ЗАДАЧА О НАГНЕТАНИИ ГАЗА В НЕОГРАНИЧЕННЫЙ НЕОДНОРОДНЫЙ ВОДОНОСНЫЙ ПЛАСТ

В. А. ТОМЕЛЬГАС, М. В. ФИЛИНОВ

(Москва)

В работе рассматривается задача о вытеснении воды газом в неоднородном по проницаемости, неограниченном водоносном пласте.

1. При нагнетании газа в водоносный пласт около источника — центра симметрии ($n = 0$ — линейной, $n = 1$ — радиальной, $n = 2$ — сферической) образуется зона совместного движения газа и воды, отделенная от внешней водяной зоны четкой границей раздела. Давление p и насыщенности движущихся фаз (σ — газонасыщенность) удовлетворяют следующим уравнениям:

зона смеси $0 \leqslant s \leqslant s_0(t)$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[k(s)\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1}\gamma_1 s^n\frac{\partial p}{\partial s}\right] = s^n\frac{\partial}{\partial t}[m\gamma_1(1-\sigma)]$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left[k(s)\frac{k_2(\sigma)}{\mu_2}\gamma_2 s^n\frac{\partial p}{\partial s}\right] = s^n\frac{\partial}{\partial t}[m\gamma_2\sigma] \qquad (1.1)$$

зона воды $s_0(t) \leqslant s < \infty$

$$\frac{K}{m_1\mu_1}\frac{\partial}{\partial s}\left[k(s)\frac{\partial p}{\partial s}\right] = \frac{\partial p}{\partial t} \qquad (1.2)$$

В уравнениях (1.1)—(1.2) — $k(s)$ — проницаемость, $\mu_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$, $k_{1,2}(\sigma)$ — абсолютные вязкости, объемные веса и относительные фазовые проницаемости соответственно воды и газа, K — модуль совместной сжимаемости воды и пористой среды, m — пористость, s — координата, t — время, $s_0(t)$ — подвижная граница раздела зоны смеси и воды. Индексы 1 и 2 относятся соответственно к водяной и газовой фазам.

При соответствующих начальных и граничных условиях уравнения (1.1) и (1.2) полностью описывают движение во всем пласте.

Рассмотрим автомодельную задачу о нагнетании газа в неограниченный невозмущенный, вначале, неоднородный по проницаемости водоносный пласт.

Будем считать для простоты пористость в зоне газо-водяной смеси постоянной ($m = m_0$), воду — несжимаемой, газ — подчиняющимся закону Бойля — Мариотта.

Пусть проницаемость изменяется по закону (фиг. 1)

$$k(s) = k_0(s/h)^b \qquad (h = \text{const},\ k(h) = k_0) \qquad (1.3)$$
$$\gamma_2 = cp$$

При сделанных предположениях давление и насыщенность удовлетворяют следующим уравнениям:

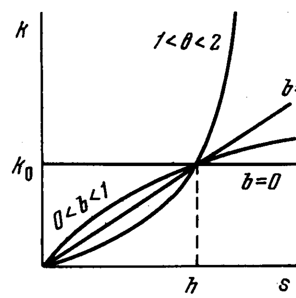
зона смеси $0 \leqslant s \leqslant s_0(t)$

$$a\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{s}{h}\right)^b s^n k_1\frac{\partial p^*}{\partial s}\right] = s^n\frac{\partial(1-\sigma)}{\partial t}$$
$$a\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{s}{h}\right)^b s^n\mu_0 k_2 p^*\frac{\partial p^*}{\partial s}\right] = s^n\frac{\partial p^*\sigma}{\partial t} \qquad (1.4)$$

зона воды $s_0(t) \leqslant s < \infty$

$$a\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{s}{h}\right)^b s^n\frac{\partial p}{\partial s}\right] = s^n\frac{\partial p^*}{\partial t} \qquad (1.5)$$

$$a = \frac{Kh_0}{m_0\mu_1}, \qquad \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad p^* = \frac{p}{K}$$



Фиг. 1

В дальнейшем для простоты обозначений индекс * опускается.

Из приведенных уравнений следуют как частные случаи решения аналогичных задач для постоянной проницаемости [1] или задач с тем же заданием проницаемости, но в постановке «поршневого» вытеснения [2].

