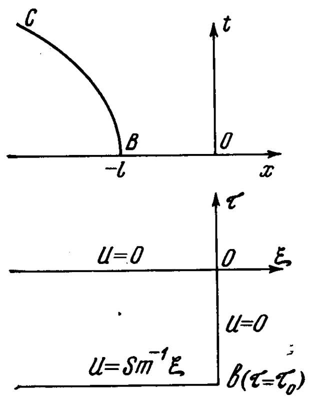
О ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА

М. Д. УСТИНОВ *(Калинин)*

Рассматривается следующая задача. В начальный момент времени $t = 0$ в полубесконечной цилиндрической трубе, ограниченной с одного конца $x = 0$ неподвижной стенкой, на участке $-l \leqslant x \leqslant 0$ находится газ, имеющий следующие параметры:

$$p = p_0(x), \qquad \rho = \rho_0(x), \qquad u \equiv 0 \tag{1}$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, u — скорость газа, $p_0(x)$ и $\rho_0(x)$ — известные функции. В сечении $x = -l$ находится поршень, имеющий массу m. При $x < -l$ — пустота. В момент $t = 0$ поршень освобождается. Требуется определить движение газа и поршня при $t > 0$. Газ считается совершенным и идеальным. Трение поршня о стенки не учитывается. Эту задачу рассматривали Ляв [1], К. П. Станюкович [2] и Ю. А. Созоненко [3] в случае, когда p_0 и ρ_0 являются постоянными. В настоящей заметке получено точное решение этой задачи для случая, когда $p_0(x)$ и $\rho_0(x)$ определенным образом зависят от x. Эта зависимость содержит произвольную функцию.



Уравнения одномерного адиабатического движения идеального совершенного газа запишем в следующей форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \qquad p = F^{\gamma}(\tau)\rho^{\gamma} \tag{2}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} = 0$$

Здесь $F(\tau)$ — произвольная функция, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты, τ — функция тока. Требуется найти решение (2), удовлетворяющее начальным условиям (1) и граничным условиям на стенке и на поршне

$$u(0, t) = 0, \qquad m\frac{du}{dt} = -pS \tag{3}$$

где S — площадь поперечного сечения трубы.

Введем две новые функции τ и ξ, такие, что

$$d\tau = \rho dx - \rho u dt, \qquad d\xi = \rho u dx - (p + \rho u^2)dt \tag{4}$$

Принимая, далее, τ и ξ за новые независимые переменные, преобразуем (2) к следующему виду [4]

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U\frac{\partial U}{\partial \xi} - f(\tau)\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \tau} + U\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\gamma - 1}{\gamma}V\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \qquad u = U \tag{5}$$

$$p = V^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \qquad \rho = \frac{1}{(\gamma-1)f(\tau)}V^{\frac{1}{\gamma-1}}, \qquad F(\tau) = (\gamma-1)f(\tau)$$

Так как на OB (фиг. 1) $dt = 0$ и $U = 0$, из (4) имеем $d\xi = 0$, т. е. можно считать, что $\xi = 0$ на OB. Тогда, согласно (1), на линии Ob в плоскости $\tau\xi$ будем иметь

$$U(\tau, 0) = 0, \qquad V = V_0(\tau), \qquad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant 0, \qquad \tau_0 = \int_0^{-l} \rho_0(x)\,dx \tag{6}$$

причем $V_0(\tau)$ выражается определенным образом через начальные данные (1).

На линии BC (поршень) $dU = -Sm^{-1}(Ud\tau - d\xi)$. Но $\tau = \tau_0$. Следовательно, $U(\tau_0, \xi) = Sm^{-1}\xi + C$, и так как в точке B скорость поршня равна нулю, имеем $C = 0$. Поэтому граничные условия (3) принимают вид

$$U(\tau_0, \xi) = Sm^{-1}\xi, \qquad U(0, \xi) = 0 \tag{7}$$

Таким образом, поставленная задача сводится к нахождению решения системы (5), удовлетворяющего начальным условиям (6) и граничным условиям (7).

