

ГИДРОСТАТИКА В СЛАБЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ. РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

Л. А. СЛОБОЖАНИН (Харьков)

Рассматривается задача об определении равновесных форм поверхности раздела двух однородных несмешивающихся жидкостей, подверженных действию центробежных и капиллярных сил. Известны работы, посвященные данному вопросу. Шаррю [1] исследовал свойства равновесных форм свободной поверхности равномерно вращающейся жидкой капли и нашел решение в эллиптических функциях. Чандрасекар [2] построил семейство равновесных форм капли, пересекающих ось вращения. Отметим, однако, что приведенные им данные не очень удобны для практического использования. Розенталь [3] определил характерные размеры пузыря, находящегося внутри равномерно вращающейся жидкости.

Ниже исследуются осесимметричные равновесные формы (пересекающие ось вращения) поверхности раздела жидкостей, заполняющих сосуд и равномерно вращающихся вместе с ним. По результатам численного интегрирования построено семейство этих форм. В случае, если поверхность раздела не достигает стенки сосуда, получается задача, которой были посвящены упомянутые выше работы [1-3]. Произведен анализ возможности аппроксимации равновесных форм эллипсоидами вращения.

1. Рассмотрим некоторое тело, имеющее замкнутую осесимметричную полость, полностью заполненную двумя однородными, несжимаемыми, несмешивающимися жидкостями 1 и 2 (фиг. 1). Пусть указанная система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью симметрии полости сосуда. Массы жидкостей предполагаются достаточно малыми, чтобы внутренними силами взаимного притяжения можно было пренебречь по сравнению с капиллярными и центробежными силами. Внешнее силовое поле отсутствует.

Будем считать, что жидкость плотности ρ_i , объем которой равен v_i , занимает область Ω_i ($i = 1, 2$). Для определенности предположим, что $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 \geq 0$. Пусть σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе Σ раздела двух жидкостей и σ_i — коэффициент поверхностного натяжения на границе соприкосновения i -той жидкости со стенками сосуда.

Введем подвижную цилиндрическую систему координат r, φ, z , жестко связанную с вращающимся сосудом, причем ось z совместим с осью вращения. Рассмотрим в этой системе осесимметричные равновесные формы (пересекающие ось вращения) поверхности раздела жидкостей 1 и 2.

Учитывая условие несжимаемости жидкостей

$$\int_{\Omega_i} dv_i = v_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

и условие непротекания на твердой стенке сосуда, из вариационного принципа стационарного значения потенциальной энергии системы получим следующие условия, определяющие равновесную форму поверхности раздела:

$$2H\sigma = -\frac{1}{2}\Delta\rho\omega^2 r^2 + c \text{ на } \Sigma \quad (1.2)$$

$$\cos\theta = (\sigma_1 - \sigma_2)/\sigma \text{ на } \Gamma \quad (1.3)$$

Здесь H — средняя кривизна поверхности в данной точке (считается положительной, если вогнутость направлена в сторону Ω_1), c_1 — произвольная постоянная, θ — двугранный угол области Ω_2 в точках неизвестной заранее линии Γ примыкания поверхности раздела к стенкам сосуда.

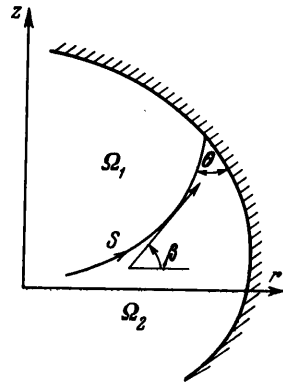
Уравнение (1.2) после несложных преобразований принимает вид

$$\sin\beta = \frac{1}{2}r(c - \frac{1}{2}pr^2) \quad (1.4)$$

или, в параметрической форме,

$$r'' = -z' \left(-pr^2 + c - \frac{z'}{r} \right), \quad z'' = r' \left(-pr^2 + c - \frac{z'}{r} \right) \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right) \quad (1.5)$$

Здесь β — угол, отсчитываемый от оси r до направления вектора касательной к меридианальному сечению L поверхности раздела (вектор касательной направлен в сторону возрастания дуги s линии L , которую проходят так, чтобы область Ω_1 оставалась слева), $p = (\Delta\rho\omega^2)/2\sigma \geq 0$ — параметр, имеющий размерность (длина)⁻³, c — неизвестная удвоенная средняя кривизна поверхности раздела в точке $r = 0$.



