

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КОНТУРЫ СОПЕЛ ДЛЯ ПОТОКОВ ГАЗА С ОТСТАВАНИЕМ ЧАСТИЦ

Л. Е. СТЕРНИН

(Москва)

Определение экстремального контура сопла для течения газа без инородных частиц произведено в ряде работ [1-6], базирующихся на расчете поля течения методом характеристик. В работах [7,8] выведены уравнения характеристик и соотношения вдоль линий тока, необходимые для расчета двухмерного течения газа с инородными частицами. Вариационную задачу для двухфазного потока в двухмерной постановке можно решать методом Гудерля и Эрмитэйджа [9] при использовании уравнений, данных в работах [7] или [8]; однако этот путь является весьма трудоемким, даже при использовании наиболее быстродействующих вычислительных машин.

В работах [10,11] даны исследования двухфазных одномерных течений, проведенные путем разложения искомых функций в ряды по малому параметру, определяемому размерами частиц. В работе [12] представлено решение вариационной задачи (в одномерной постановке) о построении контура сопла, обладающего максимальным импульсом. Однако в этой работе не учитывалось статическое слагаемое, входящее в импульс, а решение получено в сравнительно громоздкой форме. Кроме того, не рассматривался вопрос об учете потерь на непараллельность и неравномерность истечения.

В настоящей работе в одномерной постановке исследуется течение двухфазной среды в сопле Лавала при небольших запаздываниях частиц (по скорости и температуре). Вариационная задача об определении наибольшего импульса сопла формулируется вдоль его контура при фиксированной геометрической степени расширения. Потери импульса из-за непараллельности истечения имитируются функцией, зависящей от меняющихся вдоль контура ординаты и угла наклона касательной к контуру.

1. Пусть T — температура; p — давление; ρ — плотность; u — скорость; F — площадь; x, r — безразмерные абсцисса и ордината, отнесенные к радиусу критического сечения сопла; w — расход частиц, отнесенный к расходу газа; R — газовая постоянная в механических единицах. Придадим параметрам частиц индекс p . Параметрам газа индекса придавать не будем.

В работе [13] представлены основные уравнения одномерных течений двухфазных сред, выведенные с учетом ряда допущений, оговоренных в этой работе.

Уравнение движения частиц

$$\frac{du_p}{dx} = v \left(\frac{u}{u_p} - 1 \right) \quad (1.1)$$

Уравнение теплового взаимодействия частиц с газом

$$\frac{dT_p}{dx} = \tau \frac{T - T_p}{u_p} \quad (1.2)$$

Уравнение расхода газа

$$\rho u F = \text{const} \quad (1.3)$$

Уравнение сохранения энергии

$$c_p dT + u du + w (c dT_p + u_p du_p) = 0 \quad (1.4)$$

Уравнение состояния

$$p = \rho RT \quad (1.5)$$

Уравнение импульсов

$$\rho u du + \rho w u du_p + dp = 0 \quad (1.6)$$

Здесь c_p и c — теплоемкость газа при постоянном давлении и теплоемкость частиц; постоянные множители ν и τ вычисляются по формулам

$$\nu = \frac{9}{2} \frac{\mu r_*}{\rho_p a_p^2} f(N_{Re}), \quad \tau = \frac{3}{2} \frac{N_{Nu} c_p \mu r_*}{N_{Pr} c \rho_p a_p^2}$$

где μ — вязкость газа, a_p — радиус частицы, N_{Nu} , N_{Pr} — числа Нуссельта и Прандтля, $f(N_{Re})$ — функция сопротивления, зависящая от числа Рейнольдса N_{Re} , r_* — радиус узкого сечения сопла.

Уравнения (1.1) — (1.6) определяют неизвестные u , u_p , T , T_p , p , ρ .

В отличие от работ [10-12], представим искомые функции в виде рядов, где в качестве аргумента принято не давление, а ордината сопла

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, & T &= T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots \\ \rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots, & p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \\ u - u_p &\equiv u_s = \varepsilon u_{s1} + \varepsilon^2 u_{s2} + \dots, & T - T_p &\equiv T_s = \varepsilon T_{s1} + \varepsilon^2 T_{s2} + \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\varepsilon = a_* / \nu$ — величина, пропорциональная квадрату радиуса частицы; a_* — «равновесная» скорость газа в критическом сечении. Удобно ввести в рассмотрение величину $\varepsilon_T = a_* / \tau \varepsilon$.

