ДВУХЖИДКОСТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ВЗВЕШЕННОГО СЛОЯ

Ю. А. БУЕВИЧ

(Москва)

Перед постановкой конкретных задач, касающихся движения или процессов переноса во взвешенном слое, необходимо ответить на два основных вопроса, без удовлетворительного разрешения которых последовательное теоретическое изучение взвешенного слоя вообще оказывается невозможным. Первый вопрос связан с формулировкой основных уравнений — уравнений движения взвешенного слоя как двухфазной сплошной среды, второй — с построением некоторой модели взаимодействия взвешенного слоя с ограничивающими его твердыми поверхностями и рассмотрением граничных условий, которые следует налагать на решения этих уравнений.

В предлагаемой работе сделана попытка дать решение обеих указанных проблем. А именно, предложены уравнения, описывающие движение взвешенного слоя как сплошной среды с учетом относительного скольжения фаз, причем одна группа уравнений относится к движению фиктивной жидкой пористой среды, состоящей из частиц и «вмороженной» в них жидкой фазы, а вторая описывает «фильтрацию» жидкой фазы в этой пористой среде. Влияние твердых стенок на движение взвешенного слоя описывается при помощи представлений о существовании вблизи них области, в которой существен перенос импульса жидкой фазой. Развитая модель проиллюстрирована на задаче об обтекании твердой сферы, закрепленной в неограниченном взвешенном слое. Эта задача позволяет также выявить некоторые качественные особенности движения во взвешенном слое.

§ 1. Уравнения движения взвешенного слоя. При описании двухфазных систем, состоящих из жидкости и взвешенных в ней частиц, исходят обычно из представления о фазах как о взаимопроникающих взаимодействующих друг с другом сплошных средах. Соответствующие уравнения движения обсуждены в [1]; они имеют вид

$$
\begin{gathered}
d_1(1-\rho)\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)v_i=-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i}+\frac{\partial \tau_{ij}^{(1)}}{\partial x_j}+d_1(1-\rho)g_i-f_i \\
d_2\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)w_i=-\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i}+\frac{\partial \tau_{ij}^{(2)}}{\partial x_j}+d_2\rho g_i+f_i
\end{gathered}
\qquad (1.1)
$$

Здесь v_i и w_i — скорости жидкой и твердой фаз, d_1 и d_2 — плотности жидкости и материала частиц ($d_2 = \mathrm{const}$), ρ — объемная концентрация частиц в системе, g_i — компоненты ускорения силы тяжести, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ и $\tau_{ij}^{(1)}$, $\tau_{ij}^{(2)}$ — давления и тензоры внутренних напряжений в жидкой и твердой фазах, f_i — сила взаимодействия между фазами, определенная для единицы объема смеси. Из (1.1) нетрудно получить также уравнения, описывающие поведение смеси в целом в терминах ее среднемассовой скорости и средней плотности [1]