Фиг. 1

Рассмотрим свойства интегральных кривых уравнения (1.4) или (1.5). При $p = 0$ интегральной кривой является окружность. Исследуем теперь случай, когда $p > 0$. Вводя безразмерные величины

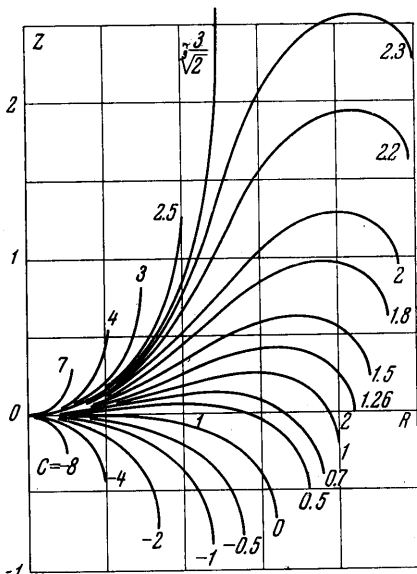
$$R = rp^{1/3}, \quad Z = zp^{1/3}, \quad S = sp^{1/3}, \quad V_i = v_i p, \quad C = cp^{-1/3} \quad (1.6)$$

перепишем уравнения (1.4) и (1.5) в виде

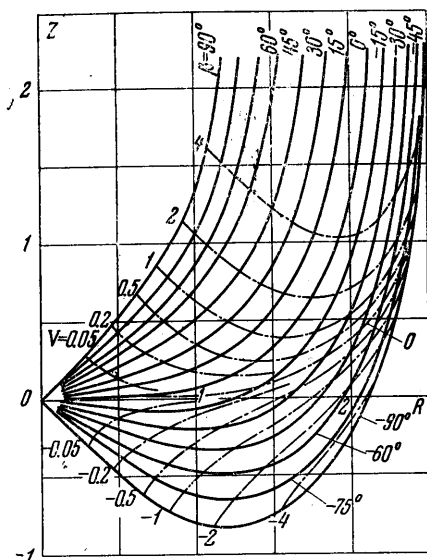
$$\sin \beta = \frac{1}{2} R \left(C - \frac{1}{2} R^2 \right) \quad (1.7)$$

$$R'' = -Z' \left(-R^2 + C - \frac{Z'}{R} \right), \quad Z'' = R' \left(-R^2 + C - \frac{Z'}{R} \right) \quad \left(' = \frac{d}{dS} \right) \quad (1.8)$$

Можно показать, что ограниченные интегральные кривые этих уравнений являются замкнутыми, симметричными относительно двух взаимно перпендикулярных прямых, одной из которых является ось вращения. Поэтому в дальнейшем достаточно рас-



