

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ

Т. А. ГИРШОВИЧ

(Москва)

Струю, вытекающую из сопла конечных размеров под углом к безграничному потоку, как и обычную струю, можно рассматривать состоящей из начального, переходного и основного участков; причем, начальный участок содержит ядро постоянного полного давления и две зоны смешения — наружную и внутреннюю [1].

Работа [2] содержит решение для струи, вытекающей из бесконечно тонкой щели под углом к безграничному потоку, то есть, решение для основного участка струи, вытекающей из щели конечной ширины. Ниже предлагается решение для начального участка струи, направленной под прямым углом к безграничному сносящему потоку. Схема начального участка такой струи показана на фиг. 1. Из решения как частный случай получаются известные результаты для обычной затопленной струи. Теоретическое решение для начального и основного участков сравнивается с экспериментальными данными. При этом дается один из возможных методов определения оси струи, с помощью которого были рассчитаны теоретические кривые в основном участке, и рассматривается вопрос о сращивании решений для начального и основного участков.

Задача о начальном участке, так же как задача, рассмотренная в [2], решается в криволинейных ортогональных координатах; за ось абсцисс принимается искривленная ось струи, а за ось ординат — нормаль к этой оси. Такой выбор системы координат позволяет использовать для отыскания решения в наружной и внутренней зонах смешения уравнения пограничного слоя.

При решении задачи принимаются следующие допущения: 1) искривленная ось струи есть нулевая линия тока, 2) радиус кривизны искривленной оси в начальном участке струи постоянен, 3) в ядре постоянного полного давления поперечная скорость значительно меньше продольной, 4) в несмыкающихся между собой наружной и внутренней зонах смешения пути смешения разные, путь смешения пропорционален ширине зоны смешения, а коэффициент пропорциональности один и тот же, 5) в каждой из зон смешения профили скорости поперек зоны смешения подобны.

Условия на внешней границе, так же, как и в [2], определяются из обтекания струи как твердой криволинейной стенки безграничным потенциальным потоком. При этом, исходя из допущения 2, скорость и давление на наружной границе струи определяются из бесциркуляционного обтекания цилиндра радиуса R безграничным потоком, имеющим скорость V_∞ . На внутренней границе струи скорость и давление принимаются равными нулю (давление отсчитывается от статического давления за струей p_0).

Так как на струю в сносящем потоке действует поперечный градиент давления, делающий такую струю несимметричной относительно оси, ось струи, которая, согласно допущению 1, является нулевой линией тока, не обязательно должна выходить из середины сопла, и ее положение на срезе определяется, исходя из условия, что в конце начального участка границы ядра должны сходиться в одной точке.

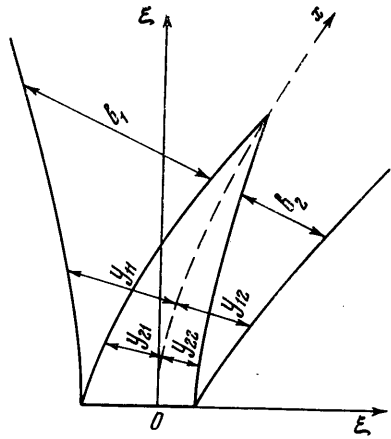
1. В ядре постоянного полного давления движение жидкости можно считать потенциальным, и, следовательно, можно использовать уравнение Бернулли. Это уравнение, записанное с учетом допущения 3, вместе с условием поперечного равновесия и уравнением неразрывности дает необходимое число уравнений для отыскания решения задачи в ядре.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{u_0^2}{2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{u_1^2}{R}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $u_0^2/2$ — полное давление в ядре (давление отсчитывается от атмосферного статического давления p_0).