$$
v_i^0=d^{-1}[(1-\rho)d_1v_i+\rho d_2w_i],\qquad d=(1-\rho)d_1+\rho d_2
$$

В общем случае величины $p^{(k)}$ и $\tau_{ij}^{(k)}$ в уравнениях (1.1) остаются неопределенными. Структура членов с $p^{(k)}$ и $\tau_{ij}^{(k)}$ очевидна, вообще говоря, лишь в предельном случае, когда концентрация $\rho \ll 1$, и можно принять $p^{(2)}$ и $\tau_{ij}^{(2)}$ тождественно равными нулю, а $p^{(1)}$ и $\tau_{ij}^{(1)}$ — совпадающими с аналогичными величинами для однородной жидкости. Тогда одни уравнения (1.1) представляют просто уравнения Навье — Стокса с дополнительной объемной силой, а другие выражают второй закон Ньютона для отдельных не взаимодействующих между собой частиц. При сравнимых удельных объемах фаз в смеси частицы оказывают значительное влияние как друг на друга, так и на свойства смеси в целом, которое несомненно должно учитываться в членах, описывающих внутрифазовые напряжения. Поскольку общий рецепт описания такого влияния отсутствует, при изучении концентрированных смесей используют различные модельные представления, имеющие характер более или менее обоснованных гипотез. Примером может служить исследование внутренней устойчивости взвешенного слоя и движения пузырей в нем [2], где $p^{(2)}$ считалось равным нулю, а $\tau_{ij}^{(k)}$ были приняты в виде, характерном для однородной вязкой жидкости. Даже если такая гипотеза и справедлива, остается неясной связь констант, входящих в определение $\tau_{ij}^{(1)}$ и $\tau_{ij}^{(2)}$, с величиной вязкости однородной жидкой фазы μ_0 и эффективной вязкостью взвешенного слоя μ. Поскольку во взвешенном слое величина μ может на несколько порядков превосходить μ_0 (см. [3,4]), этот вопрос приобретает немаловажное значение. Грубо говоря, взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах не исчерпывается членами с f_i в уравнениях (1.1), но отражено также и в других членах (1.1), что приводит к существенному изменению характера движения фаз по сравнению с движением вложенных друг в друга сплошных сред с простым силовым взаимодействием. Поэтому представляет интерес сформулировать соответствующие уравнения движения таким образом, чтобы в них входили лишь параметры, которые характеризуют не какую-либо из фаз системы, но всю систему в целом. Именно такие параметры (например, эффективная полная вязкость взвешенного слоя μ) могут быть наиболее просто определены из эксперимента.

При формулировке уравнений будем рассматривать отдельно движение жидкости относительно твердой фазы (межфазовое скольжение) и переносное движение жидкости со скоростью твердой фазы w_i. В качестве первой гипотезы примем, что скольжение фаз можно рассматривать как движение жидкости в некоторой пористой среде, характеризующейся переменной, вообще говоря, пористостью $\varepsilon = 1 - \rho$. Очевидно, эта гипотеза представляется вполне естественной, если величина ρ достаточно велика. Последнее, как правило, имеет место в реальных взвешенных слоях, поэтому гипотезы такого рода использовали в теории и ранее [2,3]. Допустимо считать, что основное сопротивление относительному движению жидкой фазы обусловлено ее взаимодействием с «перегородками» подвижного пористого тела, т. е. со взвешенными частицами. Иными словами, диссипация энергии «фильтрующейся» жидкости за счет этого взаимодействия значительно выше диссипации энергии, обусловленной отличными от нуля градиентами усредненных по каналам между частицами профилей скорости. Очевидно, уравнения фильтрации нужно составлять в связанной с твердой фазой «сопутствующей» координатной системе ξ_i, в которой вводимое пористое тело покоится.

Поле статического давления, как известно, не зависит от выбора системы координат, поэтому уравнения фильтрации запишутся в виде

$$d_1(1-\rho)\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_j\nabla_j\right)u_i=-\nabla_i p^{(1)}+d_1(1-\rho)g_i-f_i^{\circ},\qquad u_i=v_i-w_i$$

Здесь u_i — скорость межфазового скольжения, ∇_i — символ ковариантного дифференцирования в пространстве ξ_i, f_i° — сила межфазового взаимодействия, рассчитанная при $w_i=0$ и имеющая смысл усредненной по поровым каналам силы сопротивления течению жидкости.

При малых u_i и $f_i^{\circ}=\beta u_i$ в стационарном случае и при отсутствии силы тяжести получаем отсюда обычные уравнения Дарси для скорости фильтрации $u_i^{\circ}=\varepsilon u_i$

$$u_i^{\circ}=-\frac{k}{\mu_0}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi_i},\qquad k=\frac{\varepsilon\mu_0}{\beta(\rho)}$$

Переходя от сопутствующей системы координат к неподвижной, получим уравнения относительного движения в форме

$$d_1(1-\rho)\left[\frac{\partial}{\partial t}+(u_j+w_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]u_i=-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i}+d_1(1-\rho)g_i-f_i \tag{1.2}$$

Если градиенты усредненного профиля скорости близки по величине к локальным градиентам, возникающим при обтекании отдельных частиц, эти уравнения должны быть в общем случае дополнены вязким членом того же типа, что и имеющийся в уравнениях Навье — Стокса.

