ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА КЛИНЕ

Б. И. СЕБЕКИН

(Москва)

В работе изучается дифракция поверхностных волн на клине с углом $\pi\,(2-n\,/\,m)$, где n и m — натуральные числа и $n\,/\,m \leqslant 2$. Бесконечно глубокая тяжелая жидкость считается идеальной. Рассматриваются два случая: 1) внутри жидкости находится источник, периодически действующий с частотой σ и максимальной мощностью Q; 2) в некоторой точке поверхности жидкости в начальный момент времени имеется концентрированное возвышение объема S.

Для обоих случаев получено точное решение и произведены асимптотические оценки.

§ 1. **Дифракция волн, образуемых периодически действующим источником.** Вертикальный клин погружен в бесконечно глубокую идеальную тяжелую жидкость. Ребро клина совпадает с осью Oz, одна из граней — с плоскостью xOz (фиг. 1). Жидкость занимает пространство вне клина $z \leqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant n\pi\,/\,m$, где n и m — натуральные числа такие, что $n\,/\,m \leqslant 2$. Угол θ отсчитывается от оси x. Поверхность невозмущенной жидкости расположена в плоскости xy. Под поверхностью жидкости в точке с цилиндрическими координатами $A\,(r', \alpha, -h)$ находится источник, периодически действующий с частотой σ и максимальной мощностью Q. Требуется определить вид взволнованной поверхности. Вводим потенциал скоростей в форме

$$\varphi(r,\theta,z)\,e^{i\sigma t}, \qquad \Delta\varphi = 0, \qquad (z \leqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant n\pi\,/\,m) \tag{1.1}$$

Условие на свободной поверхности

$$\varphi = (g/\sigma^2)\,\partial\varphi\,/\,\partial z \quad \text{при } z = 0 \tag{1.2}$$

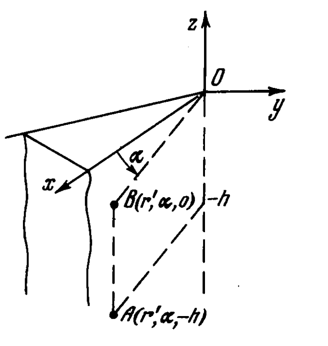
Условие на твердой стенке

$$\partial\varphi/\partial\theta = 0 \qquad \text{при } \theta = 0,\ \theta = \frac{n\pi}{m}$$

Кроме того, потенциал должен стремиться к нулю при $z \to -\infty$ и иметь в точке $A\,(r', \alpha, -h)$ особенность вида

$$Q\,/\,4\pi R, \qquad R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\alpha-\theta) + (z+h)^2$$

Эта задача для случая полуплоскости ($n = 2$, $m = 1$) была решена С. С. Войтом в работе [1]. Позднее Левин [2] получил формулы, указанные С. С. Войтом, другим способом. В работе [3] Вильямс, следуя Левину, изучал дифракцию на цилиндре волн, образованных периодически действующим источником. Он показал связь асимптотики решения с решением задачи о электромагнитной дифракции и привел без вывода асимптотическую оценку дифракционного вклада при дифракции на клине с углом $m\pi$.



Фиг. 1

Следуя работе [1], будем искать функцию $\varphi\,(r,\theta,z)$ в виде

$$\varphi(r,\theta,k) = \frac{Q}{4\pi}\left[\int_0^\infty \exp\left[-k(z+h)\right]\psi(r,\theta,k)\,dk - \int_0^\infty \exp\left[-k(h-z)\right]\frac{1+gk/\sigma^2}{1-gk/\sigma^2}\,\psi(r,\theta,k)\,dk\right] \tag{1.3}$$

Эта формула определяет потенциал выше поверхности $z = -h$, для пространства ниже этой поверхности у аргументов показательных функций достаточно сменить знак на обратный. Выражение (1.3) удовлетворяет условию на свободной поверхности (1.2). Подставив (1.3) в (1.1), получим, что для решения поставленной задачи функция $\psi\,(r,\theta,k)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + k^2\psi = 0 \tag{1.4}$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \qquad \theta = \frac{n\pi}{m} \tag{1.5}$$