Из уравнений (1.4), (1.6) и (1.7) следует

$$\frac{dp}{p} = \frac{c_p + wc}{R} \frac{dT}{T} - \frac{w}{RT} [cdT_s + u_s(du - du_s)]$$

или в конечном виде

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \exp \left[\frac{w}{1+w} \int_0^{\frac{p}{p_0}} \frac{cdT_s + u_s(du - du_s)}{c_p^x T} \right] \quad (1.8)$$

где интеграл берется от начального сечения

$$c_p^x = \frac{c_p + wc}{1+w}, \quad \kappa = \frac{c_p + wc}{c_p + wc - R}$$

а параметрам в начальном сечении придается индекс 0 вверху.

Подставляя ряды (1.7) в уравнения (1.1) — (1.6) и приравнивая коэффициенты при ε в нулевой и в первой степени, а также используя условие $F = \text{const}$, получим

$$\begin{aligned} \rho_0 u_0 &= \text{const}, \quad p_0 = \rho_0 R T_0, \quad \rho_0 (1+w) u_0 du_0 + dp_0 = 0 \\ (c_p + wc) dT_0 + u_0 du_0 (1+w) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$u_1 \rho_0 + \rho_1 u_0 = 0, \quad a_* u_{s1} dx = u_0 du_0 \quad (1.10)$$

$$a_* T_{s1} dx = u_0 \varepsilon_T dT_0, \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{T_1}{T_0} + \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} c_p^x T_1 + u_1 u_0 &= \frac{w}{1+w} (c T_{s1} + u_0 u_{s1}), \quad \frac{T_1}{T_0} = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{p_1}{p_0} + I \\ I &= \frac{w}{1+w} \int_0^{\frac{p_1}{p_0}} \frac{cdT_{s1} + u_{s1} du_0}{c_p^x T_0} + \left(\frac{T_1}{T_0} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{p_1}{p_0} \right)^0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь интеграл берется от заданного начального до любого текущего сечения сопла.

Как известно, уравнения (1.9), характеризующие равновесное течение, могут интерпретироваться как уравнения, описывающие течение идеаль-

ного газа без трения и частиц, но с некоторыми другими (приведенными) теплоемкостью c_p^x , плотностью ρ^x и газовой постоянной R^x

$$c_p^x = \frac{c_p + w c}{1 + w}, \quad \rho^x = \rho_0 (1 + w), \quad R^x = \frac{R}{1 + w}$$

Аналогично введенной выше критической скорости a_* , введем «равновесную» скорость звука a . Тогда для равновесного течения приведенная скорость λ и число Маха M будут равны

$$\lambda = \frac{u_0}{a_*}, \quad M = \frac{u_0}{a} = \frac{\sqrt{2} \lambda}{\sqrt{\kappa + 1 - (\kappa - 1) \lambda^2}}$$

Интегрируя (1.12) по частям и тождественно преобразуя, приходим к соотношениям, справедливым с точностью до вторых членов разложений (1.7).

$$p = p_0 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon w}{(1 + w)(1 - \lambda^2)} \left[\frac{2\kappa}{\kappa + 1} \lambda^2 \frac{1 + \gamma(2\eta - 1)\lambda^2}{1 - \gamma\lambda^2} \frac{d\lambda}{dx} - \frac{\kappa(z - \xi)(1 + \gamma\lambda^2)}{\kappa - 1} \right] \right\}$$

$$u = u_0 \left\{ 1 - \frac{\varepsilon w}{(1 + w)(1 - M^2)} \left[M^2(1 - \eta + \kappa\eta) \frac{d\lambda}{dx} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} (\xi - z) \right] \right\} \quad (1.14)$$

$$T = T_0 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon w(\kappa - 1)M^2}{(1 + w)(1 - M^2)} \left[(1 - \eta + \kappa\eta M^2) \frac{d\lambda}{dx} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} (\xi - z) \right] \right\} \quad (1.15)$$

где

$$z = 2\gamma \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda H(\lambda) d\lambda}{T^2(\lambda) dx/d\lambda}, \quad T(\lambda) = 1 - \gamma\lambda^2, \quad \gamma = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \quad (1.16)$$

$$H(\lambda) = 1 + \gamma(2\eta - 1)\lambda^2, \quad \eta = \varepsilon_T \frac{c}{c_p^x}$$

$$\xi = \left[\frac{c}{c_p^x} \frac{T_{s1}}{T_0} - \frac{1 + w}{w} \left(\frac{T_1}{T_0} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{p_1}{p_0} \right) \right]^{\circ} \quad (1.17)$$

Здесь индекс $^{\circ}$ сверху означает, что все параметры берутся в начальном сечении.

