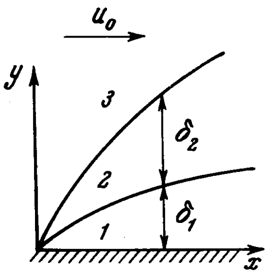
ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ

М. Е. ПОДОЛЬСКИЙ *(Ленинград)*

Как известно, пластинка, помещенная в поток вязкой жидкости, притормаживая жидкость в пограничном слое около стенки, вызывает во внешнем потоке так называемые вторичные течения, определяемые поперечной компонентой скорости v. Согласно теории пограничного слоя, величина v определяется ее значением на внешней границе пограничного слоя и не зависит от поперечной координаты y. Этот результат находится в противоречии с естественным требованием считать величину v равной нулю на бесконечности. Ниже приводится простое приближенное решение задачи по определению закона изменения составляющей скорости v вне пограничного слоя для случаяобтекания полубесконечной пластины.

1. Рассмотрим поток вязкой жидкости, обтекающей неподвижную полубесконечную пластину. Выделим в потоке три зоны (фиг. 1): пограничный слой (зона *1*, толщина δ_1), зона вторичных течений (зона *2*, толщина δ_2), внешний потенциальный поток (зона *3*). Пользуясь общепринятыми обозначениями, уравнения движения жидкости можно записать в виде

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\qquad(1.1)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$



Фиг. 1

Оценим соотношение между толщинами δ_1 и δ_2. Обозначив через U_0 скорость во внешнем потоке, продольную компоненту скорости во второй зоне можно представить в виде

$$u = U_0 + \Delta u$$

Введем теперь безразмерные переменные по формулам

$$u = U_0\bar{u},\quad \Delta u = \Delta u_0\Delta\bar{u},\quad v = v_0\bar{v},\quad p = p_0\bar{p},\quad x = L\bar{x},\quad y = \delta_2\bar{y}\qquad(1.2)$$

где Δu_0, v_0, p_0, L — характерные значения соответствующих размерных величин.

Величина v_0 имеет порядок значения v на внешней границе пограничного слоя. Следовательно, можно принять

$$v_0 = \delta_1 U_0/L\qquad(1.3)$$

С учетом (1.2) и (1.3) из уравнения неразрывности, применяя его к зоне 2, получим

$$\frac{\delta_1}{\delta_2}=\frac{\Delta u_0}{U_0}\qquad(1.4)$$

откуда, ввиду малости Δu_0 по сравнению с U_0, следует, что $\delta_2 \gg \delta_1$.

Учтем теперь, что, согласно теории пограничного слоя, можно положить

$$\delta_1^2 / L^2 = \nu / U_0L$$

Тогда, принимая во внимание формулы (1.2) — (1.4), первые два уравнения системы (1.1) перепишем в виде

$$\frac{\delta_1}{\delta_2}\bar{u}\frac{\partial\Delta\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2\bar{v}\frac{\partial\Delta\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\frac{p_0}{\rho U_0^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}+\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^3\frac{\partial^2\Delta\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}+\frac{\delta_1}{\delta_2}\left(\frac{\delta_1}{L}\right)^2\frac{\partial^2\Delta\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}$$
$$\frac{\delta_1}{L}\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{\delta_1}{\delta_2}\frac{\delta_1}{L}\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\frac{p_0}{\rho U_0^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\frac{\delta_1}{L}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2}+\left(\frac{\delta_1}{L}\right)^3\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}\qquad(1.5)$$

Из уравнений (1.5), в силу малости отношений δ_1/δ_2 и δ_1 / L, следует, что во второй зоне исходная система уравнений (1.1) может быть приближенно преобразована к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho U_0}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho U_0}\frac{\partial p}{\partial y},\qquad\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\qquad(1.6)$$

Введем переменные $\xi = x,\ \eta = y - \delta_1(x)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{d\delta_1}{dx}\frac{\partial}{\partial\eta},\qquad\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\eta}\qquad(1.7)$$

