

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛОПАТОК В РЕШЕТКЕ ПРИ МАЛОЙ РАССТРОЙКЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

В. Б. КУРЗИН (Новосибирск)

Теоретические исследования колебаний лопаток осевых турбомашин в потоке обычно ограничиваются случаем идентичных лопаток. Этот случай рассматривается, например, в работах [1, 2], посвященных определению критической скорости флаттера лопаток. Между тем в действительности собственные частоты колебаний лопаток всегда различны между собой вследствие неточностей при их изготовлении. Возникает вопрос, каким образом расстройка собственных частот лопаток влияет на условие устойчивости их колебаний в потоке. В работе показано, что в рассматриваемом случае система будет не менее устойчива, чем та же система без расстройки частот.

Рассмотрим колебания лопаток кольцевой решетки в потоке. Введем следующие допущения.

1. Механическая связь между лопатками отсутствует.
2. Инерционные и упругие силы значительно превышают аэродинамические силы.
3. Каждая лопатка колеблется с одной степенью свободы, и вся решетка рассматривается с N степенями свободы, равными числу лопаток решетки.

Предположим далее, что собственные частоты лопаток в пустоте имеют малую расстройку. А именно, собственная частота n -й лопатки

$$\omega_n = \omega + \Delta\omega_n \quad (|\Delta\omega_n| \ll \omega, \quad n = 1, \dots, N)$$

Здесь ω — некоторое среднее значение собственной частоты для всех лопаток системы, $\Delta\omega_n$ — величина расстройки частоты для n -й лопатки. Тогда уравнения движения рассматриваемой системы лопаток можно записать в виде

$$\ddot{y}_n + (\omega + \Delta\omega_n)^2 y_n = \frac{1}{m} F_n \quad (1)$$

Здесь y_n — обобщенная деформация n -й лопатки, F_n — обобщенная аэродинамическая сила, действующая на n -ю лопатку, m — обобщенная масса при соответствующей форме колебаний лопатки. Аэродинамическую силу представим в виде [3]

$$F_n = \frac{1}{2} \rho U^2 b \sum_{m=1}^N l_{m-n} y_m \quad (2)$$

Здесь ρ , U — соответственно, плотность и скорость потока, b — хорда профиля лопатки, l_{m-n} — аэродинамические коэффициенты влияния, определяющие аэродинамическую силу, действующую на n -ю лопатку при колебаниях m -й лопатки. В случае кольцевой решетки коэффициенты влияния обладают свойством цикличности, т. е.

$$l_{m-n} = l_{N+m-n}$$

При исследовании колебаний лопаток кольцевых решеток такое представление аэродинамических сил было применено Спори [1].

Из принятых допущений следует, что частоты колебаний лопаток в потоке ω_n^* будут мало отличаться от величины ω . На основании известных зависимостей аэродинамических сил от частоты колебаний с точностью до величин более высокого порядка малости можно привести $l_{m-n}(\omega_n^*) = l_{m-n}(\omega)$. Наконец, как обычно в подобных задачах, приняли, что коэффициенты аэродинамических сил в общем случае колебаний профилей мало отличаются от соответствующих коэффициентов для случая установившихся колебаний. В результате упрощенный уравнения (1) приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y_n'' + (\omega + \Delta\omega_n)^2 y_n = \frac{1}{2m} \rho V^2 b \sum_{m=1}^N l_{m-n}(\omega) y_m \quad (3)$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} kl_0 - \lambda^2 - \Omega_1^2 & kl_1 & kl_2 \dots & kl_{N-1} \\ kl_{N-1} & kl_0 - \lambda^2 - \Omega_2^2 & kl_1 \dots & kl_{N-2} \\ kl_{N-2} & kl_{N-1} & kl_0 - \lambda^2 - \Omega_3^2 & \dots kl_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ kl_1 & kl_2 & kl_3 \dots & kl_0 - \lambda^2 - \Omega_N^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

$$k = \rho U^2 b / 2m, \quad \Omega_i = \omega + \Delta\omega_i$$

В индексах l_j ($j = 1, 2, \dots, N$) учтена цикличность коэффициентов влияния.