При расчетах дозвуковых сопел ξ определяется из условия ограниченности p , u , T при $M = 1$

$$\xi = z_* - \frac{\kappa - 1}{\kappa} [1 + \eta(\kappa - 1)] \left(\frac{d\lambda}{dx} \right)_* \quad (1.18)$$

Здесь индекс $*$ означает, что параметры взяты в узком сечении сопла. Нужно отметить, что при данной линейной постановке задачи особенность возникает не в расширяющейся части сопла, где скорость газа достигает скорости звука, а в узком сечении сопла, где «равновесное» число Маха равно единице.

Связь между λ и r задается уравнением газовой динамики одномерного адиабатического потока

$$r^2 \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \lambda (1 - \gamma\lambda^2)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = 1 \quad (1.19)$$

Таким образом, для заданного контура сопла $r = r(x)$ уравнения (1.13) — (1.19) определяют однозначную зависимость всех параметров от безразмерной ординаты контура r .

При переходе через излом сверхзвуковой части контура сопла величины T_{s1} , T_1 , p_1 и ξ меняются скачком. Из уравнения импульсов следует, что при переходе через излом величина

$$S = \frac{u_1}{u_0} + \frac{p_1}{p_0} [(1 + w)\kappa M^2]^{-1} - \frac{w}{1 + w} \frac{d\lambda}{dx} = \text{const}$$

Используя уравнения расхода, состояния и энергии, можно найти изменения T_{s1} , T_1 , p_1 , ξ . В частности, из уравнения (1.17) следует

$$\xi_{\pm} = \frac{(\kappa - 1) M^2}{M^2 (1 + \kappa W) - 1} \left\{ S_{\pm} \frac{(1 + w)^2 (M^2 - 1)}{w} - w [1 + \eta (\kappa - 1) M^2] \left(\frac{d\lambda}{dx} \right)_{\pm} \right\}$$

где индексы $-$ и $+$ относятся к параметрам до и после излома контура.

2. Импульс сопла, или сила, действующая на его внутреннюю поверхность, представляется формулой

$$P = 2\pi r_*^2 \int_{r_*}^{r_a} p r dr \quad (2.1)$$

где r_* — радиус критического сечения, а r_a — фиксированный радиус среза сопла.

Пользуясь формулой первого приближения для p одномерного потока двухфазной среды (1.13), составим выражение для функционала, максимум которого отвечает наилучшему контуру сопла при фиксированных длине сопла и геометрической степени расширения

$$\Phi = \int_{r_*}^{r_a} [F_1(r, dx/dr) + z F_2(r) + b_1 dx/dr + b_2(r) F_4(r, dx/dr, dz/dr)] dr \quad (2.2)$$

$$F_1 = p_0 r \left\{ 1 + \frac{\varepsilon w}{(1+w)(1-\lambda^2)} \left[\frac{2\kappa}{\kappa+1} \lambda^2 \frac{H(\lambda)}{T(\lambda) x' dr/d\lambda} + \frac{\kappa \xi (1 + \gamma \lambda^2)}{\kappa - 1} \right] \right\} \quad (2.3)$$

$$F_2 = -p_0 r \frac{\varepsilon w}{1+w} \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{1 + \gamma \lambda^2}{1 - \lambda^2}, \quad F_4 = \frac{dz}{dr} - F_3 \quad (2.4)$$

$$F_3 = 4\gamma \frac{\lambda^2 H(\lambda)}{r(\lambda^2 - 1) T(\lambda) x' dr/d\lambda}, \quad x' = dx/dr$$

а b_1 и $b_2(r)$ — постоянный и переменный неопределенные множители Лагранжа соответственно. Составим выражение для вариации функционала

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_{r_*}^{r_a} \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x'} + b_1 + b_2 \frac{\partial F_4}{\partial x'} \right) \delta x' + F_2 \delta z + b_2 \frac{\partial F_4}{\partial z'} \delta z' \right] dr = \\ &= \int_{r_*}^{r_a} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x'} + b_1 + b_2 \frac{\partial F_4}{\partial x'} \right) (-\delta x) + \left(F_2 - \frac{db_2}{dr} \right) \delta z \right] dr + \\ &\quad + b_2 \frac{\partial F_4}{\partial z'} \delta z \Big|_0^a + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x'} + b_1 + b_2 \frac{\partial F_4}{\partial x'} \right) \delta x \Big|_0^a \end{aligned}$$

