

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В РАВНОВЕСНО-ДИССОЦИИРОВАННОМ ГАЗЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВНЕШНЕЙ СКОРОСТИ

Н. В. КРИВЦОВА (Ленинград)

Развитие машинной вычислительной техники позволяет расчет пограничного слоя вести путем непосредственного численного интегрирования соответствующей системы уравнений в частных производных [1, 2]. Для вывода общих заключений о пограничном слое с градиентом давления придется производить интегрирование для каждого конкретного вида задания скорости на внешней границе пограничного слоя.

Используемый в данной работе метод расчета пограничного слоя [3], основанный на решении некоторой универсальной (не зависящей от задания скорости на внешней границе пограничного слоя) системы уравнений, позволяет выяснить ряд общих закономерностей.

Обозначения

<p>x, y — продольная и поперечная координаты;</p> <p>s, ξ — продольная и поперечная координаты в плоскости преобразованных переменных;</p> <p>u — продольная составляющая скорости;</p> <p>r — радиус тела вращения;</p> <p>ψ — функция тока;</p> <p>P — число Прандтля;</p> <p>L — число Льюиса;</p> <p>N — число Нуссельта;</p> <p>ρ, μ, λ — плотность, динамическая вязкость, теплопроводность;</p> <p>c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении;</p> <p>ν — кинематическая вязкость;</p> <p>h — энтальпия;</p> <p>h_1 — энтальпия торможения во</p>	<p>внешнем течении;</p> <p>T — температура;</p> <p>Φ — приведенная функция тока;</p> <p>h — безразмерная энтальпия;</p> <p>g — безразмерная полная энтальпия;</p> <p>B — нормирующая постоянная;</p> <p>κ — местный параметр сжимаемости;</p> <p>Δ^*, Δ^{**} — толщина вытеснения и толщина потери импульса в плоскости потери новых переменных;</p> <p>δ^*, δ^{**} — толщина вытеснения и толщина потери импульса в физической плоскости;</p> <p>f — формпараметр;</p> <p>f_- — формпараметр в точке отрыва;</p> <p>f_+ — формпараметр в «лобовой точке»;</p> <p>M — число Маха;</p> <p>ζ — «приведенное» трение;</p> <p>ζ^* — «приведенный» тепловой поток;</p> <p>C_f — местный коэффициент трения.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Индекс w относится к значениям параметров на стенке, индекс e — на внешней границе пограничного слоя, 0 — в начальном сечении слоя.

§ 1. Постановка задачи. Рассматривается ламинарный пограничный слой с продольным градиентом давления в высокоскоростном потоке газа. Предполагается, что диссоциация происходит в результате торможения потока в пограничном слое; процесс считается равновесным. После введения преобразований

$$s(x) = \frac{1}{\rho_0 \mu_0} \int_0^x \rho_w \mu_w \left(\frac{r}{L}\right)^{2j} dx, \quad \xi(x, y) = \frac{1}{\Delta^{**} \rho_0} \left(\frac{r}{L}\right)^j \int_0^y \rho dy \quad (1.1)$$

$$\Phi(s, \xi) = \frac{B\psi(x, y)}{u_e \Delta^{**}}, \quad g = \frac{h + 1/2 u^2}{h_1}$$

($j = 0$ — для плоской задачи, $j = 1$ — для осесимметрического течения) система уравнений пограничного слоя принимает вид ($L = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) + \frac{F + 2f}{2B^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{f}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \right] = \\ = \frac{u_e f}{u_e' B^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{A}{P} \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) + \frac{F + 2f}{2B^2} \Phi \frac{\partial g}{\partial \xi} + 2\kappa \frac{P - 1}{P} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) = \\ = \frac{u_e f}{u_e' B^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) \quad A = \frac{\rho \mu}{\rho_w \mu_w}, \quad \kappa = \frac{u_e^2}{2h_1} \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\Phi = \partial \Phi / \partial \xi = 0, \quad g = g_w \text{ при } \xi = 0,$$

$$\Phi = \Phi_0(\xi), \quad g = g_0(\xi) \text{ при } s = s_0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \rightarrow 1, \quad g \rightarrow 1 \text{ при } \xi \rightarrow \infty$$

где $\Phi_0(\xi)$ и $g_0(\xi)$ — распределения приведенной функции тока и безразмерной полной энтальпии в некотором начальном сечении слоя с абсциссой $s = s_0$.