Фиг. 2



Фиг. 3

сматривать только ту четверть каждой интегральной кривой, которая при $R \geq 0$ отделяет жидкость 1, находящуюся «над» кривой от жидкости 2, находящейся «под» ней (здесь для определенности предполагается, что ось Z направлена «снизу вверх»). Выберем начало координат в точке пересечения рассматриваемой четверти с осью Z . Из (1.7) следует, что для рассматриваемого участка интегральных кривых, соответствующих значениям $C \leq 0$, $\sin \beta$ непрерывно убывает от нуля при $R = 0$ до -1 при $R = R_1 = (2 + \sqrt{d})^{1/3} + (2 - \sqrt{d})^{1/3}$, где $d = 4 - \frac{8}{27} C^3$. С ростом значения C величина R_1 увеличивается. Если $0 < C < C_* = \frac{3}{2} (4)^{1/3}$, то ордината указанных участков возрастает от нуля при $R = 0$ до максимального значения в точке $C R \equiv R_2 = \sqrt{2C}$, а затем при $R_2 > R \leq R_1$ убывает. Абсцисса точки перегиба равна $R_3 \equiv \sqrt{2/3} C$. Если $C = C_*$, то интегральная кривая асимптотически стремится к прямой $R = R_* \equiv 2^{1/3}$, сохраняя кривизну положительной. Для рассматриваемого участка интегральных кривых, соответствующих значениям $C > C_*$, $\sin \beta$ непрерывно увеличивается от нуля при $R = 0$ до 1 при

$$R = R_4 \equiv \sqrt[6]{4-d} \left(-\cos \frac{\gamma + 2\pi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\gamma + 2\pi}{3} \right)$$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{-d}}{\sqrt{4-d}}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{\sqrt{4-d}}$$

При этом с ростом C величина R_4 уменьшается.

Аналитически решения уравнения (1.7) выражаются через линейные комбинации элементарных функций и эллиптических интегралов первого и второго рода. Однако непосредственно построение однопараметрического семейства интегральных кривых

удобнее производить с помощью численного интегрирования системы (1.8) при начальных условиях $R(0) = 0$, $R'(0) = 1$, $Z(0) = 0$, $Z'(0) = 0$.

Интегрирование системы (1.8) на ЭЦВМ М-20 было произведено М. А. Беляевой. Чтобы избежать особенности при $R = 0$ решение указанной системы в окрестности нуля определялось разложением R и Z в ряд по степеням S .

$$R = S - 1/24 C^2 S^3 + (1/1920 C^4 + 1/40 C) S^5 + \dots, \quad Z = 1/4 C S^2 - (1/192 C^3 + 1/16) S^4 + \dots$$

Полученное однопараметрическое семейство интегральных кривых приведено на фиг. 2 (показана только четверть каждой кривой).

Для того, чтобы определить, какой участок и на какой из интегральных кривых служит образующей поверхности раздела, достигающей стенки сосуда, необходимо воспользоваться условиями (1.1) и (1.3). При этом требуются некоторые вспомогательные данные относительно интегральных кривых. На фиг. 3 в координатах R , Z для рассмотренных выше четвертей интегральных кривых сплошными показаны линии равных углов β и штрих-пунктиром — линии равных объемов

$$V = \pi \int_0^S R^2 Z' dS.$$

Этих данных достаточно для конкретного определения равновесной формы поверхности раздела жидкостей при известной геометрии сосуда и заданных величинах p , v_i и краевого угла θ .

2. В случае, если одна жидкость («внутренняя») целиком окружена другой («внешней») и только последняя соприкасается со стенками сосуда, равновесные поверхности в переменных R , Z определяются интегральными кривыми, четверти которых приведены на фиг. 2. Для выбора в каждом конкретном случае определенной интегральной кривой необходимо воспользоваться условием (1.1), примененным к переменным R , Z ; величина V_2 задана. При этом необходимо рассматривать кривые, соответствующие значениям $-\infty < C \leq 1,26$ и $C_* \leq C < \infty$, так как равновесные поверхности не должны быть самопересекающимися.