Систему (1.1) требуется решить при следующих граничных условиях:

$$v_1 = 0 \text{ при } y = 0, \quad u_1 = u_0 \text{ при } y = -b_{02} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Дифференцирование обеих частей первого уравнения (1.1) по y с учетом второго уравнения дает соотношение для определения u_1 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{u_1}{R}$$

Интегрирование этого уравнения с использованием второго граничного условия дает

$$u_1 = u_0 \exp[-b_{02} + y/R] \quad (1.3)$$

Поперечная скорость получается в результате интегрирования уравнения неразрывности с использованием первого из условий (1.2):

$$v_1 = -\int_0^y \frac{\partial u_1}{\partial x} dy + C = C$$

Согласно граничному условию, постоянная C равна нулю. Таким образом, получаем, что поперечная скорость в ядре равна нулю.

2. В наружной и внутренней зонах смещения уравнения движения в выбранных выше криволинейных координатах имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{u^2}{R}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Для решения задачи необходимо решить систему уравнений (2.1) при следующих граничных условиях

$$u = u_{\delta, i}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad p = p_{\delta, i} \quad \text{при } y = y_{1i}, \quad u = u_{1i} \quad \text{при } y = y_{2i} \quad (2.2)$$

Согласно допущению 5, примем, что профили скорости в зонах смещения имеют вид

$$U^{\circ} = \frac{u - u_{\delta, i}}{u_{1i} - u_{\delta, i}} = 3\eta_i^2 - 2\eta_i^3, \quad \left(\eta_i = \frac{y_{1i} - y}{y_{1i} - y_{2i}}, \quad y_{1i} - y_{2i} = b_i \right) \quad (2.3)$$

Здесь $i = 1$ для наружной зоны смещения, $i = 2$ для внутренней зоны смещения, $u_{\delta, i}$ — скорость на внешней границе зоны смещения, u_{1i} — скорость на границе ядра постоянного полного давления, b_i — ширина зоны смещения.

Так как u_{1i} известно из решения для ядра постоянного полного давления, то для отыскания решения в зонах смещения требуется определить величины b_i и одну из величин y_{1i} или y_{2i} . Уравнениями для определения b_i и y_{2i} служат два интегральных соотношения, получаемых посредством интегрирования поперек зоны смещения первого уравнения движения системы (2.1) и уравнения энергии, полученного путем умножения первого уравнения системы (2.1) на продольную скорость u . Профиль касательных напряжений определяется по формуле Прандтля

$$\tau_i = \mp \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.4)$$

После интегрирования получаем два уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} b_i \int_0^1 u^2 d\eta_i - u_0 (u_{1i} - u_{\delta, i}) y_{2i}' \exp \left[-\frac{b_{02} + y_{2i}}{R} \right] + u_{\delta, i} \frac{d}{dx} b_i \int_0^1 u d\eta_i = \\ = \frac{d}{dx} b_i \int_0^1 \frac{p}{\rho} d\eta_i + y_{2i}' \frac{p_{1i}}{\rho} - y_{1i}' \frac{p_{\delta, i}}{\rho} \\ -\frac{d}{dx} b_i \int_0^1 u^3 d\eta_i - u_{\delta, i}^2 \frac{d}{dx} b_i \int_0^1 u d\eta_i - y_{2i}' (u_{1i}^2 - u_{\delta, i}^2) u_0 \exp \left[-\frac{b_{02} + y_{2i}}{R} \right] = \\ = 2b_i \int_0^1 \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} d\eta_i + \frac{2}{\rho} \int_0^1 u \frac{\partial \tau}{\partial \eta_i} d\eta_i \end{aligned}$$

После вычисления входящих в эти выражения интегралов и проведения некоторых небольших преобразований получается следующая система двух обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$f_1 b_i' + f_2 y_{2i}' + f_3 = 0, \quad f_4 b_i' + f_5 y_{2i}' + f_6 = \pm \frac{108}{35} \beta^2 (u_{1i} - u_{\delta, i})^3, \quad (2.5)$$

$$\left(\beta^2 = \frac{l_1}{b_1^2} = \frac{l_2}{b_2^2} \right)$$

$$f_1 = \frac{9}{70} u_{\delta, i}^2 - \frac{13}{35} u_{1i}^2 + \frac{17}{70} u_{1i} u_{\delta, i} + \frac{bi}{35R} (6u_{1i}^2 + 20u_{\delta, i}^2 + 9u_{1i} u_{\delta, i})$$