Здесь x, y — продольная и поперечная координаты, u — продольная составляющая скорости, r — местный радиус тела вращения, ψ — функция тока, $P = \mu c_p / \lambda$ — число Прандтля, ρ, μ, λ, c_p — плотность, динамическая вязкость, теплопроводность и теплоемкость газа при постоянном давлении, h — энтальпия, h_1 — энтальпия торможения во внешнем течении, Φ — приведенная функция тока, Δ^{**} — толщина потери импульса, B — некоторая нормирующая постоянная, L — масштаб длины. Штрихом обозначены производные по s , индекс w относится к значениям параметров на стенке, индекс e — на внешней границе пограничного слоя. В системе (1.2) введены дополнительно общепринятые в теории пограничного слоя обозначения

$$F = 2[\zeta - (2 + H)f], \quad H = \frac{\Delta^*}{\Delta^{**}} = \frac{1}{B} \int_0^\infty \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] d\xi \quad (1.3)$$

$$\zeta = B \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right)_{\xi=0}, \quad f = u_e' z^{**}, \quad z^{**} = \frac{\Delta^{**2}}{v_0}$$

Входящие в уравнения системы функции $A = \rho \mu / \rho_w \mu_w$ и ρ_e / ρ зависят от термодинамических свойств равновесно-диссоциированного газа. Для численных расчетов желательно представление этих функций в аналитическом виде. Как показано в работе [4], в широком диапазоне изменения давлений $10^{-4} \leq p / p_a \leq 10$ (p_a — атмосферное давление) с удовлетворительной степенью точности для A и ρ_e / ρ могут быть предложены следующие аппроксимирующие формулы:

$$A = \left(\frac{h_w^\circ}{h^\circ} \right)^{1/3}, \quad \frac{\rho_e}{\rho} = \frac{G(h^\circ)}{G(1-\kappa)} = \frac{a_0 + a_1 h^\circ + a_2 h^{\circ 2} + a_3 h^{\circ 3} + a_4 h^{\circ 4}}{a_0 + a_1(1-\kappa) + a_2(1-\kappa)^2 + a_3(1-\kappa)^3 + a_4(1-\kappa)^4} \quad (1.4)$$

Здесь коэффициент a_i — функция числа Маха M_∞ . В дальнейшем будем полагать температуру стенки постоянной, т. е. $g_w = h_w^\circ = \text{const}$, и число Прандтля постоянным ($P = \text{const}$).

В уравнении (1.2) входят два параметра, зависящие от условий на внешней границе пограничного слоя: κ — «местный параметр сжимаемости», определяемый местным числом Маха M_e и f — основной формпараметр теории пограничного слоя, учитывающий интегрально историю развития пограничного слоя.

Введем формпараметр f в число независимых переменных, производя в уравнениях системы (1.2) замену переменных

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{df}{ds} \frac{\partial}{\partial f} = \frac{u_e'}{u_e} F \frac{\partial}{\partial f} \quad (1.5)$$

При этом будем рассматривать движения, локальные по κ , т. е., согласно (1.5), пренебрежем производными по κ от функций Φ и g [4].

Переходя к безразмерной энтальпии h° , получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[A(h^\circ) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right] + \frac{F+2f}{2B^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{f}{B^2} \left[\frac{G(h^\circ)}{G(1-\kappa)} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \right] = \\ = \frac{Ff}{B^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial f} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{A(h^\circ)}{P} \frac{\partial h^\circ}{\partial \xi} \right] + \frac{F+2f}{2B^2} \Phi \frac{\partial h^\circ}{\partial \xi} - 2 \frac{\kappa f}{B^2} \left[\frac{G(h^\circ)}{G(1-\kappa)} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \\ + 2\kappa A(h^\circ) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right)^2 = \frac{Ff}{B^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial h^\circ}{\partial f} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial h^\circ}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0, \quad h^\circ = h_w^\circ \quad \text{при } \xi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \rightarrow 1, \quad h^\circ \rightarrow 1 - \kappa \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty$$