Опуская множитель $d_1\varepsilon$, левые части первых уравнений (1.1) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)v_i=\left[\frac{\partial}{\partial t}+(u_j+w_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]u_i+\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)w_i+u_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

Вычитая уравнения (1.2) из уравнений движения жидкой фазы, получим для переносного движения жидкости

$$d_1(1-\rho)\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)w_i=\frac{\partial \tau_{ij}^{(1)}}{\partial x_j}-d_1(1-\rho)u_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

Складывая их с уравнениями движения твердой фазы, имеем

$$d\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)w_i=$$
$$=-\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}^{(1)}+\tau_{ij}^{(2)})+d_2\rho g_i+f_i-d_1(1-\rho)u_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

Примем вторую основную гипотезу, согласно которой смесь частиц и жидкости можно в некотором приближении рассматривать как изотропную сплошную среду, характеризующуюся обычным тензором вязких напряжений с вязкостью μ, равной измеряемой вязкости слоя, т. е.

$$\tau_{ij}^{(1)}+\tau_{ij}^{(2)}\approx\mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+\frac{\partial w_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial w_k}{\partial x_k}\right)$$

Такое введение μ, как характеристики слоя в целом, представляется вполне естественным. Тогда получим окончательно

$$d\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)w_i=-\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i\partial x_j}\right)-$$
$$-d_1(1-\rho)u_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+d_2\rho g_i+f_i \tag{1.3}$$

Формально эти уравнения можно трактовать как уравнения движения некоторой фиктивной пористой среды, состоящей из каркаса частиц и «вмороженной» в него жидкой фазы, под действием объемных сил специального вида. Заметим, что в более общем случае вместо одного коэффициента вязкости μ можно ввести коэффициенты вязкости «по направлениям», а также коэффициент объемной вязкости. Предположение об изотропии представляет собой, разумеется, лишь некоторую идеализацию реального взвешенного слоя.

Уравнения сохранения массы фаз имеют свой обычный вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(d_1\varepsilon)+\operatorname{div}[d_1\varepsilon(\mathbf{u}+\mathbf{w})]=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{w})=0 \tag{1.4}$$

Для замыкания системы уравнений (1.2) — (1.4) ее необходимо дополнить уравнениями состояния твердой и жидкой фаз. Формулировка второго из них обычно не представляет серьезных затруднений; для простоты примем в дальнейшем $d_1 = \mathrm{const}$. Наоборот, вывод первого уравнения, равно как и определение коэффициентов переноса во взвешенном слое, в частности функции $\mu = \mu(\rho, u, \ldots)$, требует независимого детального анализа случайных движений обеих фаз и вычисления его средних характеристик, что представляет самостоятельную задачу и не входит в цели данной работы. Ниже μ рассматривается как эмпирическая величина, которая может быть получена из эксперимента [3,4], а уравнение состояния твердой фазы принято в наиболее простом виде, а именно $\rho = \mathrm{const}$ (приближение «несжимаемого» взвешенного слоя), причем давление $p^{(2)}$ считается постоянным. Поскольку, согласно [2,5], величину $\nabla p^{(2)}$ можно считать пропорциональной $\nabla\rho$, последнее допущение представляется вполне оправданным.

Заметим, наконец, что в случае, когда взвешенный слой псевдоожижен газом ($d_1 \ll d_2$), уравнения (1.3) фактически совпадают с уравнениями движения твердой фазы.