Пласт считается бесконечным, давление в нем в начальный момент — постоянным и равным p_∞, насыщенность газа σ — равной нулю. В процессе нагнетания газа давление на бесконечности остается неизменным и равным начальному давления p_∞.

Пусть в начальный момент через источник, размер которого будем считать бесконечно малым, начинает нагнетаться газ с расходом, изменяющимся по некоторому степенному закону

$$Q(t) = At^a$$

Таким образом, на источнике (при $s = 0$) имеем

$$\left[s^{n+b} p \frac{\partial p}{\partial s}\right]_{s\to 0} = Bt^a \tag{1.6}$$

Насыщенность σ^* на источнике равна

$$\sigma^* = 1 - \sigma^{(*)} \tag{1.7}$$

где $\sigma^{(*)}$ — остаточная водонасыщенность.

Исходя из соображений материального баланса, можно показать, что на подвижной границе раздела зоны газо-водяной смеси и зоны воды существует стационарный скачок насыщенности σ_{0-}. Величина фронтовой насыщенности при этом вычисляется из уравнения

$$\varphi'(\sigma_{0-})\sigma_{0-} = \varphi(\sigma_{0-}), \qquad \varphi(\sigma) = \frac{\mu_0 k_2(\sigma)}{k_1(\sigma) + \mu_0 k_2(\sigma)} \tag{1.8}$$

Насыщенность σ_{0+} на фронте вытеснения со стороны вытесняемой фазы по постановке задачи равна нулю. В уравнении (1.8) $\varphi(\sigma)$ — известная функция Баклея — Леверетта. Кроме этого, на фронте вытеснения

$$p_{0-} = p_{0+}, \qquad \left[(k_1 + \mu_0 k_2)\frac{\partial p}{\partial s}\right]_{0-} = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{0+} \tag{1.9}$$

Решение сформулированной задачи при некотором значении показателя a в (1.6) автомодельно. Подстановка

$$\zeta = \left[\frac{sh^{b\gamma}}{2(at)^\gamma}\right]^{n+1}, \quad \gamma = \frac{1}{2-b}, \quad \alpha = \frac{2-b}{n+1}, \quad \beta = \frac{2^{2-b}}{n+1} \tag{1.10}$$

позволяет все предыдущие рассуждения кратко изложить следующим образом:

зона смеси $0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0$

$$\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^{2-\alpha} k_1 \frac{dp}{d\zeta}\right] = \beta\gamma\zeta\frac{d\sigma}{d\zeta}, \qquad \frac{d}{d\zeta}\left[\zeta^{2-\alpha}\mu_0 k_2 p \frac{dp}{d\zeta}\right] = -\beta\gamma\zeta\frac{dp\sigma}{d\zeta} \tag{1.11}$$

$$(\sigma)_{\zeta\to 0} = 1 - \sigma^{(*)}, \qquad \left(\zeta^{2-\alpha} p \frac{dp}{d\zeta}\right)_{\zeta\to 0} = Ct^{a-(n+b-1)\gamma} \tag{1.12}$$

зона воды $\zeta_0 \leqslant \zeta < \infty$

$$\frac{d^2p}{d\zeta^2} + \left[\frac{2-\alpha}{\zeta} + \beta\gamma\zeta^{\alpha-1}\right]\frac{dp}{d\zeta} = 0 \tag{1.13}$$

$$p(\infty) = p_\infty \tag{1.14}$$

$$p_{0+} = p_{0-}, \qquad \left[(k_1 + \mu_0 k_2)\frac{dp}{d\zeta}\right]_{0-} = \left(\frac{dp}{d\zeta}\right)_{0+} \tag{1.15}$$

Решать задачу будем следующим образом. Параметром ζ_0, характеризующим положение границы раздела, будем варьировать. Уравнение (1.13) допускает аналитическое решение, из которого, совместно с выполнением условий материального баланса на границе ζ_0, можно определить (1.15). Насыщенность на фронте σ_{0-} со стороны вытеснения известна из (1.8). Таким образом, краевая задача для системы уравнений (1.11) заменяется задачей Коши с условиями (1.15) и (1.8) на границе ζ_0. Подбором ζ_0 можно добиться выполнения условия (1.12), т. е. найти решение краевой задачи. Этот путь представляется наиболее легким.