$$\Phi = \Phi_0(\xi), \quad h^\circ = h_0^\circ(\xi) \quad \text{при } f = 0$$

Нормирующий множитель B выберем так, чтобы функции $\Phi_0(\xi)$ и $h_0^\circ(\xi)$ отвечали автомодельной системе уравнений, соответствующей постоянству скорости на внешней границе слоя

$$\frac{d}{d\xi} \left[A(h_0^\circ) \frac{d^2 \Phi_0}{d\xi^2} \right] + \Phi_0 \frac{d^2 \Phi_0}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d}{d\xi} \left[\frac{A(h_0^\circ)}{P} \frac{dh_0^\circ}{d\xi} \right] + 2\kappa A(h_0^\circ) \left(\frac{d^2 \Phi_0}{d\xi^2} \right)^2 = 0 \quad (1.7)$$

$$\Phi_0 = \frac{d\Phi_0}{d\xi} = 0, \quad h_0^\circ = h_w^\circ \quad \text{при } \xi = 0, \quad \frac{d\Phi_0}{d\xi} \rightarrow 1, \quad h_0^\circ \rightarrow 1 - \kappa \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty$$

Решения $\Phi = \Phi(\xi, f)$ и $h^\circ = h^\circ(\xi, f)$ «универсальной» системы уравнений (1.6) будут зависеть от ряда постоянных параметров h_w°, M_∞, P , определяемых условиями конкретных задач, и параметра κ , вычисляемого локально.

§ 3. Переход к конкретной задаче. При наличии затабулированных функций $\Phi(\xi, f)$ и $h^\circ(\xi, f)$ решение отдельной конкретной задачи сводится к получению характерной для данной задачи зависимости $f = f(x)$, для нахождения которой используется интегральное уравнение импульсов.

Если толщину вытеснения Δ^* и толщину потери импульса Δ^{**} ввести так:

$$\Delta^* = \int_0^\infty \left(\frac{\rho_e}{\rho} - \frac{u}{u_e} \right) dz, \quad \Delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dz, \quad \left(z = \left(\frac{r}{L} \right)^j \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_0} dy \right) \quad (2.1)$$

то уравнение импульсов запишется в той же форме, что и для несжимаемой жидкости

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{f}{du_e/ds} \right) = \frac{F}{u_e} \quad (2.2)$$

Возвращаясь к основной переменной x , будем иметь

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{du_e/dx} \right) = \frac{F}{u_e} - 2j \left(\frac{r}{L} \right)^{-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{r}{L} \right) \frac{f}{du_e/dx} \quad (2.3)$$

Входящая в уравнения (2.2), (2.3) величина F (1.3) для каждой конкретной задачи является функцией формпараметра f и «параметра сжимаемости» κ , являющегося, в свою очередь, заданной функцией скорости внешнего потока u_e

$$\kappa = u_e^{\circ 2} = u_e^2 / u_m^2 \quad (2.4)$$

Здесь $u_m = \sqrt{2h_1}$ — максимальная скорость. Введем местные значения коэффициента трения, числа Рейнольдса и числа Нуссельта

$$c_f = \frac{\tau_w}{1/2 \rho_w u_e^2}, \quad R_w = \frac{u_e x}{\nu_w}, \quad N_w = \frac{x (\partial h / \partial y)_w}{h_{aw} - h_w} \quad (2.5)$$

Здесь h_{aw} — энтальпия адиабатически энтропически заторможенного газа на поверхности тела, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\tau_w = \mu_w (\partial u / \partial y)_w$ — напряжение трения на поверхности тела. Используя соотношения (2.4) и формулы преобразования к новым переменным (1.1), найдем

$$c_f \sqrt{R_w} = 2 \left(\frac{1}{f} \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right)^{1/2} \zeta, \quad \frac{N_w}{\sqrt{R_w}} = \left(\frac{1}{f} \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx} \right)^{1/2} \frac{\zeta^*}{(h_{aw}^\circ - h_w^\circ)}$$

$$\zeta = B \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right)_{\xi=0}, \quad \zeta^* = B \left(\frac{\partial h^\circ}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (2.6)$$

Здесь ζ, ζ^* — «приведенное» трение и «приведенный» тепловой поток, соответственно определяемые из решения «универсальной» системы уравнений (1.6), а $f = f(x)$ находится в каждом конкретном случае из уравнения (2.3).

