Оценим еще порядок толщины δ_2 зоны вторичных течений. При малых φ формула (2.6) дает

$$\eta = \frac{1}{2\varphi^2}\xi$$

так что, например, для $\varphi = 0.01$ имеем $\eta = 5000\ \xi$. Это существенно больше толщины пограничного слоя.

Задача может быть решена и другим способом,— путем отыскания решений автомодельного типа.

3. Сравним полученное решение с точным решением задачи об обтекании пластинки, которое было дано Н. Е. Кочиным [3]. Результаты расчетов для частного случая $\xi = 25\nu / U_0$, выполненных путем удержания двух первых членов рядов в решении Н. Е. Кочина, приведены в работе [4]. На фиг. 2 представлено (кружки) отношение поперечной составляющей скорости к ее максимальному значению в функции от поперечной координаты (отсчитывается от точки экстремума), вычисленное по данным из [4]. Там же сплошной линией дана кривая величины $\varphi(\xi, \eta)$ по формуле (2.6). Рассмотрение фиг. 2 обнаруживает хорошее совпадение между обоими решениями.

Поступило 22 IV 66

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, 1962.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
3. Кочин Н. Е. Собрание сочинений, т. II. Изд-во АН СССР, 1948.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II, Физматгиз, 1963.

О НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЯХ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. И. ПЕТУХОВ

(Новосибирск)

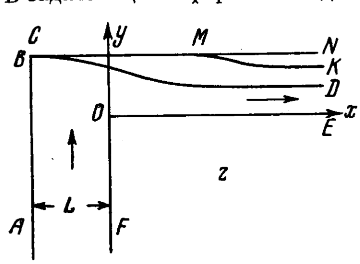
Приводится решение задачи о низком плоском «фонтане» тяжелой жидкости над горизонтальным дном. Использован приближенный метод конформного отображения близких областей, развитый М. А. Лаврентьевым [1] и Н. Н. Моисеевым [2].

1. Рассмотрим плоское течение тяжелой идеальной жидкости, геометрия которого представлена на фиг. 1.

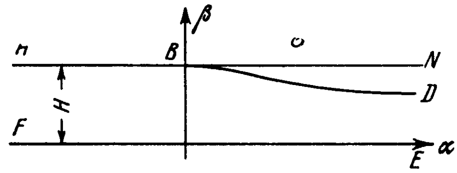
Здесь CA, OF, OE — твердые полубесконечные стенки, BD — свободная поверхность, BN — касательная к ней в точке B.

Скорость в точке B равна нулю. Неизвестные ординаты точек B и D обозначим через H и h.

В задаче ищется форма свободной поверхности и параметр H как функция расхода q. Характерным для рассматриваемого течения является то, что априори не известны координаты ни одной точки поверхности.



Фиг. 1



Фиг. 2

Введем в плоскости течения Oxy комплексное переменное z и отобразим полосу с шириной H в плоскости вспомогательного комплексного переменного $\sigma = \alpha + i\beta$ (фиг. 2) на четырехугольник $ABNEOF$ плоскости z. Соответствие точек видно из фиг. 1 и 2. Отображение осуществляется функцией (1.1)

$$z = \frac{iL}{H}\left[\ln\frac{1+\Phi/\nu}{1-\Phi/\nu} - \frac{i}{\nu}\ln\frac{1+i\Phi}{1-i\Phi}\right], \quad \Phi = \left(\frac{\nu^2 e^{-k\sigma}-1}{e^{-k\sigma}+1}\right)^{1/2}, \quad k = \frac{\pi}{H}, \quad \nu = \frac{L}{H}$$

Пусть точки кривой BD в плоскости σ (образ свободной поверхности) представляются выражением

$$\sigma = \alpha + i(H - f) \tag{12}$$

Здесь f — некоторая функция α. Пусть $\delta = f \,/\, H$; тогда с точностью до линейных по δ членов из (1.1) и (1.2) получим

$$y = H\left(1 - \left(\frac{1+\nu^2 e^{-k\alpha}}{1-e^{-k\alpha}}\,\delta\right)^{1/2}\right), \qquad \frac{dx}{d\alpha} = \left(\frac{1+\nu^2 e^{-k\alpha}}{1-e^{-k\alpha}}\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

Интеграл Бернулли на свободной границе жидкости выполняется в форме

$$\left|\frac{dW}{dz}\right|^2 + 2gy = 2gH \quad \text{или} \quad \left|\frac{dW}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dz}\right|^2 + 2gy(\alpha) = 2gH \tag{1.4}$$

Здесь $W = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал, в плоскости которого (фиг. 3) течению соответствует полоса с шириной q, а значения членов в (1.4) берутся на BD.