Приравнявая нулю вариацию функционала, учитывая независимость вариаций δx и δz на контуре сопла, отсутствие вариации x на концах и отсутствие вариации z в начальной точке, придем к уравнениям:

на контуре сопла

$$b_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x'} + b_2 \frac{\partial F_4}{\partial x'} = \text{const}, \quad \frac{db_2}{dr} = F_2 \quad (2.5)$$

на срезе сопла

$$b_2 = 0 \quad (2.6)$$

В первом уравнении (2.5) множитель Лагранжа b_1 может быть включен в произвольную постоянную. Из второго уравнения (2.5) и уравнения (2.6) следует

$$b_2(r) = - \int_{r_*}^{r_a} F_2 dr$$

Производные dF_1/dx' , dF_4/dx' определяются из уравнений (2.3) и (2.4), а также условия

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{2\lambda T(\lambda)}{r(\lambda^2 - 1)}$$

следующего из соотношения (1.19)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x'} = \frac{\varepsilon w}{1+w} \frac{\kappa}{\kappa+1} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \frac{H(\lambda)}{T(\lambda)} P_T \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2, \quad \frac{\partial F_4}{\partial x} = 2\gamma H(\lambda) \frac{\lambda}{T^2(\lambda)} (d\lambda/dx)^2$$

$$b_2 = \frac{\varepsilon w}{1+w} \frac{\kappa}{\kappa+1} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \frac{P_T}{2} \left[\frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda} + \gamma(\lambda - \lambda_a) \right]$$

Здесь p_T давление торможения равновесного течения

$$p_T = p(1 - \gamma\lambda^2)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Подставляя величины b_2 , dF_1/dx' и dF_4/dx' в первое соотношение (2.5) и производя упрощения, приходим к весьма простой формуле: для определения контура сопла параметрически через λ

$$\frac{T(\lambda)}{\sqrt{\lambda H(\lambda)}} \frac{dx}{d\lambda} = \text{const}$$

или

$$x = l \int_{\lambda^0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\lambda [1 + \gamma(2\eta - 1)\lambda^2]}}{1 - \gamma\lambda^2} d\lambda \left\{ \int_{\lambda^0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\lambda [1 + \gamma(2\eta - 1)\lambda^2]}}{1 - \gamma\lambda^2} \right\}^{-1} \quad (2.7)$$

где l — длина сопла. Связь между λ и r дается формулой (1.19). Интересно отметить, что в формулу (2.7) не входят ε и w .

Замечание. При расчетах сверхзвуковых сопел уравнение (2.7) обеспечивает максимум функционала (2.2) при условии запрещения вариаций ξ или $(d\lambda/dx)^0$. В случае, если вместе сопряжения фиксированной и экстремальной частей контура допускается произвольный излом, то величина ξ может варьироваться; при этом функционал (2.2) увеличивается с ростом $(-\xi)$. Зададим линию сопряжения в виде дуги окружности радиуса r_+ , плавно соединяющей фиксированную и экстремальную части контура. При этом любым значениям l и r_a отвечают экстремальные контуры, начинающиеся в различных точках этой окружности, а величина ξ оказывается фиксированной. При весьма малых r_+ данное сопряжение практически не отличается от излома, а уравнение (2.7) дает решение задачи.

3. Рассмотрим частный случай $\eta = 1/2$. Из соотношения (2.7) следует

$$x = l \frac{L(\lambda)}{L_a} \quad (3.1)$$

$$L(\lambda) = \gamma^{-3/4} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\gamma} + 1)(\sqrt{\lambda^0} \sqrt[4]{\gamma} - 1)}{(\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\gamma} - 1)(\sqrt{\lambda^0} \sqrt[4]{\gamma} + 1)} - \text{arc tg } \sqrt{\lambda} \sqrt[4]{\gamma} + \right. \\ \left. + \text{arc tg } \sqrt{\lambda^0} \sqrt[4]{\gamma} \right], \quad L_a \equiv L(\lambda_a)$$