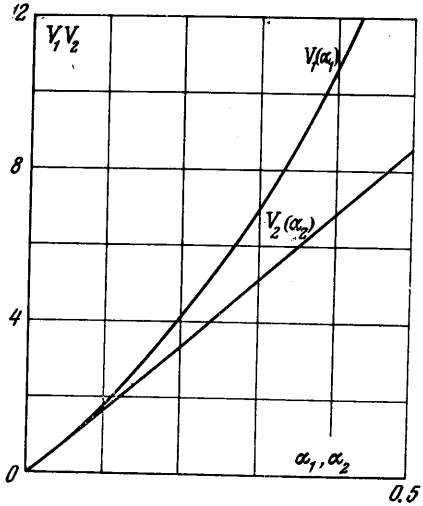
Если $-\infty < C \leq 1,26$, то внутренней является более плотная жидкость 2. Для определения формы поверхности раздела приводим некоторые значения V_2 в зависимости от C .

| | | | | | |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C = -10$ | -8 | -6 | -4 | -2 | -1 |
| $V_2 = 0.0332$ | 0.0644 | 0.1495 | 0.4665 | 2.2219 | 4.9266 |
| $C = -0.5$ | 0 | 0.5 | 0.7 | 1 | 1.26 |
| $V_2 = 6.7194$ | 8.3708 | 9.3960 | 9.5204 | 9.2326 | 8.3915 |

Если $V_2 = 0$, то равновесной поверхностью будет сфера; при увеличении V_2 (фиг. 2) поверхность раздела сплющивается у полюсов и растягивается у экватора. При $V_2 = 8.3708$ ($C = 0$) кривизна поверхности в полюсах равна нулю. Если $V_2 > 8.3708$, то у полюсов поверхности раздела возникают углубления, которые с дальнейшим ростом V_2 развиваются. Максимально допустимое значение V_2 , при котором существует равновесная поверхность раздела, пересекающая ось вращения, равно 9.5204. Эта поверхность определяется интегральной кривой $C = 0.70$. Величинам $8.3915 \leq V_2 < 9.5204$ соответствуют еще и равновесные поверхности, определяемые интегральными кривыми, для которых $0.70 < C \leq 1.26$.

Семейство кривых, соответствующих значениям $C_* \leq C < \infty$, определяет форму поверхности раздела в том случае, когда внутренней является жидкость 1. Для выбора конкретной кривой из этого семейства по заданному V_1 , приводим значения V_1 в зависимости от C

| | | | |
|----------------------------------|---------|--------|--------|
| $C = 3/2$ (4) ^{1/2} | 2.4 | 2.5 | 2.7 |
| $V_1 = \infty$ | 11.6789 | 5.7468 | 3.1616 |
| $C = 3$ | 3.5 | 4 | 5 |
| $V_1 = 1.8267$ | 0.9703 | 0.5997 | 0.2866 |
| | | | 0.0998 |



Фиг. 4

Если $V_1 = 0$, то поверхность раздела является сфера; из приведенных данных и фиг. 2 видно, что с увеличением V_1 равновесная поверхность вытягивается вдоль оси вращения и при достаточно больших значениях V_1 ее экваториальный радиус R_4 близок к R_* . В последнем случае, заменяя приближенно равновесную поверхность цилиндром радиуса R_* и используя соотношения (1.6), можно показать, что если v_1 постоянно, а увеличивается только p , то длина l равновесной поверхности вдоль оси z асимптотически пропорциональна величине $p^{2/3}$, а ее экваториальный радиус r_4 — величине $p^{-1/3}$; если же p неизменно, а увеличивается v_1 , то r_4 остается почти неизменным, а длина l пропорциональна v_1 .

3. Часто бывает удобно равновесные поверхности раздела заменять приближенными, описываемыми простыми аналитическими выражениями. Рассмотрим в качестве последних однопараметрическое семейство эллипсоидов вращения, удовлетворяющих условию (1.1) и будем аппроксимировать ими поверхности раздела, удовлетворяющие стенке сосуда. Аппроксимация при заданном значении p производится тем эллипсоидом, для которого потенциальная энергия системы (Π_*, α) , записанная в предположении, что поверхностями раздела служат однопараметрическое по α семейство эллипсоидов, принимает стационарное значение ($d\Pi_*/d\alpha = 0$).

