

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ТЯЖЕСТИ И ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

В. М. ПЕТРОВ, Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

(Москва)

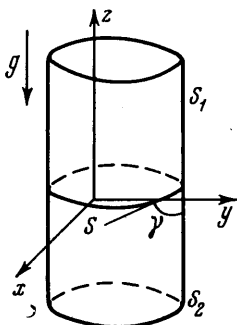
Задачи гидростатики и гидродинамики жидкости, подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения, представляют интерес в связи с изучением поведения жидкости в слабых гравитационных полях и в условиях невесомости. В данной работе рассматривается задача об определении формы равновесия жидкости в сосуде при наличии сил тяжести и поверхностного натяжения. Эта задача рассматривалась ранее для осесимметричных сосудов в работах [1²]. В работе [3] получено асимптотическое решение задачи равновесия жидкости в сосуде произвольной формы в том случае, когда силы тяжести велики по сравнению с силами поверхностного натяжения. Некоторые результаты по задаче равновесия содержатся в книге [4].

В данной работе используется вариационный подход к задаче равновесия [4⁵]. Доказываются некоторые свойства возникающей вариационной задачи, позволяющие использовать для ее решения прямые методы. Для численного решения задачи применяется метод локальных вариаций, предложенный в работе [5]. Этот метод позволяет получить решение для сосудов произвольной формы. Приводятся результаты расчетов для сосудов, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда.

1. Пусть неподвижный сосуд содержит две различные несжимаемые жидкости с плотностями ρ_1 , ρ_2 и находится в однородном постоянном поле массовых сил (например, сил тяжести) с ускорением g . Пусть α_i — коэффициент поверхностного натяжения на границе S_i стенок сосуда с i -ой жидкостью ($i = 1, 2$), α — коэффициент поверхностного натяжения на поверхности раздела двух жидкостей (фиг. 1). При отсутствии поверхностного натяжения ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 0$) поверхность раздела жидкостей в состоянии равновесия будет плоской. Примем эту плоскость за плоскость xy декартовой системы координат xyz , ось z направим против поля массовых сил.

Потенциальную энергию системы можно записать в виде [6]

$$U = \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g \iint_D z^2 dx dy + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha S \quad (1)$$



Фиг. 1

Здесь $z(x, y)$ — возвышение поверхности раздела над плоскостью xy , D — проекция поверхности S на эту плоскость. Жидкость 2 предполагается лежащей ниже поверхности S . Определение устойчивой формы равновесия жидкости $z(x, y)$ сводится к нахождению минимума функционала (1) при изопериметрическом условии, выражающем равенство объемов одной и той же жидкости при наличии и при отсутствии поверхностного натяжения [4, 6].

Примем для простоты, что стенки сосуда (по крайней мере, вблизи поверхности S раздела жидкостей) представляют собой цилиндрическую поверхность с вертикальными образующими. Тогда проекция D поверхности S на плоскость xy совпадает с сечением сосуда плоскостью xy и не зависит от функции $z(x, y)$. Функционал (1), с точностью до постоянного слагаемого, можно записать в виде

$$U = \iint_D \left[\frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g z^2 + \alpha \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \right] dx dy + (\alpha_2 - \alpha_1) \oint_{\Gamma} z dl \quad (2)$$

Здесь Γ — граница области D , индексы x, y обозначают частные производные. Перейдем к безразмерным переменным и введем обозначения

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad u = \frac{z}{l}, \quad \Pi = \frac{U}{\alpha l^2}, \quad \cos \gamma = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha}, \quad B = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g l^2}{\alpha} \quad (3)$$

через l обозначен характерный размер сосуда, γ — краевой угол (фиг. 1), B — безразмерное число Бонда. В переменных (3) функционал (2) переищется в виде

$$\Pi(u) = \iint_D \left(\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} + \frac{B}{2} u^2 \right) dx dy - \cos \gamma \oint_{\Gamma} u dl \quad (4)$$

Здесь переменные x', y' снова обозначены через x, y , а для сечения сосуда плоскостью x, y и для границы этого сечения сохранены прежние обозначения D, Γ .

Итак, задача сводится к нахождению функции $u(x, y)$, определенной и непрерывно дифференцируемой в области D , удовлетворяющей изопериметрическому условию

$$V(u) \equiv \iint_D u dx dy = 0 \quad (5)$$

и минимизирующей функционал Π из (4).