Следуя А. Зоммерфельду [4], совершим $2m-1$ зеркальных отражений пространства, заполненного жидкостью, в гранях клина. В результате этого все пространство будет заполнено n раз. Координаты источника и его изображений определяются по формуле $\varkappa_l = 2\pi l n / m \mp \alpha$ ($l = 0, \ldots, m-1$). Решение уравнения (1.4) с граничными условиями (1.5) получается сложением $2m$ комплексных разветвленных решений уравнения (1.4), имеющих вид

$$U_l = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{(C)} \frac{\exp(i\beta/n)}{\exp(i\beta/n) - \exp(i\varkappa_l/n)} J_0(kR_\beta)\,d\beta$$

Здесь $J_0(kR_\beta)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Интегрирование производится в комплексной плоскости β по петлям (C), изображенным на фиг. 2.

После преобразований решение (1.4) с граничными условиями (1.5) представляется в виде

$$\psi(r, \theta, k) = \sum J_0(kR_l) + V(r, \theta, k) \tag{1.6}$$

в сумму входят слагаемые, для которых выполнено

$$\theta - \pi < \varkappa_l < \theta + \pi \tag{1.7}$$

$$V(r, \theta, k) = -\frac{m\sin m\pi/n}{2n\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[F\left(\frac{m(\alpha+\theta)}{n}, \frac{m\eta}{n}\right) + F\left(\frac{m(\alpha-\theta)}{n}, \frac{m\eta}{n}\right)\right] J_0(kR_\eta)\,d\eta \tag{1.8}$$

где

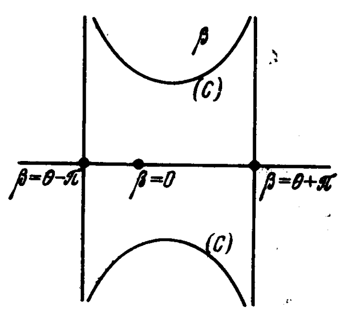
$$F(\omega, \tau) = \frac{\operatorname{ch}\tau\cos\omega - \cos m\pi/n}{(\operatorname{ch}\tau\cos\omega - \cos m\pi/n)^2 + \operatorname{sh}^2\tau\sin^2\omega} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} R_\beta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\beta-\theta), \qquad & R_\eta^2 &= r^2 + r'^2 + 2\operatorname{ch}\eta \\ R_l^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varkappa_l - \theta), \qquad & (l &= 0, \ldots, m-1) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Отметим, что решение уравнения (1.4) при граничных условиях (1.5) можно получить иначе. Формула

$$U^*(\chi) = \frac{m}{2n\pi}\int\limits_{(C)} \frac{\exp(im\beta/n)}{\exp(im\beta/n) - \exp(im\chi/n)} J_0(kR_\beta)\,d\beta$$

дает периодическое решение уравнения (1.4) с периодом $2n\pi/m$. Построив зеркальное отражение источника, находящегося в точке (r', α), относительно биссектрисы угла, равного $2n\pi/m$, получим решение уравнения (1.4) при граничных условиях (1.5) в виде $\psi(r, \theta, k) = U^*(\alpha) + U^*(-\alpha)$. После преобразований этой формулы вновь придем к выражению (1.6).



Фиг. 2

Возвращаясь к выражению для потенциала скоростей (1.3) и подставляя в него формулы (1.6), (1.8) и (1.9), получим точное решение поставленной задачи.

Пользуясь зависимостью между возвышением свободной поверхности жидкости и потенциалом скоростей

$$\zeta = \frac{i\sigma}{g}\varphi(r, \theta, 0)e^{i\sigma t}$$

находим, что возвышение свободной поверхности жидкости можно представить в виде

$$\zeta = \sum \zeta_l + \zeta_d$$

В сумму входят ζ_l, для которых выполняется (1.7). Эти слагаемые определяют возвышение свободной поверхности, обязанное падающей и отраженным волнам, а ζ_d определяет возвышение свободной поверхности, обязанное дифракции

$$\zeta_l = \frac{iQ\sigma^3}{2\pi g^2}e^{i\sigma t}\int\limits_0^\infty g_l(\xi)\,d\xi \tag{1.11}$$