Подставляя в формулы (1.13) — (1.15) величину

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{l}{L_a} \frac{\sqrt{\lambda}}{T(\lambda)} \quad (3.2)$$

полученную дифференцированием уравнения (3.1), а также подставляя в первое соотношение (1.16) выражение (3.2), получим

$$z = 2\gamma \frac{L_a}{l} L(\lambda)$$

а выражения для искомых функций

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_0} &= 1 + \frac{\varepsilon w}{1+w} \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{L_a}{l(1-\lambda^2)} \left\{ \lambda^{3/2} - (1+\gamma\lambda^2) \left[L(\lambda) - \frac{l}{L_a} \frac{\xi}{2\gamma} \right] \right\} \\ \frac{u}{u_0} &= 1 + \frac{\varepsilon w}{1+w} \frac{T(\lambda) L_a}{l(1-\lambda^2)} \left[\frac{2\kappa}{\kappa+1} L(\lambda) - \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{l}{L_a} \xi - \lambda^{3/2} \right] \\ \frac{T}{T_0} &= 1 + \frac{\varepsilon w}{1+w} \frac{2\gamma L_a}{l} \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \left[\frac{1+\lambda^2}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{l}{L_a} \xi - \frac{2\kappa}{\kappa+1} L(\lambda) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Вычислим¹ по формулам (3.3) параметры в дозвуковой части сопла. Определим ξ по (1.18)

$$\xi = \frac{2\gamma L_a}{l} \left[L(1) - \frac{\kappa+1}{2\kappa} \right]$$

Это обеспечивает ограниченность правых частей формул (3.3) при $\lambda \rightarrow 1$ (в данном случае $\lambda^0 < 1$, al — длина всего сопла).

Значения давления, скорости и температуры в критическом сечении могут быть получены разложением в ряд правых частей уравнений (3.3) в окрестности точки $\lambda = 1$ по параметру $\Delta = 1 - \lambda$. Так, например, для давления получим

$$\left(\frac{P}{P_a} \right)_* = 1 - \frac{\varepsilon w}{1+w} \frac{\kappa L_a}{(\kappa+1)l} \left(\frac{3}{2} - \frac{1+\kappa\gamma - \gamma^2}{1-\gamma^2} \right)$$

По формулам (1.19), (3.1) и (3.3) могут быть определены контур сопла и вдоль него — основные параметры газа: давление, скорость и температура. Плотность газа, скорость и температура частиц вычисляются после этого по формулам (1.10) — (1.14).

Для определения влияния малых отклонений от оптимального контура на импульс, создаваемый соплом, зададимся сечением 3, расположенным между начальным сечением o и выходным — a , и представим x в виде

$$x = L(\lambda)l/L_a + \delta(\lambda_a - \lambda)(\lambda - \lambda_3)$$

Здесь δ — малая величина

$$\lambda^0 \leq \lambda \leq \lambda_a, \quad \lambda^0 \leq \lambda_3 \leq \lambda_a, \quad \delta \equiv 0 \quad \text{при } \lambda < \lambda_3$$

При этом

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{l\sqrt{\lambda}}{L_a T(\lambda)} + \delta(\lambda_a + \lambda_3 - 2\lambda)$$

Подставляя это значение $dx/d\lambda$ в формулу (1.13), а потом подставляя давление в соотношение (2.1), после преобразований придем к выражению:

$$\begin{aligned} P^x &\equiv \frac{P}{2\pi r_*^2 p_T} \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\kappa-1} = \frac{1}{2} \left(\lambda_a + \frac{1}{\lambda_a} - \lambda^0 - \frac{1}{\lambda^0} \right) - \\ &- \frac{\varepsilon w}{(1+w)l(\kappa+1)} \left\{ \frac{\xi l}{2\gamma L_a} \left[\frac{T(\lambda^0)}{\lambda^0} - \frac{T(\lambda_a)}{\lambda_a} \right] + \frac{L_a T(\lambda_a)}{\lambda_a} + \delta^2 \frac{L_a^2}{l^2} J \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $J = J(\lambda_a, \lambda_3)$ — положительная² иррациональная функция λ_a и λ_3