Условие (5) выражает равенство объемов жидкости 2 (а следовательно, и жидкости 1) при наличии и при отсутствии поверхностного натяжения. Функция u , удовлетворяющая перечисленным условиям, будет, как это следует из работ [4, 6], автоматически удовлетворять условию равенства краевого угла на стенке заданному значению γ .

Сформулированная изопериметрическая вариационная задача может быть сведена к нелинейной краевой задаче для уравнения Эйлера, выписанного для функционала (4). Для численного решения, однако, удобнее пользоваться непосредственно вариационной формулировкой задачи. Это позволит находить минимум (а не стационарное значение) функционала (4), т. е. определять сразу лишь устойчивые формы равновесия.

2. Изучим некоторые свойства поставленной вариационной задачи. Составим функционал ($\lambda = \text{const}$)

$$J(v) = \Pi(v) + \lambda V(v) = \iint_D \left(\sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} + \frac{B}{2} v^2 + \lambda v \right) dx dy - \cos \gamma \oint_{\Gamma} v u dl \quad (6)$$

Пусть функция $v(x, y)$ доставляет безусловный минимум функционалу $J(v)$. Условие (5) для функции v , вообще говоря, не выполнено: $V(v) = V_0 \neq 0$. Функция v , доставляющая функционалу J безусловный минимум, доставляет ему минимум также и при условии $V(v) = V_0$. Следовательно, она доставляет минимум, при этом же условии $V(v) = V_0$, также и функционалу $\Pi(v)$. Поэтому, минимизируя функционал J при различных λ , можно подобрать число λ так, чтобы было выполнено условие $V = V_0$ ($\lambda = 0$), и тем самым решить исходную изопериметрическую задачу. Этот прием целесообразно применять в случае, когда стенки сосуда не вертикальны. В рассматриваемом случае вертикальных стенок сосуда, можно избежать процесса перебора по параметру λ . Это следует из теоремы 1.

Теорема 1. Чтобы функция $u(x, y)$ доставляла функционалу $\Pi(u)$ из (4) минимум при условии (5) в случае $B > 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $v(x, y) = u + c$, где $c = (\Gamma \cos \gamma - \lambda D) / (BD)$, доставляла безусловный минимум функционалу $J(v)$ из (6) при любом постоянном λ . Здесь Γ — длина контура Γ , D — площадь области D .

Доказательство. Очевидно, каждой функции v , определенной в D , можно поставить во взаимно однозначное соответствие функцию u , для которой $V(u) = 0$, и число c так, что $v = u + c$. Поэтому

$$\min_v J(v) = \min_{u, c} J(u + c) = \min_u \min_c J(u + c)$$

Подставляя сюда выражение (6), после элементарных преобразований с использованием равенств (4), (5) получим

$$\begin{aligned} \min_v J(v) &= \min_u \min_c \left[\Pi(u) + BcV(u) + \frac{1}{2} Bc^2D + \lambda V(u) + \lambda cD - c\Gamma \cos \gamma \right] = \\ &= \min_u \Pi(u) + \min_c \left[\frac{1}{2} Bc^2D + c(\lambda D - \Gamma \cos \gamma) \right] \end{aligned}$$

При условии $B > 0$ вычислим минимум квадратичной формы по c

$$\min_v J(v) = \min_u \Pi(u) - \frac{(\lambda D - \Gamma \cos \gamma)^2}{2BD}, \quad c = \frac{\Gamma \cos \gamma - \lambda D}{BD} \quad (7)$$

Первая формула (7) показывает, что при $B > 0$ безусловный минимум функционала J по v достигается одновременно с минимумом Π по u . Теорема 1 доказана.

Таким образом, достаточно один раз (при любом λ) решить задачу минимизации $J(v)$, после чего решение исходной изопериметрической задачи определится формулой $u = v - c$, где c определено второй формулой (7). Если же принять $\lambda = \Gamma \cos \gamma / D$, то получим $c = 0$, $u = v$. Отметим, что при $B \leq 0$ соотношение (7) не имеет места, и описанный прием (минимизация функционала J без условия (5)) неприменим. Смысл этого приема весьма прост: в цилиндрических сосудах равновесную форму поверхности раздела жидкостей можно передвигать по вертикали на постоянную величину.

