

$q_3 = 0.07$  при  $\kappa = 0$ ,  $q_3 = 0.09$  при  $\kappa = 0.5$ ,  $q_3 = 0$  при  $\kappa = 0.9$  (4.6)  
 Аппроксимирующие зависимости, даваемые формулами (4.3) — (4.7), представлены также на фиг. 2—4 (сплошные линии).

Приведем еще зависимость типа аналогии Рейнольдса  $\zeta^{0*} = \zeta^{0*}(\zeta^0)$  (см. фиг. 5). На графике приведены расчетные данные для всего исследованного диапазона  $M_\infty$  и  $h^0_w$  и параметров  $\kappa$  из области  $0 \leq \kappa \leq 0.7$  (для  $\kappa = 0$  обозначения экспериментальных точек те же, что и на фиг. 2; для  $\kappa = 0.5$  те же обозначения снабжаются черточкой в одну сторону, и черточками в две стороны для  $\kappa = 0.7$ ).

Там же приведена кривая  $\zeta^{0*} = \zeta^{0*}(\zeta^0)$ , построенная по аппроксимирующей формуле  $\zeta^{0*} = 0.600 + 0.738 \zeta^0 - 0.338 \zeta^{02}$  (4.7)

Как и ранее, наибольший разброс точек получается в областях, примыкающих к границам.

Поступило 13 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

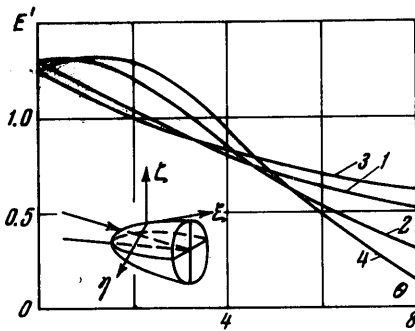
1. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Сб. «Вычислительные методы и программирование», Изд. Моск. ун-та, 1962, вып. 1.
2. Пасконов В. М. Стандартная программа для решения задач пограничного слоя. Сб. «Численные методы в газовой динамике», Изд. Моск. ун-та, 1963, вып. 2.
3. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. Кривцова Н. В. Параметрический метод решения уравнений ламинарного пограничного слоя с продольным градиентом давления в условиях равновесной диссоциации газа. Инж.-физ. ж., 1966, т. 10, № 2.
5. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
6. Симунин Л. М., Терентьев Н. М. Численное решение уравнений «однопараметрической» теории пограничного слоя. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Техническая гидромеханика, 1965, № 248.
7. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, 1962.
8. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1959.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Д. ШЕВЕЛЕВ (Москва)

В работе рассматривается алгоритм численного расчета пространственного пограничного слоя. Уравнения трехмерного пограничного слоя для произвольной системы координат, нормально связанной с поверхностью, приводятся к виду, который позволяет воспользоваться для численных расчетов методом плоскостей. В качестве примера рассмотрен случай пограничного слоя трехосного эллипсоида под углом атаки в несжимаемой жидкости. Уравнения пространственного пограничного слоя для сжимаемой жидкости или газа можно свести к виду, напоминающему случай несжимаемой жидкости, причем методика расчетов сохраняется.

§ 1. Рассмотрим поток жидкости около произвольной кусочно-гладкой поверхности  $S$ , заданной в прямоугольной системе координат  $y^i (i=1,2,3)$ . Выберем некоторую криволинейную систему координат, нормально связанную с поверхностью.



Фиг. 1

Уравнение поверхности  $x^3 = 0$ , координаты  $x^1, x^2$  выбраны на поверхности. Элемент длины  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ . Метрический тензор таков, что  $g_{33} = 1, g_{3\alpha} = g_{\alpha 3} = 0, g_{ij} = g_{\alpha\beta}$ , где  $i, j = \alpha, \beta = 1, 2$ .

