

РАСЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ НЕДОРАСШИРЕННОЙ СТРУИ С ПРЕГРАДОЙ

Н. Е. ХРАМОВ

(Москва)

При помощи метода интегральных соотношений [1] и метода характеристик строится схема численного решения задачи о взаимодействии сверхзвуковой недорасширенной струи с преградой. Приводятся результаты расчетов.

1. Пусть осесимметричная сверхзвуковая струя, истекающая из сопла в среду с пониженным давлением, например, в спутный сверхзвуковой поток, набегающий на сферу с центром, лежащим на оси симметрии и находящимся на расстоянии C от среза. При этом будет реализовываться структура течения, изображенная на фиг. 1. Здесь KL — ударная волна («висячий скачок»), AC — тангенциальный разрыв (контактная поверхность), отделяющий газ струи от внешнего потока; AB — ударная волна во внешнем потоке. Если струя истекает в покоящуюся среду, то AB отсутствует, а AC превращается в свободную поверхность. При истечении же струи в вакуум газ расширяется без скачков уплотнения. При торможении струи перед сферой возникает отошедшая ударная волна PL , за которой имеет место смешанное течение.

Поток ниже «висячего скачка» на начальном участке струи, в силу свойств сверхзвукового течения, зависит только от исходных параметров на срезе сопла и не зависит от внешних условий. Поэтому, предположив, что точка c на отошедшей ударной волне, из которой выходит характеристика cd , отделяющая минимальную область влияния, лежит ниже точки встречи «висячего скачка» с отошедшей ударной волной, можно будет искать решение в области $PcdM$ независимо от того, вытекает ли струя в спутный поток, в покоящуюся среду или в вакуум.

Поместим начала систем координат декартовой x, y и сферической r, θ ($x = -r \cos \theta, y = r \sin \theta$) в центре сферы и предположим, что поле потока внутри струи задано в виде

$$w_+ = f_1(r, \theta), \quad \phi = f_2(r, \theta)$$

Здесь w_+ — значение модуля скорости, ϕ — угол наклона скорости к оси симметрии, f_1, f_2 — непрерывные функции r, θ .

Требуется определить форму и положение ударной волны и значение газодинамических параметров на сфере.

Отнесем скорость w к критической скорости a_* , плотность ρ — к плотности торможения в невозмущенном потоке ρ_0 , давление p — к $\rho_0 a_*^2$, линейные размеры — к радиусу сферы R^* . Тогда, вводя интеграл Бернулли и функцию тока ψ , систему уравнений газовой динамики в составляющих сферических координат можно представить [1] в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial \theta} &= F, & \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= r\rho \left(v \frac{dr}{d\theta} - ru \right) \sin \theta, & \psi &= \psi(\psi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь

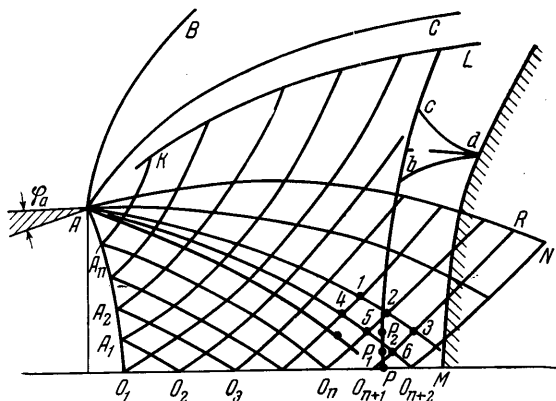
$$G = r\rho uv \sin \theta, \quad Q = r^2 [p + \rho u^2] \sin \theta,$$

$$F = r[2p + \rho v^2] \sin \theta, \quad H = r\rho v \sin \theta, \quad R = r^2 \rho u \sin \theta$$

$$p = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w^2 \right) \rho, \quad \rho = \left(\frac{\kappa + 1}{2\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \Phi^{-\frac{1}{\kappa - 1}} \tau$$

$$\tau = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}, \quad \Phi = \frac{p}{\rho^\kappa}, \quad w^2 = u^2 + v^2$$

Φ — энтропийная функция, u, v — составляющие скорости вдоль r, θ .