Теорема 2. При любых постоянных $B > 0$, γ и λ функционал $J(v)$ ограничен снизу константой, зависящей лишь от этих постоянных и от области D .

Доказательство. Будем проводить в предположении, что граница Γ области D достаточно гладкая (для контура с угловыми точками доказательство усложняется). Пусть $a(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая в области D вектор-функция, удовлетворяющая неравенству и граничному условию

$$|a| \leq 1 \text{ в } D, \quad a = n \cos \gamma \text{ на } \Gamma \quad (8)$$

Здесь n — единичный вектор внешней нормали к контуру. Условия (8) определяют функцию a не единственным образом; докажем существование хотя бы одной такой функции. Для этого положим $\Delta a = 0$ в D . Функция a тогда определяется однозначно как гармоническая в D , вектор-функция, удовлетворяющая условию Дирихле на контуре Γ (второе условие (8)). Докажем, что эта функция a будет удовлетворять также первому условию (8). Для этого вычислим, пользуясь формулами векторного анализа и уравнениями $\Delta a_x = \Delta a_y = 0$ для компонент a_x, a_y вектора a , следующее выражение:

$$\Delta a^2 = \Delta (a_x^2 + a_y^2) = 2 \operatorname{div} (a_x \nabla a_x + a_y \nabla a_y) = 2 (a_x \Delta a_x + a_y \Delta a_y) + \\ + 2 [(\nabla a_x)^2 + (\nabla a_y)^2] = 2 [(\nabla a_x)^2 + (\nabla a_y)^2] \geq 0$$

Следовательно $a^2(x, y)$ — субгармоническая в D функция ($\Delta a^2 \geq 0$), и ее максимум достигается [7] на границе Γ области D , но, согласно (8), $a^2 = \cos^2 \gamma \leq 1$ на Γ , и поэтому $a^2 \leq 1$ и $|a| \leq 1$ всюду в D . Таким образом, показано существование вектора a , удовлетворяющего условиям (8).

Теперь, учитывая (8), имеем

$$\sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} > |\nabla v| \geq a \nabla v$$

Подставим это неравенство в (6) и выполним преобразования, пользуясь теоремами векторного анализа и вторым условием (8)

$$J(v) > \iint_D (a \nabla v + \frac{1}{2} B v^2 + \lambda v) dx dy - \cos \gamma \int_{\Gamma} v dl = \\ = \iint_D [\operatorname{div} (av) - v \operatorname{div} a + \frac{1}{2} B v^2 + \lambda v] dx dy - \cos \gamma \int_{\Gamma} v dl = \\ = \iint_D [\frac{1}{2} B v^2 + (\lambda - \operatorname{div} a) v] dx dy \quad (9)$$

Так как a — непрерывно дифференцируемая функция, то $|\operatorname{div} a| \leq M$ в D , где постоянная M зависит лишь от угла γ и области D . Поэтому неравенство (9) перепишется в виде

$$J(v) > \iint_D [\frac{1}{2} B v^2 - (|\lambda| + M) |v|] dx dy = \\ = \iint_D \left(\frac{\sqrt{B} |v|}{\sqrt{2}} - \frac{(|\lambda| + M)^2}{\sqrt{2B}} - \frac{(|\lambda| + M)^2}{2B} \right) dx dy \geq - \frac{(|\lambda| + M)^2}{2B} D > -\infty$$

Теорема 2 доказана. Эта теорема обеспечивает существование нижней грани функционала (6) и служит обоснованием для возможности применения прямых методов минимизации.

Итак, исходная задача (4), (5) при $B > 0$ может быть заменена задачей определения безусловного минимума функционала (6). Случай $B > 0$, как следует из (3), означает $\rho_2 > \rho_1$, т. е. сверху находится более легкая жидкость (в частности, при $\rho_1 = 0$ — газ). В случае невесомости имеем $B = 0$.