$$\begin{aligned} J &= \int_{\lambda_3}^{\lambda_a} \left\{ \sqrt{\lambda} T^2(\lambda) (\lambda_3 + \lambda_a - 2\lambda)^2 - 2 \left[\frac{4}{9} \gamma (\lambda_3^4 \sqrt{\lambda_3} - \lambda^4 \sqrt{\lambda}) + \frac{4}{7} \gamma (\lambda_3 + \right. \right. \\ &+ \lambda_a) (\lambda^3 \sqrt{\lambda} - \lambda_3^3 \sqrt{\lambda_3}) + \frac{4-\gamma(\lambda_3 + \lambda_a)^2}{5} (\lambda^2 \sqrt{\lambda} - \lambda_3^2 \sqrt{\lambda_3}) - \\ &\left. \left. - \frac{4}{3} (\lambda_3 + \lambda_a) (\lambda \sqrt{\lambda} - \lambda_3 \sqrt{\lambda_3}) + (\lambda_3 + \lambda_a)^2 (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_3}) \right] \right\} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \end{aligned}$$

(например, при $\kappa = 1.2$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_a = 2.5$, $J = 0.003$)

¹ Поскольку ξ не варьируется, полученные по формулам (3.3) параметры в дозвуковой части сопла не являются наилучшими.

² Ввиду громоздкости, проинтегрированное выражение для J не выписано.

Отсутствие в формуле (3.4) члена с δ свидетельствует о правильности решения вариационной задачи, так как, в силу положительности J , отклонение от экстремального контура в любую сторону приводит к уменьшению величины P .

Расчеты изменения давления, скорости и температуры вдоль сопла, проведенные по формулам (3.3), показывают, что отличие первого приближения от нулевого сравнительно небольшое. Результаты расчетов, выполненных при $\kappa = 1.2$, представлены ниже.

$ew/1 + w$		0.2	0.8	0.2	0.8	0.2	0.8
λ	r	p/p_0		T/T_0		u/u_0	
1.1	1.0054	0.9977	0.9907	1.0034	1.0134	1.0057	1.0227
2.2	2.2637	1.0133	1.0530	1.0133	1.0534	1.0001	1.0003
2.5	4.0671	1.0206	1.0822	1.0194	1.0775	0.9988	0.9953

На фиг. 1 представлены контуры сопел с экстремальными сверхзвуковыми частями, вычисленных для $\kappa = 1.2$ по формулам (1.19) и (3.1).

4. Полученные выше экстремальные контуры сопел обладают практически неприемлемыми выходными углами раскрытия, из-за чего возникают недопустимо большие потери на рассеивание. Ниже предпринята попытка принципиально учесть, оставаясь в рамках одномерной теории, суммарное влияние двумерности путем введения под интеграл уравнения (2.1) некоторой «функции влияния» f , зависящей от местных ординаты и угла наклона контура к оси сопла.

Выбор функции $f(r, x')$ надлежит осуществить таким образом, чтобы в результате решения вариационной задачи обеспечивался оптимальный импульс сопла с учетом потерь на рассеивание. Дается решение вариационной задачи об определении экстремального импульса с учетом функции f в общем виде и рассмотрен частный случай этой функции. Однако выбор конкретного вида функции f , удовлетворяющего поставленным выше требованиям, является задачей течения однородной среды и здесь не рассматривается.

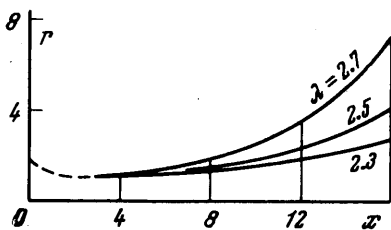
По аналогии с уравнением (2.1), запишем выражения для импульса

$$P_f = 2\pi r_*^2 \int_{r_3}^a pr f dr$$

и для функционала

$$\Phi_f = \int_{r_3}^a \{ [F_1(r, x') + F_2(r)z] f + b_1 x' + b_2(r) F_4(r, x', z') \} dr$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r ; сечение 3 расположено между сечением 0 и a , а функции F_1 и F_2 определяются из уравнений (2.3) и (2.4).



Фиг. 1

Составляя выражение для вариации Φ_f , производя интегрирование по частям и учитывая, что вариация x на обоих концах равна нулю, а вариация z равна нулю вначале, получим:

$$f \frac{\partial F_1}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial x'} (F_1 + zF_2) + b_2 \frac{\partial F_4}{\partial x'} = \text{const} \quad (4.1)$$

$$\frac{db_2(r)}{dr} = fF_2$$

на срезе сопла

$$b_2 = 0 \quad (4.2)$$

Здесь в первом уравнении (4.1), как и в первом уравнении (2.5), постоянный множитель Лагранжа b_1 включен в произвольную постоянную.