Будем искать все решения (5), для которых $U = \varphi(\tau)\xi$. Подстановка в первое уравнение (5) дает

$$V = \psi\xi^2 + \omega(\tau), \qquad \psi(\tau) = \frac{\varphi' + \varphi^2}{2f}$$

Из второго уравнения (5) получим

$$\varphi(\tau) = -\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\psi'}{\psi}, \qquad \omega(\tau) = (c\psi)^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}}$$

Итак, система (5) имеет следующее решение, зависящее от произвольной функции $\psi(\tau)$ и постоянной C:

$$U = -\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\psi'}{\psi}\xi \equiv \varphi(\tau)\xi, \qquad f(\tau) = \frac{\varphi' + \varphi^2}{2\psi}, \qquad V = \psi(\tau)\xi^2 + (c\psi)^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}} \tag{8}$$

Соотношения (8) дают решение поставленной задачи для частного вида функций $p_0(x)$ и $\rho_0(x)$, если функция $\psi(\tau)$ удовлетворяет условиям, вытекающим из (7):

$$\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\psi'(\tau_0)}{\psi(\tau_0)} = -\frac{S}{m}, \qquad \psi'(0) = 0 \tag{9}$$

Начальные распределения давления и плотности определяются из (5)

$$p_0 = (C\psi)^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}, \qquad \rho_0 = \frac{2\psi}{(\gamma-1)(\varphi'+\varphi^2)}(C\psi)^{-\frac{1}{\gamma+1}}$$
$$x = \int\limits_0^\tau \frac{1}{\rho_0}\,d\tau, \qquad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant 0, \qquad \varphi = -\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\psi'}{\psi} \tag{10}$$

Задавая $\tau_0 < 0$ и функцию $\psi(\tau)$, удовлетворяющую (9), найдем отсюда $p_0(x)$ и $\rho_0(x)$. Постоянная C легко определяется из условия, что $x(\tau_0) = -l$.

Рассмотрим, например, случай, когда начальные данные таковы, что энтропия всюду постоянна, т. е. $f(\tau) = a = \text{const}$.

Тогда, используя выражения f и φ через ψ, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для $\psi(\tau)$. Интегрируя его с учетом граничных условий (9) и исключая τ, найдем из (10) начальное распределение для $p_0(x)$ и $\rho_0(x)$. Оказывается, что

$$p_0(x) = b^\gamma\left[C - \frac{bx}{\sqrt{\gamma a(\gamma-1)}}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \qquad p_0 = [a(\gamma-1)\rho_0]^\gamma$$

где положительные постоянные a, b и C связаны между собой равенством

$$\frac{b^2l^2}{\gamma a(\gamma-1)} + C = \left[\frac{2mbl}{S(\gamma-1)}\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Следует отметить, что решение (8) дает адиабатические течения, обладающие тем свойством, что ускорение каждой частицы пропорционально давлению, т. е. $du/dt = k(\tau)p$, где $k(\tau)$ зависит лишь от функции тока. В самом деле, из (4) и (8) найдем, что

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_\tau \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_\tau = -\varphi(\tau)\,p$$

Таким образом, рассматриваемое течение таково, что в каждом сечении $\tau = \tau_*$ может быть помещен поршень, имеющий массу $m = S\varphi^{-1}(\tau_*)$.

Общий вид адиабатических течений, обладающих свойством (11), определяется равенствами

$$U = f_1(\tau)\,\xi + f_2(\tau), \qquad V = \varphi_1(\tau)\,\xi^2 + \varphi_2(\tau)$$

где функции f_i и φ_i $(i = 1,2)$ определяются из (5) через произвольную функцию $f(\tau)$.

Следует отметить, что начальное состояние (10) газа в области между поршнем и стенкой является неравновесным, поскольку $p_0{}'x \neq 0$. К этому состоянию газ может прийти, если в момент $t = 0$ в области, занятой газом с параметрами $u = 0$, $p_0 = \text{const}$, $\rho_0(x)$ происходит мгновенное выделение энергии (взрыв), характеризующееся некоторой плотностью $E_0(x)$ выделения. Для любой функции $\psi(\tau)$ можно подобрать $\rho_0(x)$ и $E_0(x)$ так, что состояние газа непосредственно после взрыва будет определяться равенствами (10).

Поступило 2 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Love A. E. H., Pidduck F. B. Lagrange's Ballistic Problem Transactions of the Royal Society of London, 1922, 222.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды, Гостехиздат, 1965.
3. Созоненко Ю. А. Движение поршня под действием давления газа. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
4. Устинов М. Д. Преобразование и некоторые точные решения уравнений адиабатического движения идеального газа. Изв АН СССР, МЖГ, 1963, № 3.