Решением уравнения (1.13) при соблюдении условия (1.14) является функция

$$p = c_1 \int_\zeta^\infty \exp(-2^{2-b}\gamma^2\zeta^\alpha)\,\zeta^{\alpha-2}\,d\zeta + p_\infty \tag{1.16}$$

Из соображений материального баланса для газа следует, что фронт вытеснения движется со скоростью

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = -a\left(\frac{\mu_0 k_2}{\sigma}\right)_{0-} s_0^n \left(\frac{s_0}{h}\right)^b \left(\frac{dp}{d\zeta}\right)_{0-} \frac{\partial\zeta}{\partial s} \tag{1.17}$$

С другой стороны, из подстановки (1.10) имеем

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = \gamma\frac{s_0}{t}, \qquad \frac{d\zeta}{ds} = \frac{1}{n+1}\frac{\zeta}{s} \tag{1.18}$$

Таким образом, (1.17) и (1.18) дают

$$\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)_{0-} = -\alpha\gamma\zeta_0^{\alpha-1}\frac{1}{\varphi'(\sigma_{0-})(k_1+\mu_0 k_2)_{0-}} \tag{1.19}$$

Учитывая связь между градиентами давления справа и слева от фронта (1.15), имеем

$$\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)_{0+} = -\beta\gamma\zeta_0^{\alpha-1}\frac{1}{\varphi'(\sigma_{0-})} \tag{1.20}$$

Последнее уравнение дает возможность определить константу c в уравнении (1.16). Из (1.17) производная

$$\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)_{0+} = -c_1 \exp\left(-2^{2-b}\gamma^2\zeta_0^{\alpha}\right)\zeta_0^{\alpha-2} \tag{1.21}$$

Сравнивая (1.20) и (1.21), получаем

$$c_1 = \frac{\beta\gamma}{\varphi'(\sigma_{0-})}\zeta_0 \exp\left(2^{2-b}\gamma^2\zeta_0^{\alpha}\right) \tag{1.22}$$

Теперь можно в окончательном виде записать закон распределения давления в водоносной зоне

$$p = p_\infty + \frac{\beta\gamma\zeta_0}{\varphi'(\sigma_{0-})}\exp\left(2^{2-b}\gamma^2\zeta_0^{\alpha}\right)\int\limits_{\zeta}^{\infty}\exp\left(-2^{2-b}\gamma^2\zeta^{\alpha}\right)\zeta^{\alpha-2}d\zeta \tag{1.23}$$

и, в частности, определить давление на границе

$$p_{0+} = p_{0-} = p_\infty + \frac{\beta\gamma\xi_0}{\varphi'(\sigma_{0-})}\exp\left(2^{2-b}\gamma^2\zeta_0^{d}\right)\int\limits_{\zeta_0}^{\infty}\exp\left(-2^{2-b}\gamma^2\zeta^{\alpha}\right)\zeta^{\alpha-2}d\zeta \tag{1.24}$$

2. Таким образом, на границе раздела ζ_0 со стороны зоны смеси насыщенность σ_{0-} вычисляется из уравнения (1.8), давления p_0 — из уравнения (1.24), градиент давления $(dp / d\zeta)_0$ — из уравнения (1.19). Этих условий, как оказывается, недостаточно для уверенного интегрирования системы (1.11).

Перейдем к системе уравнений (1.11). Перепишем ее следующим образом:

$$a_i\frac{dy}{d\zeta} + b_i\frac{d\sigma}{d\zeta} = c_i \quad (i = 1, 2), \qquad \frac{dp}{d\zeta} = y \tag{2.1}$$

где

$$a_1 = k_1 \qquad b_1 = k_1'y - \beta\gamma\zeta^{\alpha-1}, \qquad c_1 = \frac{(2-\alpha)k_1 y}{\zeta}, \ a_2 = \mu_0 k_2, \qquad b_2 = \mu_0 k_2' y + \beta\gamma\zeta^{\alpha-1}$$

$$c_2 = -y\left[\frac{(2-\alpha)\mu_0 k_2}{\zeta} + \frac{\mu_0 k_2 y}{p} + \frac{\beta\gamma\sigma}{p}\zeta^{\alpha-1}\right] \tag{2.2}$$