$$f_2 = \frac{bi}{70R} (78u_{1i}^2 + u_{1i} u_{\delta, i} + 26u_{\delta, i}^2) - u_0 (u_{1i} - u_{\delta, i}) \exp \left[-\frac{b_{02} + y_{2i}}{R} \right]$$

$$f_3 = \frac{u_{\delta, i}'}{70} \left[b_i (53u_{\delta, i} - 18u_{1i}) + \frac{b_i^2}{R} (40u_{\delta, i} + 9u_{1i}) \right]$$

$$f_4 = -\frac{1}{140} (43u_{1i}^3 + 113u_{\delta, i}^3 + 27u_{1i}^2 u_{\delta, i} + 97u_{1i} u_{\delta, i}^2) + \\ + \frac{bi}{R} \left(\frac{155}{462} u_{1i}^3 - \frac{241}{385} u_{1i}^2 u_{\delta, i} + \frac{2033}{770} u_{1i} u_{\delta, i}^2 - \frac{1}{110} u_{\delta, i}^3 \right)$$

$$f_5 = -u_0 (u_{1i}^2 - u_{\delta, i}^2) \exp \left[-\frac{b_{02} + y_{2i}}{R} \right] + \frac{bi}{R} \left(\frac{43}{28} u_{1i}^3 + \frac{27}{35} u_{1i}^2 u_{\delta, i} + \right. \\ \left. + \frac{151}{140} u_{1i} u_{\delta, i}^2 + \frac{43}{70} u_{\delta, i}^3 \right)$$

$$f_6 = \frac{u_{\delta, i}'}{140} (59u_{\delta, i}^2 + 27u_{1i}^2 - 86u_{1i} u_{\delta, i}) + \frac{b_i^2}{11R} \left(\frac{61}{21} u_{1i}^2 + \frac{523}{21} u_{1i} u_{\delta, i} - \frac{37}{6} u_{\delta, i}^2 \right) u_{\delta, i}'$$

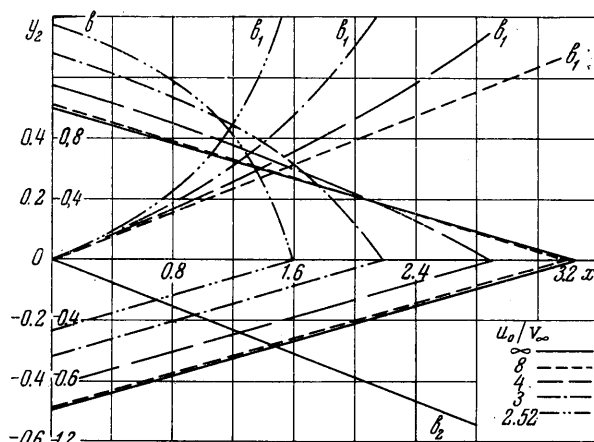
При $V_{\infty} \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ из уравнений (2.5) получается решение для зоны смешения обычной затопленной струи

$$b = 48\beta^2 x, \quad y_2 = 1/2 - 624/35\beta^2 x$$

Уравнения (2.5) интегрировались на электронной вычислительной машине, причем радиус кривизны оси струи определялся по формуле

$$R = 2 \left[\ln \frac{(u_0/V_{\infty})^2}{(u_0/V_{\infty})^2 - 1} \right]^{-1}$$

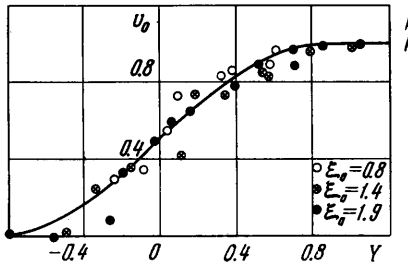
полученной из условия, что на срезе сопла давление на наружной границе ядра равно давлению торможения сносящего потока.