Считая область $ABDEF$ в плоскости σ, близкой к полосе $ABNEF$, воспользуемся формулой для граничной производной конформного отображения этой области в плоскость комплексного потенциала [1,2]

$$\frac{H^2}{q^2}\left|\frac{dW}{d\sigma}\right|^2 = \frac{1}{(1-\delta)^2}\left[1 - \frac{2}{3}H^2(1-\delta)\frac{d^2\delta}{d\alpha^2} - \frac{1}{3}H^2\left(\frac{d\delta}{d\alpha}\right)^2\right] \tag{1.5}$$

Из (1.3) — (1.5) получим

$$\frac{1}{(1-\delta)^2}\left[1 - \frac{2}{3}(1-\delta)\frac{d^2\delta}{d\zeta^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{d\delta}{d\zeta}\right)^2\right] - \mu\left(\frac{1+\nu^2 e^{-\pi\zeta}}{1-e^{-\pi\zeta}}\right)^{3/2}\delta = 0 \tag{1.6}$$

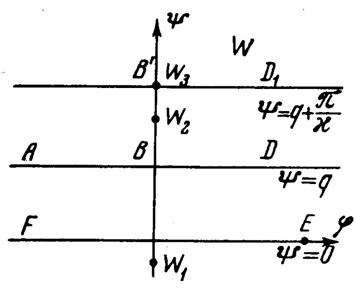
где

$$\mu = \frac{2gH^3}{q^2}, \qquad \zeta = \frac{\alpha}{H}$$

Итак, задача приближенно свелась к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого должно удовлетворять граничным условиям

$$\delta(0) = 0, \qquad (d\delta \,/\, d\zeta)_0 = 0 \tag{1.7}$$

Параметр μ зависит от неизвестной величины H. Граничными условиями определяются константы интегрирования, для окончательного же решения задачи надо иметь способ отыскания μ.



Фиг. 3

Потребуем, чтобы δ было не только ограниченным в бесконечности, но принимало там постоянное значение δ_0, а первая и вторая производные стремились к нулю, т. е. рассмотрим течение, вырождающееся асимптотически в однородный поток. Последнее требование вполне определяет μ.

2. Рассмотрим поведение δ вблизи нуля, где уравнение (1.6) имеет вид

$$\delta'' + c\zeta^{-3/2}\delta = 3/2, \qquad c = \frac{12\mu\nu^2}{\pi^{3/2}} \tag{2.1}$$

Решение (2.1) для малых ζ представимо первым членом разложения $\delta \approx 3/4\,\zeta^2$.

Сделаем предварительные оценки δ_0. Эта величина связана с μ соотношением

$$\mu\delta_0(1 - \delta_0)^2 = 1 \tag{2.2}$$

которое получается из (1.6) при $\zeta \to \infty$, $\delta'' \to 0$, $\delta' \to 0$.

Проинтегрировав (1.6), получим

$$\frac{1}{3}\frac{\delta'^2}{1-\delta} = \frac{\delta}{1-\delta} - \frac{\mu}{2}\delta^2\left(\frac{1+\nu^2 e^{-\pi\zeta}}{1-e^{-\pi\zeta}}\right)^{3/2} + \frac{\mu}{2}\int_0^{\zeta}\delta^2 d\left(\frac{1+\nu^2 e^{-\pi\zeta}}{1-e^{-\pi\zeta}}\right)^{3/2}. \tag{2.3}$$

Пусть

$$\int_0^{\infty}\delta^2 d\left(\frac{1+\nu^2 e^{-\pi\zeta}}{1-e^{-\pi\zeta}}\right)^{3/2} = -d, \qquad (d > 0)$$

Тогда из (2.3) при $\zeta \to \infty$ получим

$$\frac{\delta_0}{1-\delta_0} - \frac{\mu}{2}\delta_0^2 - \frac{\mu}{2}d = 0 \qquad (2.4)$$