Уравнения трехмерного пограничного слоя для несжимаемой жидкости, согласно [1], имеют вид

$$u^\beta u_{\alpha, \beta} + v \frac{\partial u_\alpha}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \zeta^2} \tag{1.1}$$

$$u^\beta_\beta + \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Здесь  $u^\alpha$  — контравариантная составляющая вектора скорости на поверхности;

$u_\alpha = g_{\alpha s} u^s$  — ковариантная составляющая вектора скорости, запятая обозначает ковариантное дифференцирование по поверхности;  $v$  — скорость, нормальная к поверхности;  $p$  и  $\rho$  — давление и плотность соответственно.

Перейдем от тензорной записи уравнений к физическим координатам. Связь, согласно [2], выражается соотношениями  $u(i) = u^i \sqrt{g_{ii}}$  (по  $i$  не суммировать),  $u(i) = g^{ij} u_j \sqrt{g_{ii}}$  (по  $i$  не суммировать)

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \frac{\partial u}{\partial \zeta} + A_1 u^2 + A_2 \omega^2 + A_3 u \omega = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \\ - \frac{\sqrt{g_{11}} g^{11}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\sqrt{g_{11}} g^{12}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + v \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} + B_1 u^2 + B_2 \omega^2 + B_3 u \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} - \\ - \frac{\sqrt{g_{22}} g^{21}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\sqrt{g_{22}} g^{22}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} u \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \omega \right) + \sqrt{g} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0, \quad g = \det \|g_{\alpha\beta}\|, \quad g^{\alpha\beta} = \frac{G^{\alpha\beta}}{g}$$

Здесь  $G^{\alpha\beta}$  — соответствующие алгебраические дополнения метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$ ,  $u(1) = u$ ,  $u(2) = \omega$ ,  $v \equiv v$  — физические составляющие вектора скорости (вместо  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  взяты соответственно  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ). Причем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{g_{12}}{g} \left( \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta} + \frac{g_{12}}{g_{11}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial g_{12}}{\partial \xi} \right) \\ A_2 &= \frac{\sqrt{g_{11}}}{g} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial \eta} - \sqrt{g_{22}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \eta} \right) \\ A_3 &= \frac{1}{g} \left( \sqrt{g_{11} g_{22}} \left( 1 + \frac{g_{12}^2}{g_{11} g_{22}} \right) \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta} - 2g_{12} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi} \right) \\ B_1 &= \frac{\sqrt{g_{22}}}{g} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial \xi} - \sqrt{g_{11}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \xi} \right) \\ B_2 &= \frac{g_{12}}{g} \left( \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi} + \frac{g_{12}}{g_{22}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \eta} - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{12}}{\partial \eta} \right) \\ B_3 &= \frac{1}{g} \left( \sqrt{g_{11} g_{22}} \left( 1 + \frac{g_{12}^2}{g_{11} g_{22}} \right) \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi} - 2g_{12} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

Величина давления выражается через компоненты вектора скорости внешнего потока [3]. Граничные условия для системы (1.2) следующие:

$$u = \omega = v = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad u \rightarrow u_e, \quad \omega \rightarrow \omega_e \text{ при } \zeta \rightarrow \infty.$$

§ 2. Сделаем замену переменных:

$$u = u_e(\xi, \eta) E(\xi, \eta, \lambda), \quad \omega = \beta(\xi, \eta) u_e(\xi, \eta) D(\xi, \eta, \lambda)$$

$$v = \left( \frac{u_e(\xi, \eta)}{\alpha(\xi, \eta)} \right)^{1/2} \left[ K(\xi, \eta, \lambda) - \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}} E \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - \frac{\alpha \beta}{\sqrt{g_{22}}} D \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right], \quad \lambda = \left( \frac{u_e(\xi, \eta)}{\alpha(\xi, \eta)} \right)^{1/2}$$