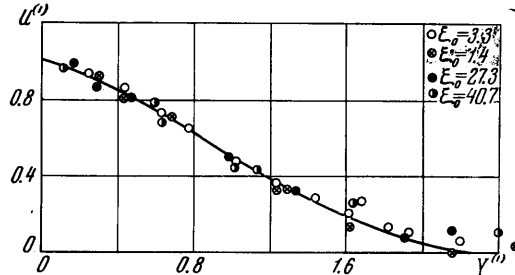
Фиг. 2

На фиг. 2 приведены рассчитанные по формулам (2.5) графики изменения границ ядра постоянного полного давления и ширины зон смешения для $\beta = 0.09$ и для разных величин отношения скорости струи к скорости сносящего потока. Обращает на себя

внимание, что ширина внутренней зоны смешения одинакова для всех u_0/V_∞ . Как указывалось выше, величина b_{02} определялась из условия, что границы ядра в конце начального участка должны сходиться в одной точке. Определение b_{02} и, тем самым, разделение начального импульса между наружной и внутренней частями струи дает возможность найти величину K_2 для решения задачи об основном участке струи [2], которая оставалась неизвестной.



Фиг. 3

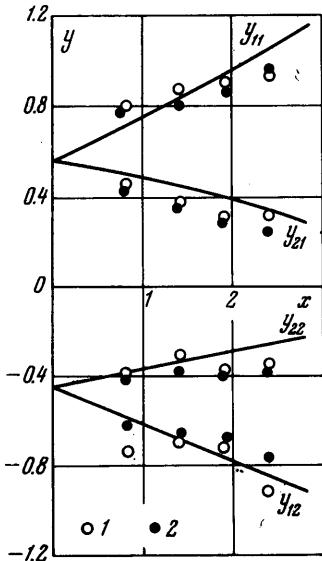


Фиг. 4

3. Для отыскания оси струи, согласно [2], рассматривалась функция тока, полученная сложением функций тока безграничного потока и системы трех источников, расположенных в плоскости симметрии. Пять получаемых при этом независимых параметров (три значения мощности источников и два значения координат этих источников) определялись на электронной вычислительной машине из условия минимума функционала, получаемого с помощью выражения (17) работы [2]. Этот функционал имеет вид

$$\Phi = \int_0^{y_1} \left\{ \frac{2p_8}{\rho V_\infty^2} + \frac{33}{56} \frac{\delta_2}{R} \frac{u_m^2}{V_\infty^2} - 2 \frac{\delta_1}{R} \frac{u_m^2}{V_\infty^2} \left[\frac{7}{16} \frac{u_8^2}{u_m^2} + \frac{15}{56} \frac{u_8}{u_m} + \frac{33}{112} \right] \right\}^2 d\xi \quad (3.1)$$

Минимизация функционала производилась методом случайного поиска [3]. После получения параметров источников (стоков) и определения, тем самым, формы оси струи необходимо было произвести сращивание решений для начального и основного участков. Такое сращивание производилось, исходя из условия, что картина течения в струе должна быть непрерывной. Поэтому сращивание проводилось по величинам скорости на оси струи в конце начального участка и в начале основного, а переходный участок схематически заменялся переходным сечением.