3. Минимизация функционала (6) при $B > 0$ проводилась по методу локальных вариаций [5]. Опишем схему алгоритма для области D в виде единичного квадрата $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Разобьем область D на ячейки прямыми $x = i \Delta x, y = j \Delta y$, где $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$ ($m, n > 1$), $\Delta x = 1/m, \Delta y = 1/n$. Обозначим через P_{ij} точку с координатами $x_i = i \Delta x, y_j = j \Delta y$ и положим $v_{ij} = v(x_i, y_j)$. Тогда функционал (6) можно приближенно заменить суммой

$$J = \sum J_{ij} + \sum K_{ij} \quad (10)$$

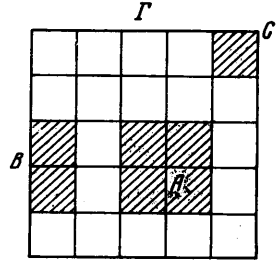
Первая сумма в (10) аппроксимирует интеграл по области D , а вторая — интеграл по контуру Γ в формуле (6).

Здесь J_{ij} — интегралы по всем ячейкам, на которые разбит квадрат D . Эти интегралы приближенно равны

$$\begin{aligned}
 J_{ij} &= \Delta x \Delta y (\sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} + 1/2 B v^2 + \lambda v) \\
 v &= (v_{ij} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1})/4 \\
 v_x &= (v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j} - v_{i,j+1} - v_{ij})/(2\Delta x) \\
 v_y &= (v_{i+1,j+1} + v_{i,j+1} - v_{ij} - v_{i+1,j})/2\Delta y \\
 (i &= 0, 1, \dots, m-1; j = 0, 1, \dots, n-1)
 \end{aligned}$$

Слагаемые K_{ij} в (10) приближенно представляют интегралы по отрезкам, принадлежащим границе квадрата

$$\begin{aligned}
 K_{ij} &= \begin{cases} -1/2 \Delta x (v_{ij} + v_{i+1j}) \cos \gamma \\ -1/2 \Delta y (v_{ij} + v_{ii+1}) \cos \gamma \end{cases} \\
 (j &= 0, n; i = 0, 1, \dots, m-1) \\
 (i &= 0, m; j = 0, 1, \dots, n-1)
 \end{aligned}$$



Фиг. 2

Легко видеть, что изменение в одной внутренней точке области D (при $0 < i < m, 0 < j < n$) приводит к изменению четырех слагаемых J_{ij} в сумме (10), соответствующих ячейкам, вершиной которой является данная точка (см. заштрихованные ячейки вокруг точки A на фиг. 2).

При изменении v в граничной точке (точка B на фиг. 2) изменяются два слагаемых J_{ij} и два слагаемых K_{ij} в сумме (10), а при изменении v в угловой точке (точка C на фиг. 3) изменяется одно слагаемое J_{ij} и два слагаемых K_{ij} . Зададимся произвольным начальным приближением для чисел v_{ij} при $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$ и выберем достаточно малый шаг варьирования h . Затем в каком-либо порядке будем последовательно варьировать значения v_{ij} во всех точках области $D \rightarrow \Gamma$. Если при замене v_{ij} на $v_{ij} \pm h$ окажется, что сумма тех слагаемых в (10), которые зависят от v_{ij} , уменьшается, то полагаем $v = v_{ij} + h$ в точке P_{ij} . В противном случае аналогично проверяется значение $v_{ij} - h$. Если обе вариации не уменьшают суммы (10), то оставляем старое значение $v = v_{ij}$. Одна итерация заканчивается, когда таким образом просматриваются все точки P_{ij} . После этого процесс повторяется.

Если от итерации к итерации функционал J не уменьшается, то можно уменьшить (например, вдвое) шаг варьирования h . Если и при достаточно малом h функционал не убывает, то можно увеличить числа m, n вдвое, одновременно уменьшив вдвое размеры ячеек $\Delta x, \Delta y$. Во вновь полученных точках P_{ij} значения функции v находим посредством интерполяции по соседним точкам. После этого снова продолжаем итерации, постепенно уменьшая h . Процесс варьирования оканчивается, когда числа $\Delta x, \Delta y$ и h достаточно малы ($h \ll \Delta x, h \ll \Delta y$), а дальнейшее варьирование уже не изменяет функционал. Очевидно, функционал J в ходе итераций монотонно убывает.

Описанный алгоритм метода локальных вариаций реализован для общего случая в виде стандартной программы на ЭВМ в Вычислительном центре АН СССР. Подробное его описание, а также данные о сходимости метода приведены в работе [8].