§ 2 Взаимодействие с твердыми стенками. Процессы взаимодействия двухфазной системы с твердыми стенками нужно рассмотреть для того главным образом, чтобы уметь формулировать краевые задачи для полученных в § 1 уравнений. Очевидно, при приближении к стенке нормальная компонента скорости твердой фазы обращается в нуль. Однако, в общем случае такое утверждение несправедливо для тангенциальной компоненты этой скорости, ибо непосредственно соприкасающиеся со стенкой частицы не обязательно «прилипают» к ней,—вообще говоря, они отделены от стенки прослойками жидкой фазы. Можно утверждать лишь, что относительному движению твердой фазы у стенки препятствует некая эффективная тангенциальная сила, которая связана как с возникающими в указанных прослойках вязкими напряжениями, так и с силой трения при непосредственном контакте частиц со стенкой. При этом перемещающиеся вблизи стенки частицы нарушают прилегающий к стенке слой жидкой фазы и вовлекают в движение также и жидкость. Грубо говоря, это приводит к нарушению условий прилипания для жидкости — в непосредственной близости от твердой границы скорость жидкой фазы может весьма значительно отличаться от нуля.

С другой стороны, сформулированные в § 1 уравнения относятся только к объему взвешенного слоя, когда характерный линейный масштаб движения намного больше радиуса a частиц, составляющих взвешенный слой, и, таким образом, обе фазы можно рассматривать как сплошные среды. Вблизи стенки (по крайней мере, на расстояниях порядка a от нее) эти уравнения становятся непригодными, они справедливы лишь вне некоторой пристеночной области, и граничные условия для них должны задаваться именно на границе этой области, а не на самой стенке. Если бы было возможным независимое определение вида таких граничных условий, то существованием пристеночной области, равно как и происходящими в ней процессами, можно было бы пренебречь вообще. Однако, как следует из сказанного выше, явное рассмотрение процессов переноса импульса в этой области оказывается необходимым. Основной эффект, связанный с существованием такой области, состоит в том, что внутри нее (иначе, в жидких прослойках между частицами и стенкой) градиенты скорости жидкой фазы могут принимать сравнительно большие значения, так что представления о незначительном влиянии вязких напряжений фильтрующейся жидкости, игравшие основную роль в рассуждениях предыдущего параграфа, в этой области становятся неправомерными. Простейшая модель пристеночной области, учитывающая этот основной эффект, состоит в усреднении всех жидких прослоек по их толщине и в замене этих прослоек тонким пристенным слоем однородной жидкости, отделяющим область, занятую двухфазной средой, от стенки. Движение в этом пристенном слое описывается обычными уравнениями Навье — Стокса, и через его посредство и осуществляется взаимодействие двухфазной системы с границей. При этом предполагается, что движение в пристенном слое в первом приближении не зависит от случайного попадания в него отдельных частиц твердой фазы.

Эффективная толщина l такого слоя представляет, с одной стороны, усредненную по поверхности стенки толщину жидких прослоек между стенкой и частицами, а с другой стороны, характеризует то минимальное расстояние от стенки, начиная с которого становятся применимыми уравнения взвешенного слоя. Поэтому ясно, что величина l имеет порядок a. Приближенно ее можно оценить, предполагая, что l близка к среднему расстоянию между частицами в объеме взвешенного слоя. Легко видеть, что последнее расстояние равно примерно величине $n^{1/3} \approx (^3/_4\,\pi)^{1/3} a\rho^{-1/3}$, где n — счетная концентрация частиц. Таким образом, можно записать

$$l = Ca\rho^{-1/3} \tag{2.1}$$

где C — параметр, имеющий порядок единицы.

Более точное определение C вряд ли возможно без специального статистического анализа процессов в пристенном слое. Ниже будем рассматривать C в (2.1) как некую эмпирическую величину. Это отчасти оправдано тем обстоятельством, что, как станет ясно в дальнейшем, величина C крайне слабо влияет как на поле скорости жидкой фазы в непосредственной близости от поверхности обтекаемой во взвешенном слое твердой сферы, так и на величину действующей на нее силы.