Фиг. 1

Обозначим через ε расстояние от сферы до ударной волны вдоль луча $\theta = \text{const}$. Тогда из геометрических соображений будем иметь

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = -(1 + \varepsilon) \operatorname{ctg}(\theta + \sigma) \quad (1.2)$$

где σ — угол наклона ударной волны к оси симметрии. Граничные условия запишутся в следующем виде:

на теле $r = 1$

$$u = 0, \psi = 0, \varphi = \varphi(0) = \text{const}$$

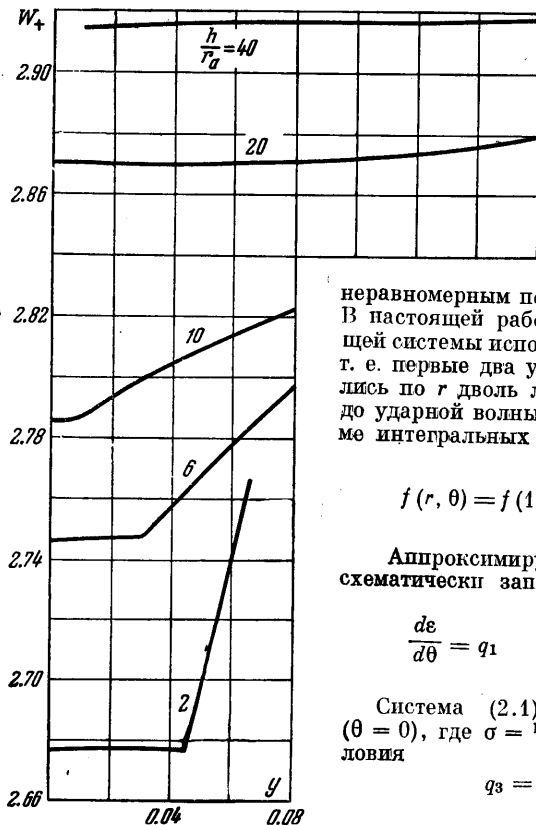
$$\varphi(0) = \frac{2}{\kappa + 1} \frac{1}{w_+^{2\kappa}} \left\{ w_+^2 - \frac{\kappa^2 - 1}{4\kappa} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \right) \right\} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \right)^{-1}$$

на ударной волне $r = 1 + \varepsilon(\theta)$

$$u = \omega_y \sin \theta - \omega_x \cos \theta, \quad \omega_x = w_+ \cos(\sigma - \theta) \cos \sigma + \frac{\sin \sigma}{w_+ \sin(\sigma - \theta)} \beta$$

$$v = \omega_x \sin \theta + \omega_y \cos \theta, \quad \omega_y = w_+ \cos(\sigma - \theta) \sin \sigma - \frac{\cos \sigma}{w_+ \sin(\sigma - \theta)} \beta$$

$$p = \left[\frac{2w_+^2 \sin^2(\sigma - \theta)}{\kappa + 1} - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \right) \right] \gamma, \quad \rho = w_+^2 \sin^2(\sigma - \theta) \frac{\gamma}{\beta}$$



Фиг. 2

$$\beta = \left[1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \cos^2(\sigma - \theta) \right] \frac{1}{\left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_+^2 \right)^{\kappa - 1}}$$

Здесь ω_x, ω_y — составляющие скорости w вдоль x и y .

2. Задача решается методом интегральных соотношений, который для расчета обтекания сферы неравномерным потоком впервые был применен в [2]. В настоящей работе для построения аппроксимирующей системы использовалась та же схема, что и в [2], т. е. первые два уравнения системы (1.1) интегрировались по r вдоль луча $\theta = \text{const}$ от поверхности сферы до ударной волны, а подынтегральные функции в системе интегральных соотношений представлялись в виде

$$f(r, \theta) = f(1, \theta) + [f(1 + \varepsilon, \theta) - f(1, \theta)] \frac{r - 1}{\varepsilon}$$

Аппроксимирующая система первого приближения схематически записывается следующим образом:

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = q_1, \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = q_2, \quad \frac{dv_0}{d\theta} = \frac{q_3}{1 - v_0^2} \quad (2.1)$$

Система (2.1) интегрируется от оси симметрии ($\theta = 0$), где $\sigma = 1/2 \pi$, $v_0 = 0$, а ε определяется из условия

$$q_3 = 0 \text{ при } 1 - v_0^2 = 0 \quad (2.2)$$

которое должно выполняться в звуковой точке на теле, где, в силу аналитичности контура, градиент скорости $dv_0/d\theta$ должен оставаться конечным.

Поскольку поток в струе нельзя задать конечными соотношениями, приходится одновременно с задачей обтекания решать задачу определения параметров набегающей струи. Для этой цели используется метод характеристик [3] в переменных Эйлера ($\beta = \sqrt{M^2 - 1}$, $\xi = \operatorname{tg} \theta$).