Условные толщины пограничного слоя Δ^*, Δ^{**} (2.1) и входящие в (2.6) величины ζ, ζ^*, f выражены в преобразованных переменных. Найдем связь между преобразованными и соответствующими им в реальном движении газа величинами $\delta^*, \delta^{**}, \zeta_\delta, \zeta_\delta^*, f_\delta$ которые, как известно [5], определяются следующим образом:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_e} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy$$

$$\zeta_\delta = \left[\frac{\partial (u/\mu_e)}{\partial (y/\delta^{**})} \right]_{y=0}, \quad \zeta_\delta^* = \left[\frac{\partial h^\circ}{\partial (y/\delta^{**})} \right]_{y=0}, \quad f_\delta = \frac{\delta^{**2}}{\nu_1} \frac{du_e}{dx} \quad (2.7)$$

Пользуясь преобразованиями (1.1) и соотношениями (1.4), (2.7), получим

$$\Delta^* = \left(\frac{r}{L} \right)^j \frac{\rho_1/\rho_0}{G(1-\kappa)} \delta^*, \quad \Delta^{**} = \left(\frac{r}{L} \right)^j \frac{\rho_1/\rho_0}{G(1-\kappa)} \delta^{**} \quad (2.8)$$

Аналогично найдем

$$\zeta = \frac{G(h_w^\circ)}{G(1-\kappa)} \zeta_\delta, \quad \zeta^* = \frac{G(h_w^\circ)}{G(1-\kappa)} \zeta_\delta^*, \quad f = \frac{\sqrt[3]{h_w^\circ}}{G^2(1-\kappa)} f_\delta \quad (2.9)$$

§ 3. Интегрирование универсальной системы уравнений. Для проведения численного интегрирования «универсальная» система (1.6) аппроксимировалась конечно-разностными уравнениями (см., например, [1,6]); возникающая при этом линейная крайняя задача решалась методом прогонки [7]. Все расчеты были проведены на машине БЭСМ-2 Ленинградского вычислительного центра АН СССР.

В результате решения были затабулированы функции $\Phi(\xi, f)$, $h^\circ(\xi, f)$, а также величины ζ , ζ^* , F , H , необходимые для расчета пограничного слоя в широкой области изменения параметров h_w° , M_∞ (число Прандтля принималось постоянным, $P = 0.712$). Для каждого определенного значения этих параметров решение было получено при дискретном ряде значений параметра κ , соответственно локальному относительно κ характеру записи системы (1.6). Функции $\Phi_0(\xi)$, $h_0^\circ(\xi)$, используемые в качестве начальных условий при интегрировании (1.6), брались из решения автомодельной системы (1.7).

Области изменения переменных и параметров были следующие:

1. Расчет по переменной f велся от точки $f = 0$ с положительным и отрицательным шагом: в диффузорной области ($f < 0$) — до точки отрыва пограничного слоя ($f = f_-$), соответствующей $\zeta = = B(\partial^2 \Phi / \partial \xi^2)_{\xi=0} = 0$; в конфузорной области ($f > 0$) — до «лобовой» точки ($f = f_+$), соответствующей $F = 0$, которая совпадает с лобовой критической точкой, где $u_e = 0$, только для случая $\kappa = 0$. Шаг Δf варьировался ($\Delta f_{\max} = 5 \cdot 10^{-5}$, $\Delta f_{\min} = = 0.3125 \cdot 10^{-5}$ — вблизи и точки отрыва, $f = f_-$).

2. В направлении переменной ξ счет велся с постоянным шагом $\Delta \xi = 0.05$ от $\xi = 0$ до внешней границы пограничного слоя, за которую принималось значение $\xi = 6$.