Излагаемая модель дает возможность предложить следующие граничные условия: на поверхности пристенного слоя — непрерывность нормального потока и тангенциальной скорости жидкой фазы и непрерывность касательного и нормального напряжений, а на твердой границе — обращение в нуль нормальной и тангенциальной скоростей жидкой фазы.

§ 3. Твердая сфера во взвешенном слое. Будем рассматривать псевдоожиженный газом слой, так что $d_1 \ll d_2$, $\mu_0 \ll \mu$, и можно записать для силы межфазового взаимодействия при достаточно малом числе Рейнольдса

$$f_i \approx \beta u_i, \quad u_i = u_0\delta_{i1} + u'_i, \quad u_0 = d_2\rho g / \beta, \quad \beta = {}^9/_2\mu_0 a^{-2}\rho K(\rho) \tag{3.1}$$

Здесь u_0 — скорость межфазового скольжения в невозмущенном сферой взвешенном слое, направленная вдоль оси x, а $K(\rho)$ — функция, учитывающая влияние коллектива частиц на сопротивление каждой из них потоку псевдоожижающего газа. Для $K(\rho)$ имеются как опытные, так и теоретические представления [6].

В пренебрежении членами, пропорциональными d_1, уравнения «несжимаемого» взвешенного слоя (1.2) — (1.4) имеют в стационарном случае вид (с учетом (3.1))

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} = \beta u_i', \qquad \mu\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_j} + \beta u_i' = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \tag{3.2}$$

Нетрудно видеть, что уравнения движения твердой фазы формально подобны обычным уравнениям гидродинамики в стоксовом приближении. Скорость жидкости в пристенном слое $\mathbf{v}$ удовлетворяет обычным уравнениям Стокса.

Граничные условия на поверхности сферы ($r = R$) и на границе пристенного слоя ($r = R' = R + l$), согласно результатам § 2, можно записать в виде

$$v_r = v_\theta = 0, \quad r = R$$

$$w_r = 0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}', \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}', \quad \varepsilon(u_\theta + w_\theta) + \rho w_\theta = v_\theta, \quad \varepsilon(u_r + w_r) = v_r$$

$$r = R' = R + l$$

Здесь σ_{rr}' и $\sigma_{r\theta}'$ — компоненты тензора напряжений в пристенном слое, а σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$ — вне его, $\mathbf{v}$ — скорость жидкости в пристенном слое. На бесконечном удалении u' и $\mathbf{w}$ должны обращаться в нуль (рассматриваем для простоты только случай, когда сфера неподвижна относительно взвешенного слоя). Решение задачи имеет вид

$$w_r = \left(\frac{W_1}{r^3} + \frac{W_2}{r}\right)\cos\theta, \quad w_\theta = \left(\frac{W_1}{2r^3} - \frac{W_2}{2r}\right)\sin\theta, \quad p = \mu\frac{W_2}{r^2}\cos\theta \qquad (3.3)$$

$$u_r = \left(u_0 + \frac{2\mu}{\beta}\frac{W_2}{r^3}\right)\cos\theta, \quad u_\theta = \left(-u_0 + \frac{\mu}{\beta}\frac{W_2}{r^3}\right)\sin\theta$$

$$v_r = \left(\frac{V_1}{r^3} + \frac{V_2}{r} + V_3 + V_4 r^2\right)\cos\theta, \quad v_\theta = \left(\frac{V_1}{2r^3} - \frac{V_2}{2r} - V_3 - 2V_4 r^2\right)\sin\theta$$

$$p' = \mu_0\left(\frac{V_2}{r^2} + 10V_4 + 3P\right)\cos\theta$$

Здесь p и p' — поправки к давлению вне и внутри слоя соответственно. Вычисление постоянных V_i, W_i, P в предположении $\mu_0 \ll \mu$ дает