Разделим все элементы характеристического определителя на k и представим диагональные элементы в виде

$$d_{jj} = l_0 - r_j - \lambda^* \quad (\lambda^* = (\lambda^2 + \omega^2) / k, \quad r_j = 2\Delta\omega_j\omega / k) \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) примет более простой вид

$$D(\lambda^*) = \begin{vmatrix} l_0 - r_1 - \lambda^* & l_1 & l_2 & \dots & l_{N-1} \\ l_{N-1} & l_0 - r_2 - \lambda^* & l_1 & \dots & l_{N-2} \\ l_{N-2} & l_{N-1} & l_0 - r_3 - \lambda^* & \dots & l_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_0 - r_N - \lambda^* \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Каждому корню λ_j^* уравнения (6) соответствуют, вообще говоря, два значения $\lambda_j = \pm (-\omega^2 + k\lambda_j^*)^{1/2} \approx \pm i\omega(1 - k\lambda_j^*/2\omega^2)$. Однако из них следует учитывать лишь положительный корень, так как предполагается, что аэродинамические коэффициенты влияния в (6) получены для колебаний лопаток по закону $y = y_0 \exp(i\omega t)$.

Представим корни уравнения (6) в виде $\lambda_j^* = \alpha_j + i\beta_j$

$$\lambda_j = i(\omega - k\alpha_j/2\omega) + k\beta_j/2\omega$$

Ясно, что устойчивость рассматриваемой системы характеризует мнимая часть корней уравнения (6). Представляет интерес исследование вопроса, как зависят значения β_j от параметров r_n , иными словами, каким образом устойчивость системы зависит от расстройки собственных частот лопаток.

В простейшем случае, когда все $r_n = 0$ определитель $D(\lambda^*)$ становится циклическим

$$D(\lambda^*) = \prod_{m=1}^N \left[\lambda^* - \sum_{n=0}^{N-1} l_n \exp\left(\frac{i2\pi mn}{N}\right) \right] = 0 \quad (7)$$

Корни уравнения (6) в этом случае совпадают со значениями коэффициентов подъемной силы, действующей на лопатки при колебаниях их с постоянными амплитудами и постоянным сдвигом фаз $\alpha = 2\pi m/N$. Таким образом, для устойчивости системы без расстройки необходимо, чтобы мнимая часть аэродинамических сил при колебаниях лопаток с одинаковыми амплитудами и постоянным сдвигом фаз между колебаниями соседних профилей α была отрицательна при всех α . Замечателен тот факт, что этот критерий может быть распространен и на случай, когда лопатки могут иметь произвольную малую расстройку собственных частот. Нетрудно показать, что мнимые части корней уравнения (6) в общем случае заключены между наименьшим и наибольшим значениями корней уравнения (6), соответствующих случаю, когда все $r_n = 0$.

Для доказательства этого факта воспользуемся теоремой Бендиксона [4]. По этой теореме мнимые части корней уравнения (6) в общем случае заключены между наименьшим и наибольшим характеристическими числами матрицы $S = (A - A^*)/2i$, где A — матрица, для которой $D(\lambda^*) = 0$ является характеристическим уравнением; A^* — матрица, эрмитово сопряженная к A . Рассмотрим элементы S_{mn} матрицы S :

$$S_{mn} = \frac{1}{2i}(l_0 - r_n - l_0 + r_n) = \text{Im} l_0 \quad (m = n)$$

$$S_{mn} = \frac{1}{2i}(l_{m-n} - l_{N+m-n}) \quad (m \neq n)$$

Здесь l_j — величина, комплексно сопряженная к l_j . Учитывая цикличность коэффициентов влияния l_j , получим

$$S_{mn} = \frac{1}{2i}(l_{n-m} - l_{n-m}) \quad (m \neq n)$$

Нетрудно заметить, что элементы S_{mn} матрицы S также обладают свойством цикличности; ее характеристические числа определяются из простых соотношений

$$\lambda_n = \text{Im} l_0 + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{N-1} (l_j - l_j) \exp \frac{i2\pi nj}{N} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