3. «Параметр сжимаемости» κ зависит от числа Маха M_e на внешней границе слоя. В случае совершенного газа с постоянным отношением теплоемкостей $k = c_p / c_v$ будем иметь [8]

$$\kappa = \frac{(k-1)M_e^2}{2 + (k-1)M_e^2}, \quad \begin{matrix} \kappa = 0 & \text{при } M_e = 0 \\ \kappa \rightarrow 1 & \text{при } M_e \rightarrow \infty \end{matrix} \quad (3.1)$$

В рассматриваемом случае для каждого конкретного значения h_w° , M_∞ задача решалась при различных значениях параметра κ в диапазоне $0 \leq \kappa \leq 0.9$.

4. Число Маха на бесконечности M_∞ задавалось следующим образом:

$$6 \leq M_\infty \leq 20 \quad (3.2)$$

Нижний предел соответствовал энтальпии торможения во внешнем потоке $h_1 = = 470.6 \text{ гкал/г}$ (ниже этого предела диссоциации практически нет). Верхний предел отвечал энтальпии торможения $h_1 = 4706 \text{ гкал/г}$ (выше этого предела надо учитывать уже ионизацию).

5. Для всех чисел M_∞ температура поверхности задавалась в пределах от $T_w = = 300^\circ \text{ К}$ до $T_w = 1750^\circ \text{ К}$ или

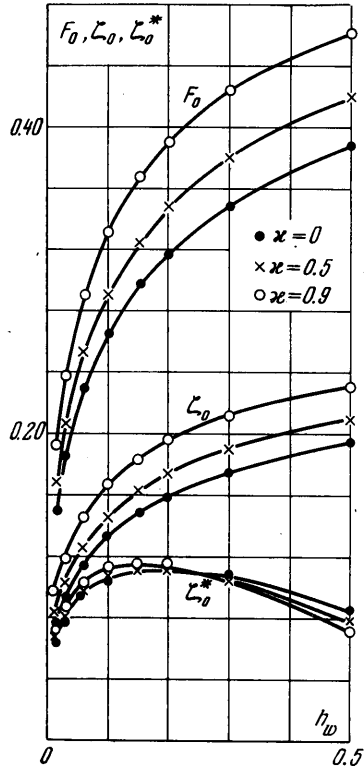
$$0.0152 \leq h_w / h_m \leq 0.1 \quad (3.3)$$

где h_m — максимальная энтальпия торможения, отвечающая числу Маха $M_\infty = 20$.

В этом диапазоне изменения T_w можно ожидать, что погрешности, получаемые за счет отличия числа L от единицы, будут малы.

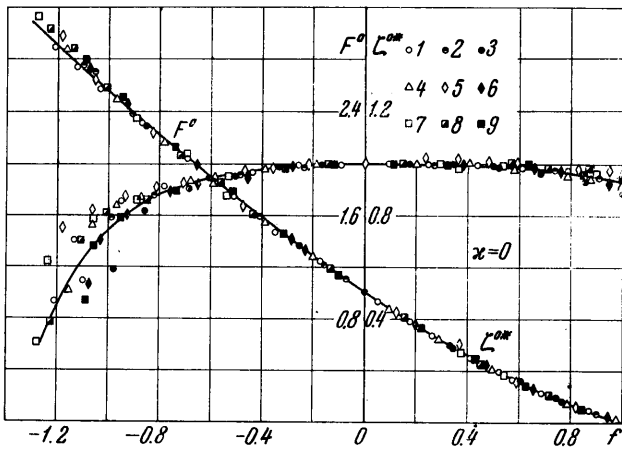
В соответствии с выбранными границами по числам M_∞ и принятым диапазонам изменения температур T_w , в проведенных вариантах расчета параметр $h_w^\circ = h_w / h_1$ менялся в пределах

$$0.0152 \leq h_w^\circ \leq 0.5 \quad (3.4)$$



Фиг. 1

§ 4. Результаты расчетов. Цель проведенных расчетов заключалась в определении влияния отдельных параметров на основные характеристики пограничного слоя ζ , ζ^* , F , которые, как показано в § 2, служат для вычисления местного коэффициента трения, теплоотдачи на поверхности, толщины потери импульса δ^{**} и распределения $f = f(x)$.