Эта система уравнений, позволяющая, вообще говоря, определить давление и насыщенности во всей зоне смеси от $\zeta = \zeta_0$ до $\zeta \to 0$, оказывается не определенной в точке ζ_0, т. е. при условиях (1.8), (1.24) и (1.18). Легко проверить, что в точке ζ_0 коэффициенты в системе уравнений (2.1) пропорциональны, т. е.

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)_0 = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)_0 = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)_0 = \left(\frac{k_1}{\mu_0 k_2}\right)_0 \tag{2.3}$$

Здесь в дальнейшем нижний индекс 0 означает, что то или иное выражение берется на границе ζ_0 при условиях (1.8), (1.24) и (1.18).

Таким образом, в точке ζ_0 первые два уравнения (2.1) дают лишь одну связь между $(d\sigma / d\zeta)_0$ и $(dy / d\zeta)_0$

$$\left(\frac{dy}{d\zeta}\right)_0 = \left(\frac{c_1}{a_1}\right)_0 - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)_0\left(\frac{d\sigma}{d\zeta}\right)_0 \tag{2.4}$$

Еще одно соотношение между $(d\sigma / d\zeta)_0$ и $(dy / d\zeta)_0$ можно найти следующим образом. Продифференцируем первые два уравнения (2.1) по ζ

$$\left(\frac{\partial a_i}{\partial\zeta} + \frac{\partial a_i}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{\partial a_i}{\partial p}y + \frac{\partial a_i}{\partial y}\frac{dy}{d\zeta}\right)\frac{dy}{d\zeta} + a_i\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \tag{2.5}$$

$$+\left(\frac{\partial b_i}{\partial\zeta} + \frac{\partial b_i}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{\partial b_i}{\partial p}y + \frac{\partial b_i}{\partial y}\frac{dy}{d\zeta}\right)\frac{d\sigma}{d\zeta} + b_i\frac{d^2\sigma}{d\zeta^2} = \frac{\partial c_i}{\partial\zeta} + \frac{\partial c_i}{\partial\sigma}\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{\partial c_i}{\partial p}y + \frac{\partial c_i}{\partial y}\frac{dy}{d\zeta}$$

$$(i = 1, 2)$$

Учитывая, что $(\mu_0 k_2 a_1)_0 = (k_1 a_2)_0$, $(\mu_0 k_2 b_1)_0 = (k b_2)_0$ составим линейную комбинацию из уравнений (2.5): из умноженного на $(\mu_0 k_2)_0$ первого уравнения вычтем второе уравнение, умноженное на $(k_1)_0$. На границе ζ_0 в этой линейной комбинации производные второго порядка $(d^2\sigma \,/\, d\zeta^2)_0$ и $(d^2y \,/\, d\zeta^2)_0$ пропадут

$$\begin{gathered}
\left(\frac{dy}{d\zeta}\right)_0 \left[\mu_0 k_2 \left(\frac{\partial a_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial a_1}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{\partial a_1}{\partial p} + y + \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{dy}{d\zeta}\right) - \right. \\
\left. - k_1 \left(\frac{\partial a_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial a_2}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{\partial a_2}{\partial p} y + \frac{\partial a_2}{\partial y}\frac{dy}{d\zeta}\right)\right]_0 + \\
+ \left(\frac{d\sigma}{d\zeta}\right)_0 \left[\mu_0 k_2 \left(\frac{\partial b_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial b_1}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{\partial b_1}{\partial p} y + \frac{\partial b_1}{\partial p}\frac{dy}{d\zeta}\right) - \right. \\
\left. - k_1 \left(\frac{\partial b_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial b_2}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{\partial b_2}{\partial p} y + \frac{\partial b_2}{\partial y}\frac{dy}{d\zeta}\right)\right]_0 = \\
= \left[\mu_0 k_2 \left(\frac{\partial c_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial c_1}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{\partial c_1}{\partial p}\frac{dp}{d\zeta} + \frac{\partial c_1}{\partial y}\frac{dy}{d\zeta}\right) - k_1 \left(\frac{\partial c_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial c_2}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{\partial c_2}{\partial p} y + \frac{\partial c_2}{\partial y}\frac{dy}{d\zeta}\right)\right]_0
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Так как

$$\left(\frac{\partial a_i}{\partial \zeta}\right)_0 = \left(\frac{\partial a_i}{\partial p}\right)_0 = \left(\frac{\partial a_i}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial b_i}{\partial p}\right)_0 = \left(\frac{\partial c_i}{\partial p}\right)_0 = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