Здесь  $\xi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — некоторые произвольные функции, выбор которых будет ясен из дальнейшего изложения. После преобразований система запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2} &= K \frac{\partial E}{\partial \lambda} + N_1(E^2 - 1) + N_2(D^2 - \varphi^2) + N_3(ED - \varphi) + N_4 E \frac{\partial E}{\partial \xi} + N_5 D \frac{\partial E}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial \lambda^2} &= K \frac{\partial D}{\partial \lambda} + M_0 + M_1(E^2 - 1) + M_2(D^2 - \varphi^2) + M_3(ED - \varphi) + M_4 E \frac{\partial D}{\partial \xi} + M_5 D \frac{\partial D}{\partial \eta} \\ &\quad - \frac{\partial K}{\partial \lambda} = P_1 E + P_2 D + P_3 \frac{\partial E}{\partial \xi} + P_4 \frac{\partial D}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$E = D = 0, \quad K = 0 \quad \text{при } \lambda = 0; \quad E \rightarrow 1, \quad D \rightarrow \varphi = \frac{w_e}{\beta u_e} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

Коэффициенты  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  и  $P_1, P_2, P_3, P_4$  функции только  $\xi$  и  $\eta$ . Они определяются геометрией поверхности и параметрами внешнего течения. Если коэффициенты зависят только от одной переменной, то производные функций  $E$  и  $D$  по переменной, от которых коэффициенты не зависят, пропадают, и задача становится двумерной.

Положим  $E = f_\lambda'(\xi, \eta, \lambda)$  и  $D = g_\lambda'(\xi, \eta, \lambda)$  и проинтегрируем преобразованное уравнение неразрывности. После подстановки значения  $K$  в оставшиеся уравнения система примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \lambda^3} &= -(P_1 f + P_2 g) \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} + N_1 \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^2 - 1 \right] + N_2 \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)^2 - \Phi^2 \right] + \\ &+ N_3 \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \lambda} - \Phi \right] + N_4 \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \right] + N_5 \left[ \frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \eta} - \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \right] \\ \frac{\partial^3 g}{\partial \lambda^3} &= -(P_1 f + P_2 g) \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} + M_0 + M_1 \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^2 - 1 \right] + M_2 \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)^2 - \Phi^2 \right] + \\ &+ M_3 \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \lambda} - \Phi \right] + M_4 \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} \right] + M_5 \left[ \frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial \eta} - \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} \right] \quad (2.2) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$f = g = f_\lambda' = g_\lambda' = 0 \text{ при } \lambda = 0, f_\lambda' \rightarrow 1, g_\lambda' \rightarrow \Phi \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

При численных расчетах и некоторых условиях система (2.1) обладает преимуществом перед системой (2.2). Коэффициенты, которые входят в выражения (2.1) и (2.2), вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\alpha}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} + \alpha A_1, \quad N_2 = \alpha \beta^2 A_2, \quad N_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\beta}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \eta} + \\ &+ \alpha \beta A_3, \quad N_4 = M_4 = P_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}}, \quad N_5 = M_5 = P_4 = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{g_{22}}} \\ M_0 &= \frac{\alpha}{\beta u_e^2} \left( \frac{\sqrt{g_{22} g^1}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\sqrt{g_{22} g^{22}}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right), \quad M_1 = \frac{\alpha}{\beta} B_1 \\ M_2 &= \frac{\alpha}{\sqrt{g_{22}}} \frac{1}{u_e} \frac{\partial (\beta u_e)}{\partial \eta} + \alpha \beta B_2, \quad M_3 = \alpha B_3 + \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{u_e \beta} \frac{\partial (\beta u_e)}{\partial \xi} \\ P_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{g} u_e} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} u_e \right) - \frac{1}{2 \sqrt{g_{11}}} \left( \frac{\alpha}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \right) \\ P_2 &= \frac{\alpha}{\sqrt{g} u_e} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \beta u_e \right) - \frac{\beta}{2 \sqrt{g_{22}}} \left( \frac{\alpha}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \eta} - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

§ 3. С принципиальной точки зрения, все системы координат на поверхности равнозначны. Окончательные результаты, например величина трения на поверхности, инвариантны относительно выбора системы координат. Различными авторами рассматривались системы координат, связанные с линиями тока внешнего течения [4], с линиями кривизны на поверхности [5], [6], — полугеодезические системы координат [7].