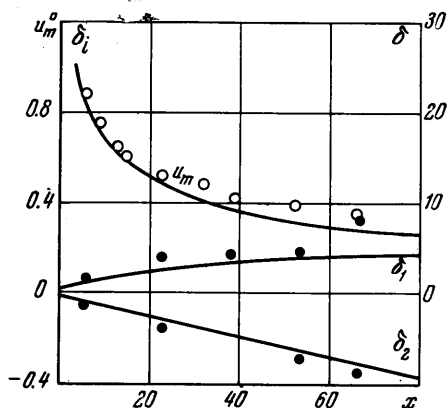


Фиг. 5

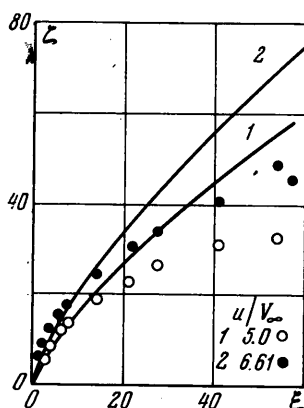
4. Сравнение теоретического решения с экспериментальными данными. Для апробирования теоретического решения было проведено экспериментальное исследование начального и основного участков струи в сносящем потоке. Источником струи для исследования основного участка служило сопло шириной 1.5 мм и длиной 300 мм, а для исследования начального участка — сопло шириной 5 мм и длиной 100 мм. Сносящий поток создавался аэродинамической трубой диаметром 440 мм. Для того, чтобы след за соплом не влиял на картину течения в струе, на уровне среза параллельно сносящему потоку устанавливался экран, в котором была прорезана щель для сопла. При исследовании основного участка направление сносящего потока при подходе к струе проверялось с помощью шелковинок. Для исследования начального участка был изготовлен экран, поперек которого были проложены трубки с

просверленными в них отверстиями, являющимися приемниками статического давления. С помощью имеющегося на экране элерона давления в верхней и нижней части у носка экрана устанавливались одинаковыми, и, таким образом, нулевая линия тока сносящего потока была направлена параллельно экрану и под прямым углом к выходящей из сопла струе. Для того, чтобы не нарушалась двумерность течения, по бокам струи ставились ограничительные шайбы.

Эксперимент проводился при следующих отношениях скорости струи к скорости сносящего потока $u_0/V_\infty = 9.35, 6.72, 4.83, 3.23$ в начальном участке и $9.81, 6.61, 5, 3.36$ и 2.52 — в основном участке. Замеры производились трехтрубчатым насадком. В процессе эксперимента определялись полное давление, динамическое давление и направление потока.



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 3 и 4 приводится сравнение теоретического и экспериментального относительных профилей скорости в зонах смешения начального и в основном участке при отношении скорости струи к скорости сносящего потока 4.83 и 5 соответственно. Профили скорости построены в общепринятых координатах. При этом вводятся следующие обозначения:

$$U^{(1)} = \frac{u - u_{\delta, i}}{u_m - \delta_{\delta, i}}, \quad Y^o = \frac{y_{0.5} - y}{y_{0.1} - y_{0.9}}, \quad \frac{y}{y_{0.5}} = Y^{(1)}$$

Здесь $y_{0.1}, y_{0.9}$ и $y_{0.5}$ — значения y , при которых скорость равнялась $0.1u_0, 0.9u_0$ и $0.5u_0$ для начального участка и $y_{0.5}$ — значение y , при котором скорость равна $0.5u_m$ для основного участка. Сравнение показывает удовлетворительное совпадение экспериментального профиля с теоретическим и подтверждает возможность использования универсального профиля скорости для отыскания решения в начальном участке струи в сносящем потоке.

На фиг. 5 производится сравнение теоретического решения с экспериментальным для границ зон смешения при отношении скоростей струи и сносящего потока, равном 4.83 . Здесь y_{11} и y_{12} — значения y , при которых скорость в зоне смешения равна $0.1u_{1i}$; y_{21} и y_{22} — значения y , при которых скорость в зоне смешения равна $0.9u_{1i}$. Соответствующие экспериментальные значения определялись по величине скорости и по величине полного давления. Причем, при определении границ по величине полного давления отыскивались y , при которых полное давление в зонах смешения равнялось 0.01 и 0.81 от полного давления в ядре; точки 1 определялись по скорости, точки 2 — по полному давлению.

На фиг. 6 показано сравнение теоретического решения и экспериментальных данных для границ струи и скорости на оси при отношении скорости струи и скорости сносящего потока, равном 5 , и константе $\beta = 0.1$. Здесь $U_m^o = um / u_0$. Аналогичное сравнение было проведено и для других отношений u_0/V_∞ .