На срезе конического сопла (фиг. 1) с радиусом выходного сечения r_a и углом полураспределения φ_a поток предполагается известным на дуге окружности AO_1 и равным потоку от пространственного сверхзвукового источника [2] (для профилированного сопла $\varphi_a = 0$ и поток на срезе равномерный). Дуга окружности AO_1 разбивается на n точек, в которых величина $\beta_a = \sqrt{M_a^2 - 1} = \text{const}$ задана, а ξ, x, y вычисляются по формулам

$$\xi_i = \text{tg} \left(\frac{\varphi_a}{n} i \right), \quad x_i = - \left[C + R_a \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_i^2}} \right) \right] \quad (C = h + 1)$$

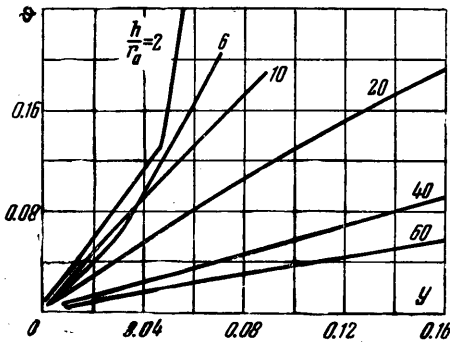
$$y_i = \sqrt{R_a^2 - [x_i + (C + R_a)]^2}, \quad R_a = \frac{r_a}{\sin \varphi_a} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Здесь h — расстояние по оси симметрии от среза сопла до преграды.

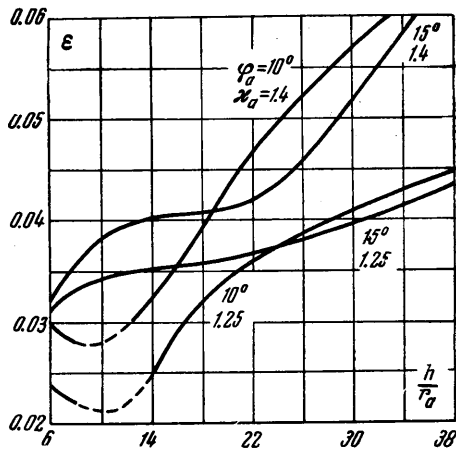
Расчет начинается от начальной окружности и проводится по характеристикам второго семейства A_1O_2, A_2O_3, \dots . Формулы для расчета точки в поле, на оси симметрии и в угловой точке можно найти, например, в [4].

Обозначим координату точки пересечения отошедшей ударной волны с осью симметрии через $x_p = -(1 + \varepsilon_0)$ (ε_0 — отход ударной волны на оси симметрии), а через x_0 — координату осевой точки последней рассчитываемой характеристики. В процессе счета характеристики сравниваются $|x_p|$ и $|x_0|$. Как только удовлетворяется неравенство $|x_0| < |x_p|$, при помощи квадратичной интерполяции по точкам O_n, O_{n+1}, O_{n+2} определяется w_+ непосредственно перед ударной волной (в точке P), и начинается интегрирование аппроксимирующей системы (2.1). В дальнейшем расчет характеристик второго семейства проводится от начальной окружности до характеристики первого семейства $O_{n+2}N$. Параметры w_+ и φ определяются по шести точкам характеристик интерполяцией по двум переменным, например, для точки P_2 — по точкам 1–6.

Во время интегрирования аппроксимирующей системы проверяется условие (2.2), в случае невыполнения которого процесс прерывается с заданием нового значения ε_0 .



Фиг. 3



Фиг. 4

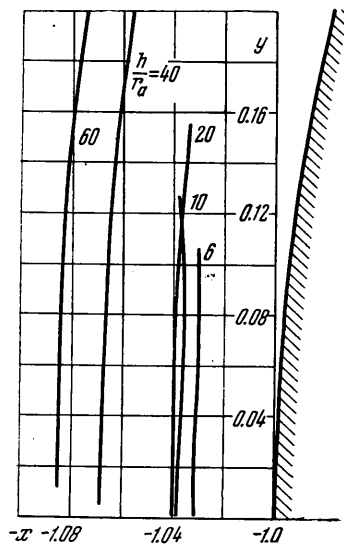
3. Приведем некоторые результаты расчета, проведенного по изложенной схеме на ЭВМ.