Рационально рассматривать общий случай произвольной криволинейной системы координат, нормально связанной с поверхностью. Выберем систему координат с началом в критической точке таким образом, чтобы линия  $\eta = 0$  совпала с геодезической линией поверхности и линией тока внешнего течения. Очевидно, как это сделать при наличии плоскости симметрии у рассматриваемого течения. Поперечная поперек скорости на этой линии отсутствует, но производная поперечной скорости по поперечной координате отлична от нуля. Если начало координат выбрать таким образом, что  $u_e \sim \xi$ ,  $\omega_e \sim \xi \eta$ , а метрические коэффициенты  $\sqrt{g_{11}} \sim c$ ,  $\sqrt{g_{22}} \sim \xi$ ,  $g_{12} \sim \xi \eta$  при  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ , то особенности в критической точке устранимы, а коэффициенты при производных функций  $E, D$  по  $\xi$  и по  $\eta$  в уравнениях (2.1), если выбрать  $\alpha \sim \xi$ ,  $\beta \sim \eta$ , будут  $M_4 = N_4 = P_3 \sim \xi$ ,  $M_5 = N_5 = P_4 \sim \eta$ . Таким образом, в критической точке получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых легко получить. При  $\xi = 0$ ,  $\eta$  — переменная система содержит производные только в направлении  $\lambda$  и  $\eta$ . При  $\eta = 0$ ,  $\xi$  — переменная система содержит производные только в направлении  $\lambda$  и  $\xi$ . Ограничения на метрические коэффициенты и значения компонент скорости в критической точке могут быть удовлетворены специальным выбором системы координат в зависимости от конкретной задачи.

§ 4. Рассмотрим модельное уравнение следующего вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \alpha \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + f \quad (4.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, \xi, \eta) &= \varphi_0 \quad \text{при } \xi = 0, a, b = \text{const} > 0 \\ u(\xi^*, \xi, \eta) &= \varphi_1 \quad \text{при } \xi = \xi^*, \xi^* \geq \xi \geq 0, \eta^* \geq \eta \geq 0 \end{aligned}$$

Начальные данные получаются при  $\xi = \eta = 0$ , после интегрирования уравнения (4.1). Предположим, что удалось найти в плоскости  $\xi, \eta$  направление (назовем его характеристическим) такое, что в правой части (4.1) комбинация двух производных функции  $u$  имеет смысл производной в характеристическом направлении. Если  $f$  выражается как функция этого направления, то (4.1) сводится к уравнению в частных производных типа уравнения теплопроводности. В частности, это можно сделать для случая, когда  $a = b = 1$ .

Воспользуемся следующей конечно-разностной схемой

$$\begin{aligned} \frac{u_{l+1, m, n} - 2u_{l, m, n} + u_{l-1, m, n}}{\Delta \xi^2} &= \\ = \frac{u_{l, m, n} - W_{l, m, n}}{\Delta \xi^*} + f_{l, m, n} \end{aligned} \quad (4.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_{0, m, n} &= \varphi_{0, m, n} \quad \text{при } \xi = 0 \\ u_{L, m, n} &= \varphi_{L, m, n} \quad \text{при } \xi = \xi^* \\ \xi^* \geq \xi \geq 0, \quad \eta^* \geq \eta \geq 0, \quad a, b > 0 \end{aligned}$$

Простейшая сетка содержит точки с координатами  $\zeta = l\Delta \zeta, \xi = m\Delta \xi, \eta = n\Delta \eta$ . Причем

$$W_{l, m, n} = \frac{1}{am + bn} [amu_{l, m-1, n} + bnu_{l, m, n-1}], \quad \Delta \xi^* = \frac{1}{am + bn}$$

Будем следовать определениям, которые даны в работе [8]. Исследование устойчивости проведем в нормах

$$\|f^{(h)}\|_{Fh} = \max_{l, m, n} |f_{l, m, n}|, \quad \|u^{(h)}\|_{Uh} = \max_{l, m, n} |u_{l, m, n}|,$$

$$\|\varphi^{(h)}\|_{\Phi h} = \max_{m, n} |\varphi_{0, m, n}| + \max_{m, n} |\varphi_{L, m, n}|$$