Из (2.2) и (2.4) следует, что

$$\delta_0^2(1-2\delta_0) = d \qquad (2.5)$$

Функция, стоящая слева в (2.5), обращается в нуль при $\delta_0 = {}^1/_2$ и имеет максимум, равный ${}^1/_{27}$ при $\delta_0 = {}^1/_3$. Таким образом ${}^1/_3 \leqslant \delta_0 \leqslant {}^1/_2$, $0 \leqslant d \leqslant {}^1/_{27}$

Эта оценка справедлива при всех ν. Для произвольного ν искать решение уравнения (1.6) в виде ряда затруднительно, ибо коэффициенты представляют собой весьма громоздкие функции ν. К тому же почти все способы разложений решения приводят к медленно сходящимся рядам.

Построим решения для $\nu = 1$. Введем две новые переменные

$$t = \left(\frac{1+e^{-\pi\zeta}}{1-e^{-\pi\zeta}}\right)^{1/2}, \qquad \eta = \delta^{1/4}$$

В этих переменных (при $\nu = 1$) уравнение (2.3) переписывается так:

$$(1-t^4)^2\eta^6 = \frac{3}{4\pi^2}\left(\frac{dt^2}{d\eta}\right)^2\left[\eta^4 - 4\mu(1-\eta^4)\int_0^\eta t^3\eta^7\,d\eta\right] \qquad (2.6)$$

Зная асимптотику δ вблизи нуля, видим, что решение (2.6) представимо в форме

$$t = \frac{a_{-1}}{\eta} + \sum_{i=3}^{\infty} a_i\eta^i \qquad (2.7)$$

Подставив (2.7) в (2.6) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях η, получим следующие значения:

$$a_{-1} = 0.74,\quad a_3 = 0{,}41,\quad a_4 = 0.19\rho,\quad a_5 = 0.09\rho^2$$
$$a_6 = 0.05\rho^3,\quad a_7 = 0.04\rho^4 - 0.18,\quad a_8 = -0.17\rho \quad (\rho = 0.2\,\mu)$$
$$a_9 = -0.15\rho^2,\ a_{10} = -0{,}1\,\rho^3 \text{ и т. д.} \qquad (2.8)$$

При $\zeta \to \infty$, $t \to 1$, $\eta \to \delta_0^{1/4}$ равенства (2.2), (2.7), (2.8) дают два соотношения для вычисления μ и δ_0. Получено

$$\mu = 7.5,\quad \delta_0 = 0.46 \qquad (2.9)$$

Ряды, подобные (2.7), были построены для $\nu = 0$ (случай точечного источника) и $\nu = 2$. Для этих случаев параметры течения практически имеют значения (2.9).

Из определения μ следует, что

$$H = \frac{1.55}{g}(gq)^{2/3} \qquad (2.10)$$

Первое из равенств (1.3), рассмотренное при $\alpha \to \infty$, дает

$$\delta_0 = (H-h)\,/\,H$$

3. Тот факт, что параметры μ и δ_0 почти неизменны в промежутке ν [0,2], свидетельствует в пользу малой их чувствительности к способу подвода жидкости. Для подтверждения этого рассмотрим один предельный случай: найдем параметры плоского течения над горизонтальным дном со свободной границей, когда расход q фиксирован, скорость в некоторой точке свободной границы поддерживается равной нулю, а в бесконечности (положительной и отрицательной) течение становится однородным. Примем на свободной границе $\psi = 0$, а в точке, где скорость равна нулю, $\varphi = 0$.

Воспользуемся аппроксимацией и методом Т. В. Дэвиса [3]. Согласно [3], если в точке $W_1 = -i(\pi\,/\,\varkappa - 3q)$ (фиг. 3) — нуль функции $\chi = v^3e^{-3i\theta}$, то точки $W_2 = i(\pi\,/\,\varkappa - q)$ и $W_3 = i(\pi\,/\,\varkappa + q)$ — нуль и полюс этой функции, а $\operatorname{Im}\chi = 0$ на границе полуполосы $BB'D'D$.

Здесь v — модуль скорости; θ — угол вектора скорости с осью v, направленной вдоль дна, $\varkappa$ — параметр, определяющий положение W_1.