где

$$g_q(\xi) = \frac{\xi}{\xi - 1} \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\xi\right) J_0\left(\frac{\sigma^2}{g} R_q \xi\right) \tag{1.12}$$

$$\zeta_d = -\frac{iQ\sigma^3 m \sin m\pi / n}{4\pi^2 g^2 n} e^{i\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F\left(\frac{m(\alpha+\theta)}{n}, \frac{m\eta}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + F\left(\frac{m(\alpha-\theta)}{n}, \frac{m\eta}{n}\right)\right] d\eta \int_0^{\infty} g_\eta(\xi)\, d\xi \tag{1.13}$$

Здесь R_l и R_η определяются формулой (1.10), а $F(\omega, \tau)$ — (1.9). Полюс подынтегральной функции $\xi = 1$ обходится по полуокружности малого радиуса, лежащей в верхней полуплоскости. При таком выборе пути интегрирования выполняется условие излучения.

Асимптотический анализ выражения (1.11) был произведен в работе [1]

$$\int_0^{\infty} g_l(\xi)\, d\xi = -\frac{i}{\sigma}\left(\frac{2\pi g}{R_l}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\right) \exp\left[-i\left(\frac{\sigma^2}{g} R_l - \frac{\pi}{4}\right)\right] + O\left[\left(\frac{\sigma^2}{g} R_l\right)^{-2}\right]$$

Здесь безразмерный параметр $\sigma^2 R_l / g$ считается большим. Поэтому для областей, достаточно удаленных от источника и его зеркальных отражений, возвышение свободной поверхности жидкости, обязанное падающей или отраженной волне, представляется в виде

$$\zeta_l = \frac{Q\sigma^2}{g\sqrt{2\pi g R_l}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 n}{g}\right) \exp\left[i\left(\sigma t + \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma^2}{g} R_l\right)\right] + O\left[\left(\frac{\sigma^2}{g} R_l\right)^{-2}\right]$$

Считая большим безразмерный параметр $\sigma^2 r_0 / g$, где r_0 — нижняя грань величин r и r', и воспользовавшись тем, что $\sigma^2 r_0 / g < \sigma^2 R_\eta / g$, получим

$$\int_0^{\infty} g_\eta(\xi)\, d\xi = -\frac{i}{\sigma}\left(\frac{2\pi g}{R_\eta}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\right) \exp\left[-i\left(\frac{\sigma^2}{g} R_l - \frac{\pi}{4}\right)\right] + O\left[\left(\frac{\sigma^2 r_0}{g}\right)^{-2}\right]$$

Здесь $g_\eta(\xi)$ определяется формулой (1.12). Подставляя это выражение в (1.13) и применяя к полученному интегралу метод стационарной фазы, находим, что для областей, достаточно удаленных от начала координат, и для углов θ, не близких к $\pi \mp \alpha + 2\pi l n / m$, $(l = 0, \ldots, m-1)$, возвышение свободной поверхности жидкости выражается формулой

$$\zeta_d = -\frac{Q\sigma m \sin m\pi / n}{n\pi g\sqrt{rr'}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 h}{g}\right) \exp\left\{i\sigma\left[t - \frac{\sigma(r+r')}{g}\right]\right\} \times$$

$$\times \frac{\cos m\alpha / n \cos m\theta / n - \cos m\pi / n}{[\cos(\alpha-\theta) m / n - \cos m\pi / n]\,[\cos(\alpha+\theta) m / n - \cos m\pi / n]} + O\left[\left(\frac{\sigma^2 r_0}{g}\right)^{-3/2}\right]$$

Если $m / n = l$ $(l = 1, 2, 3, \ldots)$, то дифракционный вклад отсутствует. Это соответствует случаю, когда все зеркальные отражения источника находятся вне жидкости. Убывание амплитуды дифрагированной волны определяется квадратным корнем из произведения расстояния от начала координат до точки наблюдения и до источника, а фаза — суммой этих расстояний.