подставляя в (2.6) соотношение (2.4), получим квадратное уравнение относительно $(d\sigma \,/\, d\zeta)_0$

$$E_0 \left(\frac{d\sigma}{d\zeta}\right)_0^2 + 2F_0 \left(\frac{d\sigma}{d\zeta}\right)_0 + G_0 = 0 \tag{2.7}$$

где

$$\begin{gathered}
E = \mu_0 k_2 \left(\frac{\partial b_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{b_1}{a_1}\frac{\partial a_1}{\partial \sigma}\right) - k_1 \left(\frac{\partial b_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial b_2}{\partial y} - \frac{b_1}{a_1}\frac{\partial a_2}{\partial \sigma}\right) \\
2F = \mu_0 k_2 \left[\frac{\partial b_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial c_1}{\partial \sigma} + \frac{b_1}{a_1}\frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{c_1}{a_1}\left(\frac{\partial a_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\right] - \\
- k_1 \left[\frac{\partial b_2}{\partial \sigma} - \frac{\partial c_2}{\partial \sigma} + \frac{b_1}{a_1}\frac{\partial c_2}{\partial y} + \frac{c_1}{a_1}\left(\frac{\partial a_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial b_2}{\partial y}\right)\right] \\
G = -\left[\mu_0 k_2 \left(\frac{c_1}{a_1}\frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{\partial c_1}{\partial \zeta}\right) - k_1 \left(\frac{c_1}{a_1}\frac{\partial c_2}{\partial y} + \frac{\partial c_2}{\partial \zeta}\right)\right]
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Из (2.7) имеем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\zeta}\right)_0 = \frac{-F_0 \pm \sqrt{F_0^2 - E_0 G_0}}{E_0} \tag{2.9}$$

При подробном рассмотрении коэффициентов (2.8) можно показать, что на границе ζ_0

$$E_0 < 0, \qquad F_0 < 0, \qquad G_0 > 0$$

Таким образом,

$$F_0^2 - E_0 G_0 > 0, \qquad F_0^2 - E_0 G_0 > F_0^2$$

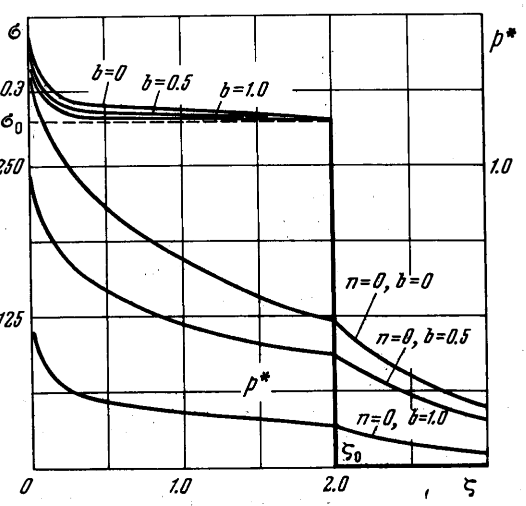
Так как $d\sigma \,/\, d\zeta$ по постановке задачи в зоне газо-водяной смеси отрицательно всюду вплоть до границы ζ_0, в (2.9) следует взять только отрицательный корень

$$\left(\frac{d\sigma}{d\zeta}\right)_0 = \frac{-F_0 + \sqrt{F_0^2 - E_0 G_0}}{E_0} \tag{2.10}$$