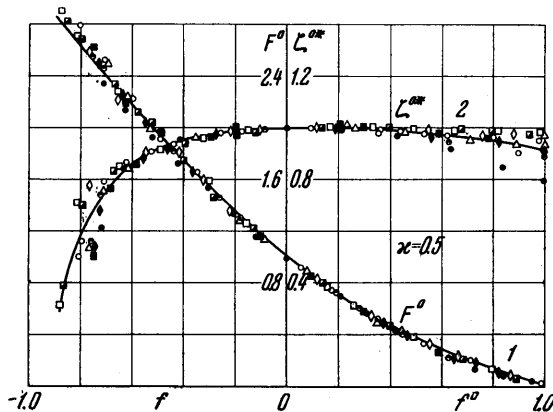
- $M_\infty \sim 6$
- 1 — $h_w^\circ = 0.152$
- 2 — $h_w^\circ = 0.3$
- 3 — $h_w^\circ = 0.5$
- $M_\infty \sim 9$
- 4 — $h_w^\circ = 0.2$
- 5 — $h_w^\circ = 0.06$
- $M_\infty \sim 14$
- 6 — $h_w^\circ = 0.2$
- $M_\infty \sim 20$
- 7 — $h_w^\circ = 0.0152$
- 8 — $h_w^\circ = 0.03$
- 9 — $h_w^\circ = 0.1$

Фиг. 2

Величины F , ζ , ζ^* в самом общем виде могут быть записаны так:

$$F = F(f, \kappa, h_w^\circ, M_\infty), \quad \zeta = \zeta(f, \kappa, h_w^\circ, M_\infty), \quad \zeta^* = \zeta^*(f, \kappa, h_w^\circ, M_\infty).$$

Влияние отдельных параметров на рассматриваемые характеристики не равноценно.



Фиг. 3

Анализ полученных численных решений показал, что, используя некоторые относительные координаты, можно для интересующих нас величин получить зависимости, слабо чувствительные к изменению параметров h_w°, M_∞ . Исключить влияние параметра κ не удается.

Введем относительные величины

$$\zeta^\circ = \frac{\zeta}{\zeta_0}, \quad \zeta^{*\circ} = \frac{\zeta^*}{\zeta_0^*}, \quad F^\circ = \frac{F}{F_0}, \quad f^\circ = \frac{f}{f_+} \quad (4.1)$$

Здесь величины ζ_0, ζ_0^*, F_0 соответствуют значению формпараметра $f = 0$ и получаются из решения автомодельной системы уравнений (1.7)

$$\zeta_0 = \zeta_0(\kappa, h_w^\circ), \quad \zeta_0^* = \zeta_0^*(\kappa, h_w^\circ), \quad F_0 = F_0(\kappa, h_w^\circ) \quad (4.2)$$

На фиг. 1 представлены зависимости F_0, ζ_0, ζ_0^* от параметра h_w° для трех значений параметра κ : 0, 0.5, 0.9. Функции F_0 и ζ_0 монотонно увеличиваются при увеличении параметров h_w° и κ . «Приведенный тепловой поток» ζ_0^* меняется немонотонно, достигая мак-

симального значения примерно при $h_w^\circ = 0.15-0.20$. Отметим, что рассматриваемые начальные характеристики F_0, ζ_0, ζ_0^* зависят сильнее от параметра h_w° , чем от κ .

Формпараметр

$$f_+ = f_+(\kappa, h_w^\circ \mu_\infty)$$

отвечает значению $F = 0$ и может быть найден из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.6), при $F = 0$.

Как отмечалось интегрирование универсальной системы (1.6) производилось до точки $f = f_+$, при каждом определенном значении параметра κ .

На фиг. 2—4 даны

$$F^\circ = F^\circ(f^\circ),$$

$$\zeta^{*\circ} = \zeta^{*\circ}(f^\circ), \quad \zeta^\circ = \zeta^\circ(f^\circ)$$

для нескольких значений κ во всем исследованном диапазоне чисел M_∞ (3.2) и параметра h_w° (3.4) (общие для фиг. 2—4 условные обозначения приведены на фиг. 2).