§ 2. Дифракция волн в задаче Коши — Пуассона. Пусть в точке $B(r', \alpha, 0)$ (фиг. 1) образовалось концентрированное начальное возвышение объема S. Изучим, как и в предыдущем параграфе, дифракцию волн на клине. Для случая дифракции на полуплоскости $(m = 1,\ n = 2)$ задача была решена Л. Н. Сретенским [5]. Следуя этой работе, будем искать потенциал скоростей в виде

$$\varphi(r, \theta, z, t) = \frac{gS}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{kz} \psi(r, \theta, k)\, k dk, \qquad \sigma^2 = gk \tag{2.1}$$

Выражение (2.1) удовлетворяет условию на свободной поверхности (1.2). Подставив (2.1) в уравнение (1.1), получим, что для решения задачи функция $\psi(r, \theta, k)$ должна удовлетворять уравнению (1.4) при граничных условиях (1.5). Решение уравнения (1.4) при граничных условиях (1.5) определяется формулами (1.6) и (1.8). Подставляя эти формулы в выражение (2.1), получаем потенциал скоростей в форме

$$\varphi = \sum \frac{gS}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{kz} J_0(kR_l)\, k dk - \frac{gSm \sin m\pi / n}{4\pi^2 n} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{kz}\, k dk \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left[F\left(\frac{m(\alpha+\theta)}{n}, \frac{m\eta}{n}\right) + F\left(\frac{m(\alpha-\theta)}{n}, \frac{m\eta}{n}\right)\right] J_0(kR_\eta)\, d\eta \tag{2.2}$$

В сумму входят слагаемые, для которых выполняется (1.7), функция $F(\omega, \tau)$ определяется формулой (1.9), R_l и R_η — выражением (1.10) и $\sigma^2 = gk$.

Выражение (2.2) является точным решением поставленной задачи. Первый интеграл соответствует падающей и отраженным волнам, второй — дифрагированной волне. Из асимптотического исследования выражения (2.2) следует, что возвышение свободной поверхности жидкости, обязанное падающей или отраженным волнам, можно представить в виде

$$\zeta_l = \frac{Sgt^2}{4\pi \sqrt{2}\, R_l^3} \cos \frac{gt^2}{4R_l} + O\left[\left(\frac{gt^2}{R_l}\right)^{-2}\right]$$

Эта формула справедлива для областей, достаточно удаленных от источника и его зеркальных отражений. За большой параметр принята величина gt^2 / R_l. Для областей, достаточно удаленных от начала координат и углов θ, не близких к $\pi \mp \alpha + 2n\pi l / m$ $(l = 0, \ldots, m-1)$, возвышение свободной поверхности жидкости, обязанное дифракции, представляется в виде

$$\xi_d = -\frac{Sm \sin m\pi / n}{2n\pi} \left(\frac{gt^2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(r+r')\sqrt{rr'(r+r')}} \cos\left[\frac{gt^2}{4(r+r')} - \frac{\pi}{4}\right] \times$$

$$\times \frac{\cos m\alpha / n \cos m\theta / n - \cos m\pi / n}{[\cos(\alpha-\theta) m / n - \cos m\pi / n][\cos(\alpha+\theta) m / n - \cos m\pi / n]} + O\left[\left(\frac{gt^2}{\sqrt{2rr'}}\right)^{-3/2}\right] \tag{2.3}$$

Здесь за большой параметр принята величина $gt^2 / \sqrt{2rr'}$. При $n = 2$, $m = 1$ выражение (2.3) совпадает с формулой, полученной Л. Н. Сретенским в работе [5].

Автор благодарит С. С. Войта за руководство и помощь при выполнении настоящей работы.

Поступило 17 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Войт С. С. Дифракция от полуплоскости волн, образуемых на поверхности жидкости периодически действующим источником. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
2. Levine H. Diffraction of surface waves on an imcompressible fluid. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, p. 2.
3. Williams W. E. Diffraction of surface waves on an imcompressible fluid. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, p. 2.
4. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ч. 2, ОНТИ, 1937.
5. Сретенский Л. Н. Дифракция волн в задаче Коши—Пуассона. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 1.