Решение  $u_{l, m, n}$  находим из (4.2) методом прогонки. Разностное уравнение (4.2) имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\max_l |u_{l, m, n}| \leq \max (|\varphi_{0, m, n}|, |\varphi_{L, m, n}|, \max_l | -W_{l, m, n} + \Delta \xi^* f_{l, m, n} |)$$

Отсюда можно получить, учитывая, что

$$\max_{l, m, n} (am + bn = c) |W_{l, m, n}| \leq \max_{l, m, n} (am + bn = c-1) |u_{l, m, n}|$$

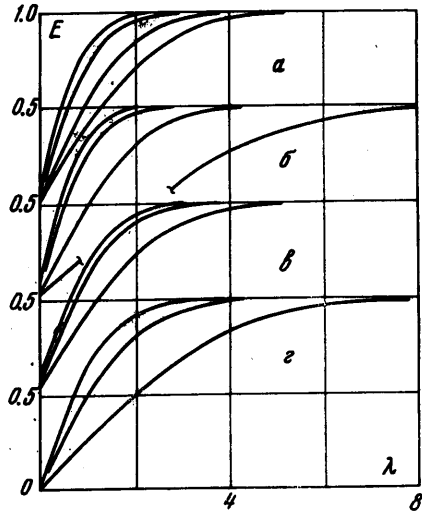
следующую оценку

$$\begin{aligned} \max_{l, m, n} (am + bn = c) |u_{l, m, n}| &\leq \max_{l, m, n} (am + bn = c-1) |u_{l, m, n}| + \\ &+ \|\varphi^{(h)}\|_{\Phi h} + \Delta \xi^* \|f^{(h)}\|_{Fh} \end{aligned}$$

Можно показать, что это условие приводит к устойчивости разностной схемы.

При численных расчетах удобнее пользоваться двухслойными аппроксимациями производных по  $\xi$  и  $\eta$  или аппроксимациями в половинных узлах, подобно тому, как это сделано в работе [9] для расчетов двумерных течений.

Связь между шагами в направлении  $\xi$  и  $\eta$  определяется из соотношения  $am + bn = c$ . Соотношение  $am + bn = c$  представляет сетку прямых в плоскости  $\xi, \eta$  с постоянным углом наклона. В случае переменных коэффициентов угол наклона зависит от геометрии поверхности и связан с отношением скорости приращения поперечной скорости к продольной. Для фиксированной точки поверхности и при разных значениях толщины пограничного слоя можно построить лучок прямых, которые разворачиваются в плоскости  $\xi, \eta$  от некоторого положения, связанного с внешним течением, до предельного, связанного с линией тока на поверхности.



Фиг. 2

§ 5. В качестве примера рассмотрим трехосный эллипсоид под углом атаки. Этот выбор предопределен тем, что внешнее потенциальное течение для эллипсоида известно [10]. Тривиальный случай имеем при  $a=b=c=R$ . Если угол атаки  $\gamma = 0$  ( $a \neq b \neq c$ ), то у эллипсоида имеются две оси симметрии. При решении задачи расчета эллипсоида с соотношением полуосей  $a : b : c$  должно получиться для одной и той же точки поверхности такое значение величины трения, как если бы решалась задача расчета эллипсоида с соотношением полуосей  $a : c : b$ . Кроме того,  $E^1(\lambda, \xi, 1/2\pi) = E^2(\lambda, \xi, 0)$ , где  $E^1(\lambda, \xi, 1/2\pi)$  — решение, полученное для случая  $a : b : c$ , а  $E^2(\lambda, \xi, 0)$  — решение, полученное для случая  $a : c : b$ .