Как видно из фиг. 2, 3, все численные результаты для функции F° при каждом определенном значении κ с большой степенью точности ложатся на одну кривую, независимо от величины параметров h_w° и M_∞ . Полученные результаты были аппроксимированы функцией $F^\circ = F^\circ(f^\circ, \kappa)$, а именно:

$$F^\circ = \frac{1 - f^\circ}{1 + a f^\circ} \quad \text{при } f^\circ > 0, \quad F^\circ = \frac{1 - b f^\circ}{1 + c f^\circ} \quad \text{при } f^\circ < 0 \quad (4.3)$$

$$\left(a = \frac{1 - 0.284\kappa}{2.5 - 2.548\kappa}, \quad b = \frac{1.3 - 1.1\kappa}{1 - \kappa}, \quad c = 1 + a - b \right)$$

Данные расчетов для ζ_0 и ζ_0^* в рассматриваемой области изменения чисел M_∞ и параметров h_w° тоже могут быть представлены в виде функций $\zeta^\circ = \zeta^\circ(f^\circ, \kappa)$, $\zeta^{*\circ} = \zeta^{*\circ}(f^\circ, \kappa)$ (фиг. 2—4). Точность здесь будет ниже, чем для величин F° . Точки группируются очень густо вблизи значения $f^\circ = 0$, наибольшие отклонения от средних значений, естественно, получаются при граничных значениях формпараметра: $f = f_+$ ($f^\circ = 1$) и $f = f_-$ ($f^\circ = f_-^\circ$). В конфузорной области ($f > 0$) эти отклонения увеличиваются при увеличении κ , в диффузорной области ($f < 0$) — уменьшаются с увеличением κ . Для описания полученных зависимостей также могут быть использованы аппроксимирующие функции, которые, будут правильно схватывать основной характер поведения величин ζ° и $\zeta^{*\circ}$ при изменении f° и κ , независимо от h_w° и M_∞ .

Для относительного трения на стенке ζ° предлагается формула:

$$\zeta^\circ = \left(1 - \frac{f^\circ}{f_0^\circ} \right)^n, \quad n = -0.044x^3 - 0.102x^2 + 0.64$$

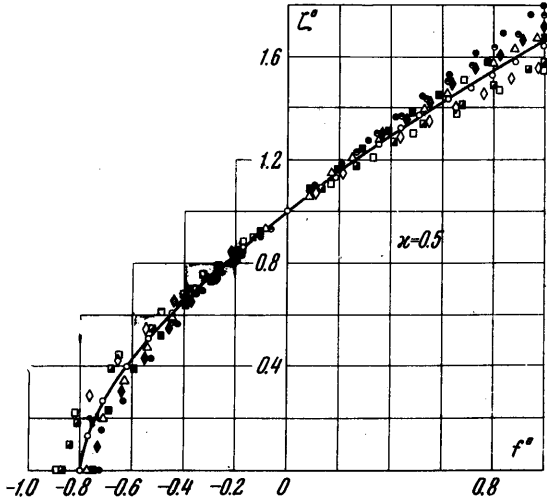
$$f_-^\circ = 0.806\kappa^2 + 0.297\kappa - 1.15 \quad (4.4)$$

Величина $\zeta^{*\circ}$ аппроксимировалась соотношением

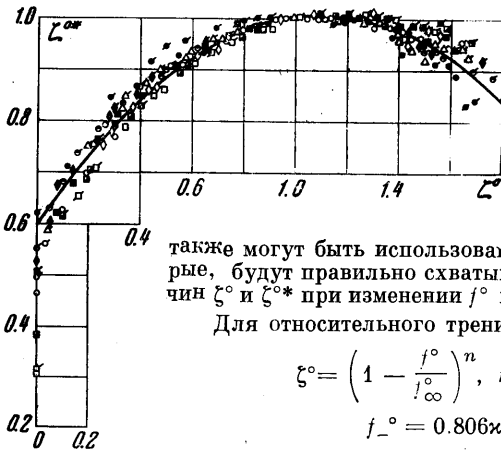
$$\zeta^{*\circ} = 1 - \frac{q_1 f_0^{\circ 2}}{q_2 + f_0^\circ} \quad \text{при } f_0^\circ < 0, \quad \zeta^{*\circ} = 1 - q_3 f_0^{\circ 3} \quad \text{при } f_0^\circ > 0 \quad (4.5)$$

Здесь коэффициенты q_1, q_2, q_3 — функции κ

$$q_1 = \frac{1 - 0.837\kappa}{6.29 - 6.39\kappa}, \quad q_2 = \frac{1 - \kappa}{0.619 - 0.320\kappa}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

$q_3 = 0.07$ при $\kappa = 0$, $q_3 = 0.09$ при $\kappa = 0.5$, $q_3 = 0$ при $\kappa = 0.9$ (4.6)
 Аппроксимирующие зависимости, даваемые формулами (4.3) — (4.7), представлены также на фиг. 2—4 (сплошные линии).