Пусть $\chi = a$ в точке B и $\chi = b$ в точке B'. Отображение верхней полуплоскости комплексной переменной χ на полуполосу $BB'D'D$ переменной W осуществляется функцией

$$W = -\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{\sqrt{\chi-a}-\sqrt{b-a}}{\sqrt{\chi-a}+\sqrt{b-a}} \qquad (3.1)$$

Между a и b можно установить связь через известное положение нуля функции в точке W_2:

$$a = b \cos^2 q\varkappa \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) имеем

$$\chi = a\left[1 + \operatorname{tg}^2(q\varkappa)\left(\frac{e^{\varkappa[\varphi+i(q-\psi)]}-1}{e^{\varkappa[\varphi+i(q-\psi)]}+1}\right)^2\right] \tag{3.3}$$

В (3.3) входят два параметра a и $\varkappa$, подлежащие определению из следующих условий:

$$\operatorname{Im}\left[\frac{1}{\chi}\left(i\frac{d\chi}{dw} - g\right)\right]_{\psi=0} = 0, \qquad \chi(0) = 0 \tag{3.4}$$

В аппроксимации [3] в виде (3.4) записывается интеграл Бернулли на свободной поверхности, а (3.5) соответствует требованию нуля скорости в нуле плоскости W.

Положив $\chi = \gamma + i\lambda$, перепишем (3.4)

$$\left(\lambda\frac{\partial\gamma}{\partial\psi} - \gamma\frac{\partial\lambda}{\partial\psi} - g\lambda\right)_{\psi=0} = 0 \tag{3.5}$$

Отделив в (3.3) действительную и мнимую части и подставив в (3.5), через громоздкие выкладки заметим, что (3.6) удовлетворяется, если

$$a\frac{g}{\varkappa}\sin(\varkappa q)\cos(\varkappa q) \tag{3.6}$$

Из (3.3), удовлетворяя (3.5), получим

$$\cos(q\varkappa) = {}^1/_2 \text{ или } \varkappa = {}^1/_3\pi q \tag{3.7}$$

Последнее видно непосредственно из требования $W_1 = 0$.

Из (3.2), (3.6) и (3.7) имеем

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}gq, \qquad b = v_0^3 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}gq$$

где v_0 — скорость в бесконечности. Но $q = hv_0$, поэтому

$$H = 1.54\frac{(gq)^{2/3}}{g}, \qquad h = 0.84\frac{(gq)^{2/3}}{g} \tag{3.8}$$

Здесь H и h — ординаты точек свободной поверхности в нуле и в бесконечности.

Сравнение (2.10) и (3.8) подтверждает мысль, что определяющим в рассмотренном выше течении является тот факт, что скорость на свободной границе в некоторой точке обращается в нуль.

4. Рассмотрим случай закрытого канала, когда BN (фиг. 1) — твердая горизонтальная стенка, ордината точки B которой фиксирована и равна H.

Начиная с некоторого расхода, точка отрыва жидкости M будет лежать на BN. При увеличении расхода она передвигается вправо. Уйдет ли точка отрыва при некотором конечном $q = q_0$ в бесконечность?

Отрыв, точнее сход, может происходить только по касательной к BN, так как при сходе под углом, отличным от нуля, скорость в точке M должна быть равной нулю (излом линии тока). Последнее невозможно в силу интеграла Бернулли, так как есть точка B, давление в которой отлично от нуля, а скорость равна нулю.

На свободной поверхности имеем

$$\left|\frac{dW}{dz}\right|^2 + 2gy = v_1^2 + 2gH \tag{4.1}$$

Здесь v_1 — скорость жидкости в точке схода.

Тем же способом, которым из (1.4) выводится (1.6), получим уравнение для формы свободной поверхности

$$\frac{1}{(1-\delta)^2}\left[1 - \frac{2(1-\delta)\delta''}{3} - \frac{\delta'^2}{3}\right] - 2p\left(\frac{1+\nu^2 e^{-\pi\zeta}}{1-e^{-\pi\zeta}}\right)^{3/2}\delta = \tau\left(\frac{1+\nu^2 e^{-\pi\zeta}}{1-e^{-\pi\zeta}}\right) \tag{4.2}$$

$$p = gH^3 / q^2, \qquad \tau = v_1^2 H^2 / q^2$$

Здесь δ имеет прежний смысл, τ — неизвестный параметр, штрихи означают дифференцирование по ζ.