Принимая во внимание оценки

$$\xi \sim L, \quad \eta \sim \delta_2, \qquad d\delta_1 / dx \sim \delta_1 / L$$

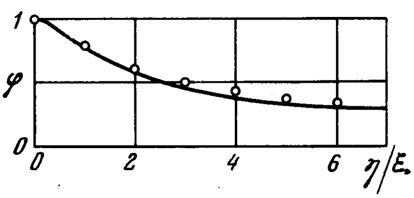
и учитывая малость величины δ_1 / δ_2, получим из (1.7)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Последние соотношения дают возможность переписать уравнения (1.6) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{\rho U_0}\frac{\partial p}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{1}{\rho U_0}\frac{\partial p}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \tag{1.8}$$

Система уравнений (1.8) описывает движение жидкости в зоне вторичных течений. Эти же уравнения могут служить и для исследования возмущенного движения жидкости в потоке перед пластиной (в этом случае следует принять $\delta_1 = 0$, т. е. $\xi = x, \eta = y$).



Фиг. 2

2. Исключая из первого и третьего уравнений системы (1.8) величину u, получим

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{1}{\rho U_0}\frac{\partial p}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho U_0}\frac{\partial p}{\partial \xi} \tag{2.1}$$

Решение системы (2.1) должно удовлетворять условиям

$$|v| < \infty \text{ при } \eta \to \infty; \quad v(\xi < 0, \eta = 0) = 0;$$
$$v(\xi > 0, \eta = 0) = \alpha \sqrt{\nu U_0}\, \xi^{-1/2} \tag{2.2}$$

При написании последнего из условий (2.2) учтено, что, согласно теории пограничного слоя, скорость v на внешней границе слоя $y = \delta_1$ (или $\eta = 0$) обратно пропорциональна корню из продольной координаты. Коэффициент пропорциональности может быть взят равным $\alpha = 0.86$ [1].

Граничные условия (2.2) дают основания считать, что $v \to 0$ и $p \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$. Это позволяет предположить существование интегралов

$$v^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi, \eta)\, e^{i\beta\xi}\, d\xi, \qquad p^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \eta) e^{i\beta\xi} d\xi \qquad (i = \sqrt{-1})$$

осуществляющих преобразование функций $v(\xi, \eta)$ и $p(\xi, \eta)$ по Фурье.

Преобразуя систему (2.1) по Фурье и исключая p^*, получим

$$d^2 v^* / d\eta^2 - \beta^2 v^* = 0 \tag{2.3}$$

причем функция v^*, в силу (2.2), должна удовлетворять условиям (2.4)

$$v^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{i\beta\xi} v(\xi, 0)\, d\xi = \alpha \left(\frac{\nu U_0}{2}\right)^{1/2} e^{1/4\pi i} \beta^{-1/2} \quad \text{при } \eta = 0; \ |v^*| < \infty \quad \text{при } \eta \to \infty$$

Решение уравнения (2.3) при условиях (2.4) может быть записано в виде

$$v^* = \alpha\ {}^1/_2 \nu U_0{}^{1/2} e^{\ {}^1/_4 \pi i} \beta^{-1/2} e^{-|\beta|\eta} \tag{2.5}$$

Отсюда получим

$$v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\xi} v^*(\beta, \eta)\, d\beta = \alpha \left(\frac{\nu U_0}{2\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \beta^{-1/2} e^{-\beta\eta} (\cos \xi\beta + \sin \xi\beta)\, d\beta$$

или [см. [2]]

$$v = \frac{\alpha \sqrt{\nu U_0}}{(\xi^2)^{1/4}} \varphi(\xi, \eta) = \alpha \sqrt{\nu U_0}\, \xi^{-1/2} \varphi(\xi, \eta) \tag{2.6}$$

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\cos [{}^1/_2 \operatorname{arc\,tg} \xi/\eta)] + \sin [{}^1/_2 \operatorname{arc\,tg} \xi/\eta]}{(1 + \eta^2/\xi^2)^{1/4}}$$

Формула (2.6) определяет закон изменения поперечной компоненты скорости за пределами пограничного слоя. Функция $\varphi(\xi, \eta)$ характеризует степень уменьшения величины v по сравнению с ее значением на внешней границе пограничного слоя.