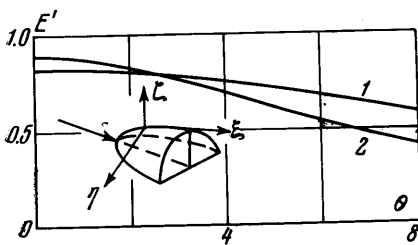
Пусть скорость внешнего течения образует с осями эллипсоида  $y^1, y^2$  углы  $\gamma, \delta$ . Потенциал скорости на поверхности задан [10]

$$\Phi = v_\infty \left( y^1 \cos \gamma \frac{2}{2-A_0} + y^2 \cos \delta \frac{2}{2-B_0} \right), \quad \cos \delta = \sin \gamma$$

$$A_0 = abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u) \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

$$B_0 = abc \int_0^\infty \frac{du}{(b^2+u) \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

Зададим уравнение поверхности эллипсоида



Фиг. 3

$$\frac{(y^1)^2}{a^2} + \frac{(y^2)^2}{b^2} + \frac{(y^3)^2}{c^2} = 1$$

в виде

$$y^1 = -\frac{a^2 p}{l} \cos \xi - \frac{abq}{l} \sin \xi \cos \eta$$

$$y^2 = -\frac{b^2 q}{l} \cos \xi + \frac{abp}{l} \sin \xi \cos \eta$$

$$y^3 = c \sin \xi \sin \eta$$

Легко проверить, что уравнение эллипсоида выполняется. Если  $a = b = c = R$ , то преобразование соответствует повороту вокруг

оси  $y^3$  на угол  $\gamma$ ;  $a, b, c$  — главные полуоси эллипсоида

$$p = \frac{2v_\infty \cos \gamma}{2-A_0}, \quad q = \frac{2v_\infty \cos \delta}{2-B_0}, \quad l = \sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2}$$

Вычислим метрические коэффициенты  $g_{\alpha\beta}$ .

$$g_{11} = (\gamma_1^2 - \gamma^2) \sin^2 \xi + \gamma^2 + 2\gamma_4^2 \sin \xi \cos \xi \cos \eta$$

$$g_{22} = \sin^2 \xi [\gamma_2^2 \sin^2 \eta + \gamma_3^2 \cos^2 \eta]$$

$$g_{12} = \sin \xi \sin \eta [(\gamma_3^2 - \gamma_2^2) \cos \xi \cos \eta - \gamma_4^2 \sin \xi]$$

$$\gamma^2 = \gamma_2^2 \cos^2 \eta + \gamma_3^2 \sin^2 \eta, \quad \gamma_1^2 = \frac{a^4 p^2 + b^4 q^2}{l^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{a^2 b^2 (p^2 + q^2)}{l^2}$$

$$\gamma_3^2 = c^2, \quad \gamma_4^2 = \frac{abpq}{l^2} (b^2 - a^2), \quad u_e = \sqrt{g_{11} g_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \beta \varphi = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11} g_{11}}} \frac{g_{21}}{g_{11}}$$

Если известны составляющие скорости в какой-либо системе координат, то составляющие скорости в новой системе координат связаны со значениями в старой системе координат соотношениями (по  $i$  не суммировать)



Фиг. 4

$$U(i) = \left( \frac{g_{ii}}{g_{jj}^*} \right)^{1/2} \frac{\partial x^i}{\partial x^{*j}} U^*(j)$$

$$U(i) = \sqrt{g_{ii}} g^{ij} \frac{\partial x^{*k}}{\partial x^j} \left( g_{ks}^* \frac{U^*(s)}{\sqrt{g_{ss}^*}} \right)$$

Величины со звездой относятся к старой системе координат, без звезды — к новой ( $U(1) = u_e, U(2) = \omega_e$ ).

Для численного интегрирования удобнее пользоваться системой в несколько иной форме, отличной от системы (2.1). Пусть  $G = D - \varphi E$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2} &= K \frac{\partial E}{\partial \lambda} + N_1^* (E^2 - 1) + N_2^* G^2 + N_3^* EG + N_4 E \frac{\partial E}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial E}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} &= K \frac{\partial G}{\partial \lambda} + M_1^* (E^2 - 1) + M_2^* G^2 + M_3^* EG + N_4 E \frac{\partial G}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial G}{\partial \eta} \\ &\quad - \frac{\partial K}{\partial \lambda} = P_1^* E + P_2^* G + P_3 \frac{\partial E}{\partial \xi} + P_4 \frac{\partial G}{\partial \eta} + \varphi P_4 \frac{\partial E}{\partial \eta} \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$E = G = K = 0 \quad \text{при } \lambda = 0, \quad E \rightarrow 1, \quad G \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