Из сравнения видно, что теоретическое решение, в основном, удовлетворительно описывает не только качественно, но и количественно распространение плоской струи в сносящем потоке. При этом опытная константа для струи в сносящем потоке имеет то же значение, что и для затопленной струи. Ось же струи, полученная теоретически, не совпадает с экспериментом (фиг. 7). Как и можно было ожидать, она получается менее изогнутой, чем по результатам эксперимента. Это обстоятельство, видимо, объясняется той же причиной, что и расхождение между коэффициентами сопротивления пластинки, перпендикулярной набегающему потоку, определенными теоретически по схеме Кирхгофа и экспериментально. Эта причина состоит в том, что давление в мертвой зоне за пластиной принималось равным атмосферному и, таким образом, не учитывалось возникающее за пластиной разрежение. Для уточнения оси струи следует учесть разрежение в мертвой зоне за струей. Величину этого разрежения можно определить из эксперимента.

Поступило 23 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Гостехиздат, 1960.
2. Гиршович Т. А. О турбулентной струе в сносящем потоке. Изв. АН СССР, *Механика жидкости и газа*, № 1, 1966.
3. Растригин Л. А. Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем. Изд. «Зинатне», Рига, 1965.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СТРУЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫТЕКАЮЩИХ В СПУТНЫЙ ПОТОК ТОЙ ЖЕ ЖИДКОСТИ

В. В. ПАВЛОВСКИЙ

(Ленинград)

Для осесимметричных турбулентных струй, вытекающих в неподвижную жидкость, число Рейнольдса струи, определяемое по средней скорости в рассматриваемом поперечном сечении струи и по радиусу граничной поверхности турбулентной области струи, сохраняет одинаковое значение для всех поперечных сечений, благодаря чему струя остается турбулентной вдоль всей своей длины [1-3]. Для осесимметричных турбулентных же струй, вытекающих в спутный поток, как показывается в настоящей статье, число Рейнольдса, определяемое по средней избыточной скорости в поперечном сечении струи и по радиусу граничной поверхности турбулентной области, убывает с удалением от выходного сечения струи. Благодаря этому на достаточно большом удалении от выходного сечения струи турбулентное движение должно переходить в ламинарное. Такое же явление имеет место в осесимметричном турбулентном следе за телом [1-3]. Поскольку для осесимметричных турбулентных струй, вытекающих в спутный поток, в результате интегрирования уравнений пограничного слоя построено решение, полностью определяющее осредненное течение жидкости в струе [4], то можно вычислить, на каких расстояниях от начала координат располагаются критические сечения, в которых должен начинаться переход турбулентного движения в струе в ламинарное.

§ 1. Числа Рейнольдса струи. Как и в статье [4], будем считать, что струя вытекает в направлении оси Oz , являющейся осью симметрии течения, из круглого отверстия радиуса r_1 в спутный поток той же жидкости. Скорость в выходном сечении струи равна U_1 , скорость спутного потока U_0 .

Будем называть средним числом Рейнольдса в рассматриваемом поперечном сечении струи число R , определяемое равенством

$$R = \langle U \rangle r_2 / \nu \quad (1.1)$$

Здесь $\langle U \rangle$ — средняя по расходу избыточная продольная скорость в рассматриваемом поперечном сечении струи, r_2 — радиус граничной поверхности турбулентной области струи, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Величина $\langle U \rangle$ определяется равенством

$$\langle U \rangle = \frac{2}{r_2^2} \int_0^{r_2} U r dr \quad (1.2)$$

Здесь U — величина избыточной продольной скорости в рассматриваемой точке, r — расстояние этой точки от оси Oz .

После перехода к безразмерным величинам согласно равенствам

$$u = \frac{U}{U_1}, \quad \langle u \rangle = \frac{\langle U \rangle}{U_1}, \quad r^\circ = \frac{r}{r_1}, \quad r_2^\circ = \frac{r_2}{r_1} \quad (1.3)$$

равенство (1.2) переписывается в виде

$$\langle u \rangle = \frac{2}{r_2^{\circ 2}} \int_0^{r_2^\circ} u r^\circ dr^\circ \quad (1.4)$$

Из (1.1) и (1.3) вытекает

$$R = \frac{\langle u \rangle r_2^\circ U_1 r_1}{\nu} = \langle u \rangle r_2^\circ R_0 \quad (1.5)$$