Оценим еще порядок толщины δ_2 зоны вторичных течений. При малых φ формула (2.6) дает

$$\eta = \frac{1}{2\varphi^2}\xi$$

так что, например, для $\varphi = 0.01$ имеем $\eta = 5000\,\xi$. Это существенно больше толщины пограничного слоя.

Задача может быть решена и другим способом,— путем отыскания решений автомодельного типа.

3. Сравним полученное решение с точным решением задачи об обтекании пластинки, которое было дано Н. Е. Кочиным [3]. Результаты расчетов для частного случая $\xi = 25\nu / U_0$, выполненных путем удержания двух первых членов рядов в решении Н. Е. Кочина, приведены в работе [4]. На фиг. 2 представлено (кружки) отношение поперечной составляющей скорости к ее максимальному значению в функции от поперечной координаты (отсчитывается от точки экстремума), вычисленное по данным из [4]. Там же сплошной линией дана кривая величины $\varphi(\xi, \eta)$ по формуле (2.6). Рассмотрение фиг. 2 обнаруживает хорошее совпадение между обоими решениями.

Поступило 22 IV 66

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, 1962.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
3. Кочин Н. Е. Собрание сочинений, т. II. Изд-во АН СССР, 1948.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II, Физматгиз, 1963.

О НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЯХ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. И. ПЕТУХОВ

(Новосибирск)

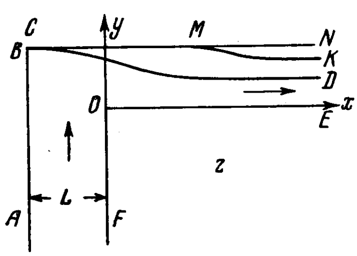
Приводится решение задачи о низком плоском «фонтане» тяжелой жидкости над горизонтальным дном. Использован приближенный метод конформного отображения близких областей, развитый М. А. Лаврентьевым [1] и Н. Н. Моисеевым [2].

1. Рассмотрим плоское течение тяжелой идеальной жидкости, геометрия которого представлена на фиг. 1.

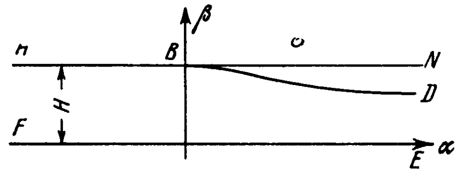
Здесь CA, OF, OE — твердые полубесконечные стенки, BD — свободная поверхность, BN — касательная к ней в точке B.

Скорость в точке B равна нулю. Неизвестные ординаты точек B и D обозначим через H и h.

В задаче ищется форма свободной поверхности и параметр H как функция расхода q. Характерным для рассматриваемого течения является то, что априори не известны координаты ни одной точки поверхности.



Фиг. 1



Фиг. 2

Введем в плоскости течения Oxy комплексное переменное z и отобразим полосу с шириной H в плоскости вспомогательного комплексного переменного $\sigma = \alpha + i\beta$ (фиг. 2) на четырехугольник $ABNEOF$ плоскости z. Соответствие точек видно из фиг. 1 и 2. Отображение осуществляется функцией (1.1)

$$z = \frac{iL}{H}\left[\ln\frac{1+\Phi/\nu}{1-\Phi/\nu} - \frac{i}{\nu}\ln\frac{1+i\Phi}{1-i\Phi}\right], \quad \Phi = \left(\frac{\nu^2 e^{-k\sigma}-1}{e^{-k\sigma}+1}\right)^{1/2}, \quad k = \frac{\pi}{H}, \quad \nu = \frac{L}{H}$$