k}\varphi^*$ на контуре питания. Из (9) и (11) следует, что $C^* = C$. Выбрав в качестве контура интегрирования окружность, центр которой совпадает с центром скважины, и замечая, что значение дебита не зависит от величины радиуса, получим утверждение (10).

Сформулируем результат: для нахождения дебита скважины, эксцентрично расположенной в круглом пласте, проницаемость которого удовлетворяет (1), достаточно в (2) подставить функцию, удовлетворяющую (3), граничному условию на контуре питания и условию (9) на контуре скважины.

В качестве такой функции возьмем

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{k}} \left\{ m Z_0 (\mu r_0) + \sum_{n=0}^{\infty} [M_n J_n (\mu R) \cos n\theta + N_n J_n (\mu R) \sin n\theta] \right\} \tag{12}$$

Удовлетворяя граничному условию на контуре питания и условию (9) на контуре скважины, найдем

$$\begin{aligned} a_0' &= m J_0 (\mu\rho) Z_0 (\mu R^\circ) + M_0 J_0 (\mu R^\circ) \\ a_n' &= 2m J_n (\mu\rho) Z_n (\mu R^\circ) \cos n^\alpha + M_n J_n (\mu R^\circ) \\ b_n' &= 2m J_n (\mu\rho) Z_n (\mu R^\circ) \sin n\alpha + N_n J_n (\mu R^\circ) \\ a_0^\circ &= m Z_0 (\mu r_0) + \sum_{n=0}^{\infty} [M_n \cos n\alpha + N_n \sin n\alpha] J_0 (\mu r_0)\, J_n (\mu\rho) \end{aligned} \tag{13}$$

где a_0', a_n', b_n' — коэффициенты Фурье разложения функции $\sqrt{k}\varphi$ на контуре питания,

$$a_0^\circ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{k} f_0 (\gamma)\, d\gamma \tag{14}$$

Из (2), (12), (13), (14) найдем

$$Q = \mathrm{const}\, \sqrt{k (\rho, \alpha)}\, \frac{a_0^\circ - J_0 (\mu r_0) S_1 (\rho, \alpha)}{Z_0 (\mu r_0) + J_0 (\mu r_0) S_2 (\rho, \alpha)}$$

$$S_1 (\rho, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n (\mu\rho)}{J_n (\mu R^\circ)} [a_n' \cos n\alpha + b_n' \sin n\alpha]$$

$$S_2 (\rho, \alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{[J_n (\mu\rho)]^2 Z_n (\mu R^\circ)}{J_n (\mu R^\circ)} (\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha)$$

Здесь $\mathrm{const} = 2\pi$ если в уравнении (1) берется минус и $\mathrm{const} = 2/\pi$ если плюс.

Взяв в качестве закона изменения проницаемости $k = \exp 2\mu y$ при $\rho \to 0$ получим случай, рассмотренный в [4].

Поступило 4 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
2. Ватсон Д. Н. Теория бесселевых функций. Изд. иностр. лит, 1949.
3. Каган В. Ф. Теория определителей, 1922.
4. Осятинский С. Д. Об одном обобщении формулы Дюпюи. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 3.