При истечении сверхзвуковой струи в среду с пониженным давлением газ расширяется в центрированной волне разрежения $AO_{n+1}, AO_{n+2}, \dots$, исходящей (фиг. 1) из точки A . Первая характеристика волны разрежения (будем называть ее в дальнейшем начальной характеристикой) разделяет два течения: течение от источника или равномерный поток для профилированного сопла ниже AO_{n+1} и течение в волне разрежения выше AO_{n+1} . Рассматривая параметры струи в сечениях $x = \text{const}$, при удалении от среза сопла в сторону положительного направления оси x по характеру неравномерности можно выделить две области: область 1 от среза сопла до $x = x_{O_{n+1}}$, где параметры от оси симметрии до начальной характеристики по y меняются слабо (течение от источника) или совсем не меняются для профилированного сопла, выше же характеристики имеет место резкое возрастание, соответствующее волне разрежения. На начальной характеристике производные от параметров терпят разрыв, т. е. профили w_+ и φ имеют излом. Угол излома увеличивается с приближением к срезу сопла.

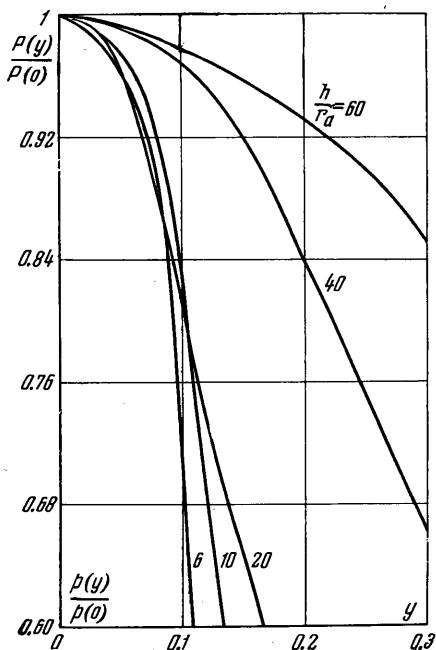
В области 2 от $x = x_{O_{n+1}}$ до $x = \infty$ на характеристике первого семейства $O_{n+1}R$ производные от параметров тоже терпят разрыв, но величина его быстро уменьшается при удалении от оси x . Поэтому изменение параметров в сечениях $x = \text{const}$ здесь более плавное.

На фиг. 2,3 приводятся характерные профили w_+ и ϑ непосредственно перед ударной волной, в частности, для случая $M_a = 5.194$, $\kappa_a = 1.25$, $\varphi_a = 10^\circ$, $r_a/R^\circ = 0.05$ и различных h .

На фиг. 4 приводится зависимость отхода ударной волны ε от расстояния h между срезом сопла и преградой при $M_a = 5.194$ и $r_a/R^\circ = 0.05$ для различных значений φ_a и κ_a . В области 2 отход ударной волны при удалении преграды от среза сопла увеличивается, стремясь к предельному случаю, когда происходит обтекание сферы равномерным потоком с $M = \infty$. Это еще раз подтверждает [2], как сильно влияет неравномерность по ϑ на течение за ударной волной.



Фиг. 5



Фиг. 6

В области 1 отход ударной волны зависит от степени неравномерности по ϑ в слое газа между осью симметрии и начальной характеристикой, которая определяется исходным углом конусности φ_a . Анализ результатов расчета, проведенного для $M_a = 4.4, 5.194$; $\kappa_a = 1.25-1.4$, $\varphi_a = 6-15^\circ$, $r_a/R^\circ = 1-0.05$, показывает, что для заданных M_a , κ_a , r_a/R° существует $\varphi_a = \varphi_a'$ такой, что при приближении преграды к срезу сопла значение ε будет уменьшаться, если $\varphi_a > \varphi_a'$, и будет увеличиваться, если $\varphi_a < \varphi_a'$. Для случая, приведенного на фиг. 4, $10^\circ < \varphi_a' < 15^\circ$.

На фиг. 5 приводится форма и положение ударных волн для случая $M_a = 5.194$, $\kappa_a = 1.4$, $\varphi_a = 15^\circ$, $r_a/R^\circ = 0.05$ и различных h .

На фиг. 6 показано распределение давления $p(y)/p(0)$ по сфере.

Автор благодарит научного сотрудника И. И. Куклину за составление и отладку программы.

Поступило 2 XII 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М. О расчете обтекания осесимметричных тел с отходящей ударной волной на электронной счетной машине. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
2. Храмов Н. Е. Расчет обтекания сферы неравномерным потоком газа. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
3. Элерс Ф. Э. Метод характеристик для изоэнергетических сверхзвуковых течений, приспособленный к быстродействующим цифровым вычислительным машинам: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. 1960, лит. 1 (59).
4. Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шуликин Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. ВЦ АН СССР, 1961.