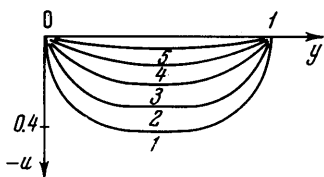
4. По указанному алгоритму были проведены расчеты формы равновесия жидкости в сосуде для области D в виде квадрата $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ и прямоугольника $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$. В функционале (6) принималось $\lambda = 0$, а решение u выражалось через v по формуле $u = v - c$, где c определено формулой (7). Начальное приближение задавалось в виде $u = 0$. Минимальный шаг варьирования h составлял $\sim 10^{-7}$, а максимальные числа n, m равнялись $n = m = 20$ (область D делилась на 400 ячеек).

При $B = 10$ расчет для квадрата был проведен при различных значениях краевого угла. На фиг. 3 представлены сечения полученных поверхностей $u(x, y)$ плоскостью симметрии $x = 1/2$. Здесь кривые 1—5 соответствуют углам $\gamma = 0, 20, 40, 60, 80^\circ$, причем меньшим значениям γ отвечают кривые, расположенные ниже.

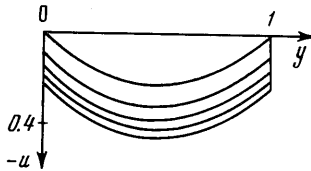
Для наглядности эти кривые смещены по вертикали так, чтобы их концы совпадали. Отметим, что при $\gamma > \pi/2$ решение получится путем зеркального отображения решения при $\gamma = \pi - \gamma$ относительно горизонтальной плоскости. При $\gamma \leq 45^\circ$ точное решение имеет особенности: оно неограничено вблизи углов контура Γ (на это обратил внимание А. Д. Тюпцов). Численное решение ограничено, но приближенно передает характер особенностей.

На фиг. 4 даны сечения плоскостями $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$ одной и той же свободной поверхности, рассчитанной для квадрата при $B = 2$ и $\gamma = 60^\circ$ (большим значениям x отвечают кривые, расположенные ниже; на фигуре допущена неточность: вместо указанного в масштабе значения 0.4 должно быть 0.3)

Зависимость решения $u(x, y)$ от числа Бонда иллюстрируется фиг. 5, где даны сечения полученных поверхностей $u(x, y)$ плоскостью $x = 1/2$. Для всех кривых фиг. 5 краевой угол γ равен 60° , а концы этих кривых снова совмещены за счет сдвига по вертикали. Фиг. 5а соответствует области D в виде единичного квадрата, а фиг. 5б — области D в виде прямоугольника. Кривые фиг. 5а отвечают числам Бонда $B = 200, 40, 4, 1, 0.1$, а кривые фиг. 5б — числам Бонда $B = 20, 4, 1$ (меньшим числам Бонда соответствуют кривые, расположенные ниже). Из фиг. 5 видно, что при $B \gg 1$ решение



Фиг. 3



Фиг. 4

вблизи стенок носит характер функций типа пограничного слоя, т. е. функция $u(x, y)$ отличается от постоянной только в некоторой узкой области, прилегающей к контуру Γ . Этот факт согласуется с результатами работы [3]. Численное сравнение показало также количественное согласие результатов проведенных расчетов с результатами работы [3] при $B \gg 1$.



Фиг. 5

При уменьшении числа B прогиб свободной поверхности растет, причем при $B = 1$ и $B = 0.1$ свободные поверхности очень близки одна к другой. Это означает, что с уменьшением B равновесная свободная поверхность довольно быстро стремится к форме равновесия в условиях невесомости ($B = 0$) и мало отличается от нее даже при сравнительно больших B .

Отметим, что алгоритм метода локальных вариаций может быть применен для расчета равновесия жидкости в сосуде произвольной формы.

Поступило 9 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляева М. А., Мышкис А. Д., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
2. Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1966, № 2.
3. Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
4. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Изд-во «Наука», 1965.
5. Черноусько Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. Ж. вычислит. матем. и матем. физики, 1965, т. 5, № 4.
6. Петров А. А. Вариационная формулировка задачи о движении жидкости в сосуде конечных размеров. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4, Физматгиз, 1958.
8. Баничук Н. В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций. Ж. вычислит. матем. и матем. физики, 1966, т. 6, № 6.