Положение точки схода неизвестно, поэтому левая граница области ζ, в которой (4.2) справедливо, неизвестна.

Пусть ζ велико, так что экспонентами можно пренебречь в сравнении с единицей. Перепишем (4.2)

$$\frac{1}{(1-\delta)^2}\left[1-\frac{2(1-\delta)\delta''}{3}-\frac{\delta'^2}{3}\right]-2p\delta=\tau \tag{4.3}$$

Проинтегрировав (4.3) дважды, будем иметь

$$\int_0^\delta \frac{d\delta}{\sqrt{\delta\,[(1-\tau)-(p-\tau)\,\delta+p\delta^2]}}=\sqrt{3}\,\zeta \tag{4.4}$$

Обозначим асимптотическое значение δ через δ_0.

Интеграл в (4.4) в точке $\delta=\delta_0$ должен расходиться, так как при $\delta\to\delta_0$, $\zeta\to\infty$, а это означает, что у подынтегральной функции в этой точке полюс не ниже первого порядка или уравнение

$$(1-\tau)-(p-\tau)\delta_0+p\delta_0^2=0$$

имеет кратный корень. Условие кратности корня $(p-\tau)^2-4p(1-\tau)=0$ определяет значение неизвестного параметра

$$\tau=-p+2\sqrt{p} \tag{4.5}$$

Всегда $p\geqslant 0$. Из (4.5) видно, что $\tau=0$ в точках $p=0$ и $p=4$, а $\max\tau=1$ в точке $p=1$.

Если отрыв происходит в бесконечности (канал всюду заполняется), то $v_1=v_0=q_0/H$, $\tau_0=1$, а это значит, что $p_0=1$ или

$$gH^3/q_0^2=1 \tag{4.6}$$

Отрыв в точке B соответствует ранее рассмотренному случаю с открытым каналом (без стенки BN). Очевидно, что при этом $v_1=0$ или $p=4$. Из определения p и μ имеем $\mu=2p=8$. Раньше было получено значение $\mu=7.5$. Расхождение обусловлено тем, что (4.5) перестает быть точным вблизи B.

Область $0\leqslant p\leqslant 1$ соответствввует $q\geqslant q_0$, когда канал, тем более, заполняется всюду.

Критерий (4.6) не изменится, если в (1.3) учесть все более высокие степени δ, так как коэффициенты при них стремятся к нулю, когда $\zeta\to\infty$.

5. Приближенно форма свободной поверхности описывается выражением (2.7), где коэффициенты определены в (2.8).

Здесь рассматривались случаи, когда в бесконечности течение над горизонтальным дном вырождается в однородное, причем основной интерес был сосредоточен на вычислении главных характеристик — максимальной и минимальной ординат поверхности как функций расхода жидкости.

В более общей постановке вопрос о форме свободной поверхности над точечным источником рассмотрен в [4].

В работе [5] решена задача об ударе газовой струи о поверхность тяжелой жидкости. Замечательно то, что этим решением описывается и другое течение. Именно, если вместо стенки FOE (фиг. 1) поставить кривую стенку, на которой выполняется условие постоянства скорости, то свободная поверхность BD тяжелой жидкости опишется решением из [5]. Требование постоянства скорости заставляет незначительно сгладить стенку в окрестности точки O. Приведенные в [5] кривые показывают, что волны на поверхности существуют только вблизи вертикального «ствола» (источника) и быстро затухают с ростом x.

Многие из рассмотренных выше вопросов обсуждались с М. А. Гольдштиком, которому автор приносит свою благодарность.

Поступило 3 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. Изд-во АН СССР, 1962.
2. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы типа узких полос. Сб. Некоторые проблемы математики и механики. Изд-во АН СССР, 1961.
3. Дэвис Т. В. Гравитационные волны конечной амплитуды. Сб. «Теория поверхностных волн». Изд-во иностр. литер., 1959.
4. Сретенский Л. Н. Образование волн конечной амплитуды источником жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
5. Олмстед У., Райнор С. Образование впадины на бесконечной поверхности жидкости под действием струи несжимаемого газа. Изд-во иностр. литер. Сб. пер. «Механика», 1966, 2 (96)).