Приведем еще зависимость типа аналогии Рейнольдса $\zeta^{0*} = \zeta^{0*}(\zeta^0)$ (см. фиг. 5). На графике приведены расчетные данные для всего исследованного диапазона M_∞ и h^0_w и параметров κ из области $0 \leq \kappa \leq 0.7$ (для $\kappa = 0$ обозначения экспериментальных точек те же, что и на фиг. 2; для $\kappa = 0.5$ те же обозначения снабжаются черточкой в одну сторону, и черточками в две стороны для $\kappa = 0.7$).

Там же приведена кривая $\zeta^{0*} = \zeta^{0*}(\zeta^0)$, построенная по аппроксимирующей формуле $\zeta^{0*} = 0.600 + 0.738 \zeta^0 - 0.338 \zeta^{02}$ (4.7)

Как и ранее, наибольший разброс точек получается в областях, примыкающих к границам.

Поступило 13 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

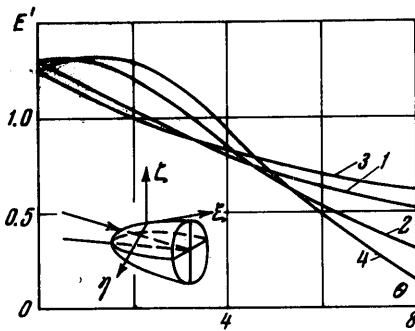
1. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Сб. «Вычислительные методы и программирование», Изд. Моск. ун-та, 1962, вып. 1.
2. Пасконов В. М. Стандартная программа для решения задач пограничного слоя. Сб. «Численные методы в газовой динамике», Изд. Моск. ун-та, 1963, вып. 2.
3. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. Кривцова Н. В. Параметрический метод решения уравнений ламинарного пограничного слоя с продольным градиентом давления в условиях равновесной диссоциации газа. Инж.-физ. ж., 1966, т. 10, № 2.
5. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
6. Симуни Л. М., Терентьев Н. М. Численное решение уравнений «однопараметрической» теории пограничного слоя. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Техническая гидромеханика, 1965, № 248.
7. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, 1962.
8. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1959.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Д. ШЕВЕЛЕВ (Москва)

В работе рассматривается алгоритм численного расчета пространственного пограничного слоя. Уравнения трехмерного пограничного слоя для произвольной системы координат, нормально связанной с поверхностью, приводятся к виду, который позволяет воспользоваться для численных расчетов методом плоскостей. В качестве примера рассмотрен случай пограничного слоя трехосного эллипсоида под углом атаки в несжимаемой жидкости. Уравнения пространственного пограничного слоя для сжимаемой жидкости или газа можно свести к виду, напоминающему случай несжимаемой жидкости, причем методика расчетов сохраняется.

§ 1. Рассмотрим поток жидкости около произвольной кусочно-гладкой поверхности S , заданной в прямоугольной системе координат $y^i (i=1,2,3)$. Выберем некоторую криволинейную систему координат, нормально связанную с поверхностью.



Фиг. 1

Уравнение поверхности $x^3 = 0$, координаты x^1, x^2 выбраны на поверхности. Элемент длины $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Метрический тензор таков, что $g_{33} = 1, g_{3\alpha} = g_{\alpha 3} = 0, g_{ij} = g_{\alpha\beta}$, где $i, j = \alpha, \beta = 1, 2$.

Уравнения трехмерного пограничного слоя для несжимаемой жидкости, согласно [1], имеют вид

$$u^\beta u_{\alpha, \beta} + v \frac{\partial u_\alpha}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \zeta^2} \tag{1.1}$$

$$u_{, \beta}^\beta + \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Здесь u^α — контравариантная составляющая вектора скорости на поверхности;