В результате, на границе раздела ζ_0 со стороны смеси имеем следующие значения производных:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial \sigma}{d\zeta}\right)_0 = \frac{-F_0 + \sqrt{F_0^2 - E_0 G_0}}{E_0} \\
\left(\frac{dy}{d\zeta}\right)_0 = \left(\frac{c_1}{a_1}\right)_0 - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)_0 \left(\frac{d\sigma}{d\zeta}\right)_1, \\
\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)_0 = y_0
\end{gathered} \tag{2.11}$$

Эти условия дают возможность при численном интегрировании системы уравнений (2.1) «выйти» из точки ζ_0, в которой система (2.1) не определена. После выхода из ζ_0 в некоторую близлежащую точку ζ_0' численное



Фиг. 2

интегрирование системы уравнений (2.1) не представляет особых трудностей, Система уравнений (2.1) разрешается относительно производных

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_1c_1}, \qquad \frac{dp}{d\zeta} = y, \qquad \frac{dy}{d\zeta} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{2.12}$$

Система уравнений (2.12) интегрировалась методом Рунге — Кутта на ЭВМ БЭСМ-2.

Расчеты были выполнены при следующих параметрах: $p_\infty = 35$ *ат*, $\mu_0 = 100$, $K = 10^4$ *кг/см*^{2}, $p_0 = 40$, 45, 50 *ат*. Относительные фазовые проницаемости для газа и воды были взяты следующими:

$$k_1(\sigma) = \begin{cases} (1 - {}^5/_4\sigma)^{3.5} & (0 \leqslant \sigma \leqslant 0.8) \\ 0 & (0.8 \leqslant \sigma \leqslant 1.0) \end{cases}$$

$$k_2(\sigma) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant \sigma \leqslant 0.1) \\ ({}^{10}/_9\sigma - {}^1/_9)^{3.5}(4 - 3\sigma) & (0.1 \leqslant \sigma \leqslant 1.0) \end{cases}$$

Фронтовая насыщенность в этом случае равна $\sigma_0 = 0.2868$.

Результаты расчетов представлены на фиг. 2.

Как и следовало ожидать, неоднородность пласта существенно сказывается на распределении давления. Распределение насыщенности практически можно считать не зависящим от неоднородности.

Поступило 21 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Стклянин Ю. Н., Томельгас В. А. О движении скачков насыщенности при фильтрации двухкомпонентных сжимаемых жидкостей. Изд-во «Наука», Механика жидкости и газа, 1966, № 4.
2. Филинов М. В. О вытеснении воды газом в неоднородном пласте. Изд-во «Наука», Ж. «Механика», 1965, № 2.

К ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДЕБИТА СКВАЖИНЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

С. Д. ОСЯТИНСКИЙ

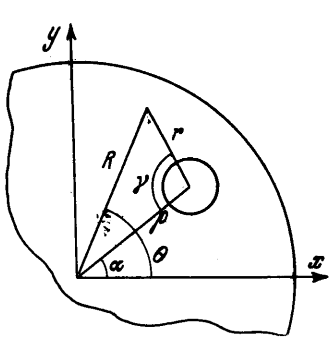
(Южно-Сахалинск)

В настоящей работе получено соотношение, являющееся аналогом теоремы Маскета [1] для случая неоднородного пласта, проницаемость которого удовлетворяет уравнению

$$\Delta \sqrt{k} \pm \mu^2 \sqrt{k} = 0 \quad (\mu = \mathrm{const}) \tag{1}$$

Полагается, что проницаемость ни в одной точке рассматриваемой области не обращается в нуль. Полученный результат позволяет вычислить дебит скважины, эксцентрично расположенной в круглом пласте при переменных значениях потенциала на контуре питания и контуре скважины.

Постановка задачи. В круглом пласте с известным законом изменения проницаемости при заданном значении потенциала на контуре питания $f^\circ\ (x, y)$ и контуре скважины $f_0(x, y)$ необходимо определить дебит скважины.



Полагается, что $f_1^\circ\ (x, y)$ и $f_0\ (x, y)$ удовлетворяют условию Дирихле.

Известно [1], что дебит определяется формулой

$$Q = \oint k \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds \tag{2}$$

Здесь φ — потенциал скорости, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{d\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0 \tag{3}$$

и заданным граничным условиям, а контур интегрирования охватывает скважину.