Воспользовавшись свойством цикличности, отрицательные члены суммы выражения (8) преобразуем следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{N-1} \bar{l}_j \exp\left(\frac{i2\pi nj}{N}\right) = \sum_{j=1}^{N-1} l_j \exp\left(\frac{-i2\pi nj}{N}\right) = \sum_{j=1}^{N-1} l_j \exp\frac{i2\pi nj}{N}$$

Подставив это соотношение в выражение (8), получим

$$\lambda_n = \text{Im} \sum_{j=0}^{N-1} l_j \exp \frac{i2\pi r j}{N}$$

Таким образом, характеристические числа матрицы S совпадают с мнимыми частями корней уравнения (7), что и доказывает наше утверждение.

Итак, кольцевая решетка лопаток турбомашин, имеющих малую расстройку собственных частот, динамически не менее устойчива в потоке, чем та же решетка без расстройки. Следует отметить, что этот факт неоднократно наблюдался на практике.

Поступило 16 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Shioiri. Non stall normal mode flutter in annular cascade. Trans. Japan Soc. Aeronaut. Engrs, 1958, vol. I, No 1
2. Lane F. System mode shapes in flutter of compressor blade rows, JAS, 1956, No 1.
3. Курзин В. Б. К расчету сил при произвольных малых колебаниях профилей в решетке. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 2.
4. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применения. Изд-во иностр. литер., 1960.

О ПОТЕРЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Л. Х. БЛЮМИНА, К. К. ФЕДЯЕВСКИЙ

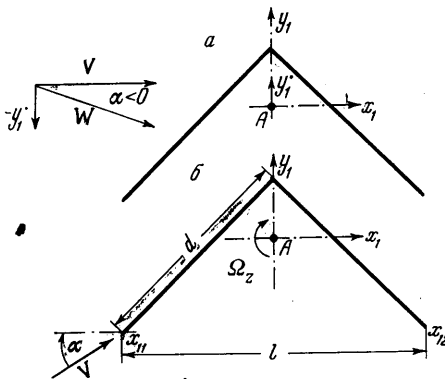
(Москва)

Многие инженерные сооружения имеют тенденцию к аэродинамической неустойчивости, вызванную тем, что элементы сооружения имеют плохо обтекаемую форму, которая способствует отрыву потока. Однако лишь немногие из этих конструкций колеблются под действием ветра, так как они, как правило, обладают значительным демпфированием самой конструкции или достаточно высокой собственной частотой. При малом демпфировании конструкции и низкой собственной частоте колебаний, что относится главным образом к высоким, длинным и тонким конструкциям, число случаев возникновения опасных колебаний под действием ветра увеличивается, и аэродинамическая устойчивость становится важным фактором, который необходимо учитывать при проектировании.

В инженерных сооружениях наблюдаются два различных типа аэродинамической неустойчивости: «галоупирование», когда имеется одна форма колебаний, не связанная с другими, и «флаттер», когда имеются несколько связанных форм колебаний. Оба вида колебаний имеют характер автоколебаний. Эти

виды колебаний отличаются от так называемых «эоловых» колебаний, вызванных периодическим срывом Кармановских вихрей, и являющихся по существу вынужденными колебаниями. Ниже изучается лишь аэродинамическая сторона проблемы потери устойчивости, т. е. потеря аэродинамического демпфирования тел, не обладающих внутренним демпфированием и имеющих одну степень свободы.

Условие потери аэродинамического демпфирования при поперечных колебаниях в связи с исследованием галоупирования линий электропередач было указано Ден-Гартогом^[3]. В данной работе исследуются условия, при которых теряется аэродинамическое демпфирование элементов конструкций, совершающих угловые колебания. Экспериментально определяются значения коэффициентов демпфирования при различных направлениях ветра. Устанавливается наличие областей углов атаки, при которых имеется потеря аэродинамического демпфирования, и предлагается приближенный метод расчета коэффициентов демпфирования при различных направлениях ветра.



Фиг. 1