Рассмотрим сперва случай, когда жидкость 2 является внутренней. Аппроксимация в этом случае производится семейством сжатых эллипсоидов с коэффициентами деформации $\alpha_2 = (a - b)/a$ ($0 < \alpha_2 < 1$) (a и b — главные полуоси) и объемом v_2 . После несложных вычислений получается, что «равновесным» должен служить тот эллипсоид, для которого выполняется соотношение

$$1 + \frac{(1 - \alpha_2^2)}{\sqrt{2\alpha_2 - \alpha_2^2}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha_2 - \alpha_2^2} + 1}{(1 - \alpha_2)} + \frac{3}{2} \frac{(1 - \alpha_2)^2}{(\sqrt{2\alpha_2 - \alpha_2^2})^3} \left[\sqrt{2\alpha_2 - \alpha_2^2} - (1 + 2\alpha_2 - \alpha_2^2) \ln \frac{\sqrt{2\alpha_2 - \alpha_2^2}}{(1 - \alpha_2)} \right] - \frac{V_2}{5\pi} = 0 \quad (3.1)$$

На фиг. 4 представлена зависимость V_2 от α_2 , полученная из уравнения (3.1). Приближенно можно считать, что она определяется соотношением $V_2 = \pi \alpha_2^{16/8} + 8/21 \alpha_2$. Из (3.1) и соотношения $v_2 = 4/3 \pi a^3 (1 - \alpha_2)$ определяются форма и размеры равновесного эллипсоида.

Если жидкость 1 является внутренней, то равновесные формы аппроксимируются семейством вытянутых эллипсоидов вращения, характеризующихся коэффициентом деформации $\alpha_1 = (b - a)/b$ ($0 < \alpha_1 < 1$). Тогда, аналогично предыдущему случаю, получаем соотношение

$$1 - \frac{3}{2(2\alpha_1 - \alpha_1^2)} + \frac{\arcsin \sqrt{2\alpha_1 - \alpha_1^2}}{(1 - \alpha_1) \sqrt{2\alpha_1 - \alpha_1^2}} + \frac{3}{2} \frac{(1 - 4\alpha_1 + 2\alpha_1^2) \arcsin \sqrt{2\alpha_1 - \alpha_1^2}}{(1 - \alpha_1)(\sqrt{2\alpha_1 - \alpha_1^2})^3} + \frac{V_1}{5\pi} = 0 \quad (3.2)$$

которое при заданных p и $v_1 = 4/3 \pi a^3 (1 - \alpha_1)^{-1}$ полностью определяет размеры и форму аппроксимирующего эллипсоида. Зависимость $V_1(\alpha_1)$ представлена на фиг. 4. Первые три члена разложения V_1 в ряд по α_1 имеют вид

$$V_1 = \pi \alpha_1^{16/8} + 104/21 \alpha_1 + 32/7 \alpha_1^2.$$

Проведенные сравнения показали хорошее совпадение точных форм с приближенными. При $V_2 \leq 7$ погрешность аппроксимации не превышает 4%, а при $V_1 \leq 12$ ошибка менее 2%. Здесь ошибка в каждой точке поверхности определяется как отклонение приближенной равновесной формы от точной, измеренное по нормали к последней в этой точке и отнесенное к длине отрезка этой нормали, заключенного между точками ее пересечения с точной формой.

В заключение автор выражает глубокую благодарность М. А. Беляевой за проведенные вычисления, а также Н. Д. Копачевскому, А. Д. Мышкису и А. Д. Тюпцову за полезные замечания.

Поступило 6 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Charrueau A. Etude d'une masse liquide de revolution homogène, sans pesanteur et a tension superficielle, animée d'une rotation uniforme. Ann. Ecol-Norm. Super, 1926, p. 129—176.
2. Rosenthal D. K. The shape and stability of a bubble at the axis of a rotating liquid. J. Fluid Mech. 1962, vol 12, No 3.
3. Chandrasekhar S. The stability of a rotating liquid drop. Proc. Roy. Soc. A. 1965, vol 286, No 1404.