Коэффициенты связаны с теми, которые приведены выше, соотношениями

$$\begin{aligned} N_1^* &= N_1 + \varphi N_3 + \varphi^2 N_2, \quad N_2^* = N_2, \quad N_3^* = N_3 + 2\varphi N_2 \\ M_1^* &= (M_1 - \varphi N_1) + \varphi (M_3 - \varphi N_3) + \varphi^2 (M_2 - \varphi N_2) + N_4 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + N_5 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ M_2^* &= M_2 - \varphi N_2, \quad M_3^* = (M_3 - \varphi N_3) + 2\varphi (M_2 - \varphi N_2) + N_5 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ P_1^* &= P_1 + \varphi P_2 + P_4 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad P_2^* = P_2 \end{aligned}$$

§ 6. Численные расчеты проводились на электронной вычислительной машине «Стрела — 3» ВЦ АН. На фиг. 1—4 приведены некоторые результаты численных расчетов. На фиг. 1 представлены графики величины  $E'_{\lambda=0}$ , пропорциональной трению на стенке, для эллипсоида с соотношением полуосей 3 : 1 : 1 при углах атаки  $\gamma = 10^\circ$ ,  $20^\circ$  в плоскостях симметрии ( $\eta = 0$ ,  $\eta = \pi$ ). Кривая 1 соответствует изменению величины  $E'_{\lambda=0}$  вдоль верхней образующей эллипсоида, кривая 2 — вдоль нижней для случая, когда  $\gamma = 10^\circ$ . Кривые 3, 4 представляют изменение  $E'_{\lambda=0}$  для того же эллипсоида в случае, когда угол атаки  $\gamma = 20^\circ$ , вдоль линий  $\eta = 0$ ,  $\eta = \pi$ . На фиг. 2(а) показаны профили скоростей при  $\eta = 1/2\pi$  для различных значений  $\theta = \sin \xi$  ( $\theta = n\Delta\theta$ ,  $n = 0, 3, 6, 9$ ) На фиг. 2(б) представлены профили скоростей на подветренной стороне эллипсоида ( $\eta = \pi$ ). Для эллипсоида с соотношением полуосей 4 : 3 : 2 построены графики изменения величины  $E'_{\lambda=0}$  вдоль образующих эллипсоида при  $\eta = 0$  и  $\eta = 1/2\pi$ , в плоскостях симметрии (фиг. 3). На фиг. 2 (в, г) приведены профили скоростей для  $\eta = 0$ ,  $\eta = 1/2\pi$  при различных  $\theta = n\Delta\theta$  ( $n = 0, 5, 10$ ). На фиг. 4 приведены значения величины  $G$  для  $\eta = 0$  в зависимости от  $\lambda$  для различных  $\theta$ .

Автор благодарит Тирского Г. А. и Рябенского В. С. за помощь в работе.

Поступило 13 IV 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Michael «Matrix and tensor calculus» N. J. 1955
2. Truesdell C. The physical components of vectors and tensors — Z. angew. Math. und Mech., 1953, Bd. 33, No 10/11
3. Тимман Р., Цатт Ю. А. Метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя. — В сб. «Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи», Госэнергоиздат, 1960.
4. Hayes W. The three-dimensional boundary layer. Math. Revs., 1951, vol. 12.
5. Струминский В. В. Трехмерный пограничный слой на произвольной поверхности. Докл. АН СССР, 1956, т. 108, № 4.
6. Nowarth L. The Boundary layer in three-dimensional flow. Part 1,2. — Philos. Mag., 1951, vol. 42, No 326, 335.
7. Мур Ф. Теория трехмерного пограничного слоя. — В сб. Проблемы механики. Вып. 2, Изд. иностр. лит., 1952.
8. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем, Физматгиз, 1962.
9. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. — В сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», «Наука».
10. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Изд. 6-е. Ч. 1, Физматгиз, 1963.