Из уравнений (4.2) и второго уравнения (4.1) следует

$$b_2(r) = - \int_r^a f F_2 dr$$

Подставляя значение F_2 из (2.4) и выражая r и M через λ , получим

$$b_2 = \frac{\varepsilon w}{1+w} \frac{\kappa}{\kappa-1} p_T \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \int_{\lambda_a}^1 \frac{1+\gamma\lambda^2}{\lambda^2} f d\lambda$$

Сумма $F_1 + zF_2$ определяется из уравнений (1.17), (2.3) и (2.4)

$$F_1 + zF_2 = pr \left\{ 1 + \frac{\varepsilon w}{1+w} \left[\xi \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{1+\gamma\lambda^2}{1-\lambda^2} + \frac{2\kappa\lambda^2 H(\lambda)}{(\kappa+1)T(\lambda)(1-\lambda^2) dx/d\lambda} - \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{1+\gamma\lambda^2}{1-\lambda^2} \int_{\lambda_s}^{\lambda} \frac{\lambda H(\lambda) d\lambda}{T^2(\lambda)} \frac{d\lambda}{dx} \right] \right\}$$

После подстановки этого соотношения, а также выражений для b_2 , $\partial F_1/\partial x'$, $\partial F_4/\partial x'$ в первую формулу (4.1) и учета того, что

$$R_1(\lambda) \equiv \int_{\lambda}^{\lambda_s} f \frac{1+\gamma\lambda^2}{\lambda^2} d\lambda$$

где $R_1(\lambda_a)$ — некоторая константа, приходим к следующему интегродифференциальному уравнению для $x(\lambda)$

$$2 \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} (1-\gamma\lambda^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} r f \left\{ \frac{1+w}{\varepsilon w} \cdot \frac{\kappa+1}{2\kappa} + \frac{1}{1-\lambda^2} \left[\frac{\xi}{2\gamma} (1+\gamma\lambda^2) + \frac{\lambda^2 H(\lambda)}{T(\lambda) dx/d\lambda} - (1+\gamma\lambda^2) \int_{\lambda_s}^{\lambda} \frac{\lambda H(\lambda) d\lambda}{T^2(\lambda) dx/d\lambda} \right] \right\} + \frac{H(\lambda)}{T(\lambda) (dx/d\lambda)^2} \left[f + \frac{\lambda}{T(\lambda)} \times \right. \\ \left. \times \left(R_1^a + \int_{\lambda_s}^{\lambda} f \frac{1+\gamma\lambda^2}{\lambda^2} d\lambda \right) \right] = \text{const}, \quad R_1^a \equiv R_1(\lambda_a) \quad (4.3)$$

Интегрирование этого уравнения производится численно в следующем порядке: а) Произвольно задаются две постоянные величины $(dx/d\lambda)_s$ и R_1^a . По уравнению (4.3) вычисляется правая постоянная часть уравнения. б) Задается шаг $\Delta\lambda$, вычисляется $\lambda_s + \Delta\lambda$ и подбирается значение $dx/d\lambda$, при котором удовлетворяется уравнение (4.3). в) Интегрирование ведется до тех пор, пока $R_1(\lambda)$ не достигнет величины R_1^a . При этом автоматически определится диаметр среза и длина сопла. Меняя R_1^a и $(dx/d\lambda)_s$, можно получить желаемые величины l и r_a .

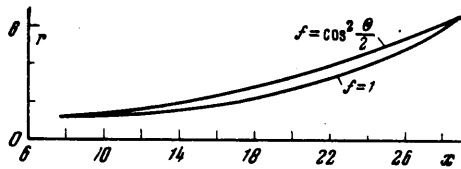
После определения зависимости $dx/d\lambda$ от λ функция $x(\lambda)$ находится численным интегрированием.

На фиг. 2 представлен экстремальный контур сопла, вычисленный при условиях

$$f = \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{x' + \sqrt{1+x'^2}}{2\sqrt{1+x'^2}}$$

$$\frac{\varepsilon w}{1+w} = 0.2, \quad \eta = 1/2, \quad x' = \frac{dx}{dr}$$

$$\kappa = 1.2,$$



Фиг. 2

(θ — угол наклона касательной к контуру, к оси сопла) по уравнению (4.3) и экстремальный контур, вычисленный по уравнению (2.7). Из рассмотрения фиг. 2 следует, что контур сопла, рассчитанный по (4.3), обладает меньшими потерями на непараллельность и неравномерность истечения, чем контур, рассчитанный по (2.7), хотя эти потери даже для первого контура весьма велики. Это свидетельствует о недостаточно удачном выборе вида функции f .

При одномерном движении газа в сопле без инородных частиц максимум функционала

$$\int_{r_s}^{r_a} p(r) r \cos^2 \theta / 2 dr$$

обеспечивается при выполнении соотношения

$$(1 + x'^2)^{3/2} = pr \text{ const} \quad (4.4)$$

Зависимость $x(r)$ определяется интегрированием (4.4)

$$x = \int_{r_3}^{r_a} \sqrt{C(pr)^{1/3} - 1} dr \quad (4.5)$$

здесь C подбирается из условия удовлетворения уравнению

$$l = \int_{r_3}^{r_a} \sqrt{C(pr)^{1/3} - 1} dr$$

Расчеты, проведенные по уравнению (4.5), определяют контур, не сильно отличающийся от контура, рассчитанного по уравнению (4.3) и представленного на фиг. 2. Так, если на обоих контурах совместить r_3 , r_a и l , то максимальная разность между ординатами контура, рассчитанного по уравнению (4.5), и контура, рассчитанного по уравнению (4.3), при фиксированном x составит величину ± 0.3 .

5. При расчетах дозвуковых частей экстремальных сопел параметр ξ может варьироваться. При этом с ростом ($-\xi$) давление в дозвуковой части сопла падает, а в сверхзвуковой — возрастает, что приводит к росту функционала (2.2). Как следует из соотношения (1.18), любое, сколь угодно большое, значение ($-\xi$) может быть получено при увеличении производной $(d\lambda/dx)_*$, которая, однако, не может быть взята слишком большой, так как это нарушит справедливость разложений (1.7). При практических расчетах сопел для реализации данного эффекта необходимо в некоторой окрестности критического сечения задать увеличенные, относительно экстремальным, значения $d\lambda/dx$, гладко или с разрывом сопрягающиеся со значениями $d\lambda/dx$, вычисляемыми по формуле (2.7) вне данной окрестности. Чем больше $(d\lambda/dx)_*$ и чем уже область, в которой производная $d\lambda/dx$ отлична от экстремальной, тем больше функционал (2.2). При задании околосредней области с неэкстремальными значениями $d\lambda/dx$ нужно следить, чтобы не нарушились предположения, согласно которым физическая картина течения описывается уравнениями, использованными в работе.

Автор благодарит Ю. Д. Шмыглевского и А. Н. Крайко за полезные обсуждения и В. К. Старкова за выполнение расчетов на ЭВМ.

Поступило 25 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. G u d e r l e y G., H a n t s c h E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. Z. Flugwiss, 1955, Heft 9, 3.
2. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
3. R a o G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. Jet Propulsion, 1958, vol. 28, No 6.
4. С т е р н и н Л. Е. К расчету осесимметричного реактивного сопла наименьшего веса. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1959, № 1.
5. С т е р н и н Л. Е. О границе области существования безударных оптимальных сопел. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2.
6. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
7. K l i e g e l J. R., N i c k e r s o n G. R. Flow of gas-particle mixtures in axially symmetric nozzles, ARS Report, 1961, 1713—61.
8. К р а й к о А. Н., С т е р н и н Л. Е. К теории течения двухскоростной сплошной среды с твердыми и жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
9. G u d e r l e y K. G., A r m i t a g e J. V. A General Method for the Determination of Best Supersonic Rocket Nozzles. Symposium on Extremal Problems in Aerodynamics, 1962, Seattle, Washington.
10. R a n n i e W. D. A perturbation analysis of one-dimensional heterogeneous flow in rocket nozzles. Detonation and Two-Phase Flow, 1962, New York, vol. 6.
11. M a r b l e F. E. Dynamics of a gas containing small solid particles Proceedings of the 5 AGARD Combustion and Propulsion Colloquium, 1963, Pergamon Press, New York.
12. M a r b l e F. E. Nozzle Contours for Minimum Particle-Lag Loss. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No 12.
13. B a i l e y W. S., N i l s o n E. N., S e r r a R. A. and Z u p n i k T. F. Gas Particle Flow in an Axisymmetric Nozzle. ARS Journal, 1961, vol. 31, No 6.