$$\frac{V_1}{R^3} = k\left(\xi - \frac{1 - 3\alpha\xi^2}{\xi^2}\right), \qquad \frac{V_2}{R} = -3k\left[\xi^3(1 + 2\alpha\xi^2) - \frac{1 - 3\alpha\xi^2}{\xi^2}\right]$$

$$V_3 = k\left[\frac{9}{2}\xi^3(1 + 2\alpha\xi^2) - \frac{5}{2}\xi - \frac{2}{\xi^2}(1 - 3\alpha\xi^2)\right]$$

$$V_4 R^2 = -\frac{3}{2}k\left[\xi^3(1 + 2\alpha\xi^2) - \xi\right], \quad \xi = \frac{R}{R'}, \quad \alpha = \frac{\mu_0\varepsilon}{\beta R^2}$$

$$\frac{W_1}{R^3} = \varkappa k\left(\frac{3}{2\xi^4} - \frac{5}{2\xi^2} + \xi\right), \qquad \frac{W_2}{R} = -\varkappa k\left(\frac{3}{2\xi^2} - \frac{5}{2} + \xi^3\right)$$

$$PR = k\left[-\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\xi^2 + 2\xi^5 + 3\alpha\xi^2(3 + 2\xi^5)\right], \quad k = \frac{u_0\varepsilon}{\Delta}, \quad \varkappa = \frac{\mu_0}{\mu}$$

$$\Delta = -2(1 + 2\alpha\xi^2)\xi^4 + {}^9/_2(1 + 2\alpha\xi^2)\xi^3 - 5(1 + \alpha\xi^2)\xi +$$
$$+ \left(\frac{9}{2} - 6\alpha\xi^2\right)\frac{1}{\xi} - 2(1 - 3\alpha\xi^2)\frac{1}{\xi^2}$$

Для компонент тензора вязких напряжений на поверхности сферы получим

$$\sigma_{rr}'|_{r=R} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 k}{R}\left[\frac{1}{\xi^2} - \frac{9}{2} + 5\xi + \frac{5}{2}\xi^2 - 6\xi^3 + 2\xi^5 + 3\alpha(-1 + 3\xi^3 - 4\xi^5 + 2\xi^7)\right]\cos\theta$$

$$\sigma_{r\theta}'|_{r=R} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 k}{R}\left[-\frac{1}{\xi^2} + \frac{5}{2}\xi - \frac{3}{2}\xi^3 + 3\alpha(1 - \xi^5)\right]\sin\theta$$

Сила F, действующая на сферу,

$$F = 4\pi\mu_0 kR\left[-3\xi^{-2} + {}^9/_2 - {}^5/_2\xi^2 + 3\xi^3 - 2\xi^5 + 3\alpha(1 - \xi^2)(3 + 2\xi^5)\right] \qquad (3.4)$$

Легко видеть, что в пределе $\xi \to 0$ (что может быть осуществлено двояко: при $\rho \to 0$, $l \to \infty$ и при $\rho = \text{const} \neq 0$, но $R \to 0$) полученные выражения соответствуют решению обычной задачи Стокса. Из (3.4) при малых ξ получаем

$$F \approx 6\pi\mu_0 R\varepsilon u_0(1 + {}^9/_4\,\xi) = F_0(1 + {}^9/_4\,\xi) \qquad (3.5)$$

Отсюда видно, что с увеличением радиуса сферы отношение действующей на нее силы к силе Стокса F_0 возрастает. В противоположном случае $\xi \to 1$ получим после вычислений

$$F \approx F_0(1 - {}^2/_{15}\alpha\delta^{-2}), \quad \delta = l \,/\, R \qquad (3.6)$$

Имеем с учетом (2.1)

$$\frac{\alpha}{\delta^2} = \frac{2}{9}\,\frac{1-\rho}{\rho K(\rho)}\,\frac{a^2}{l^2} = \frac{2}{9C^2}\,\frac{1-\rho}{\rho^{1/3}K(\rho)}$$

Поскольку во взвешенном слое $K(\rho) \gg 1$, а $C \sim 1$, вторым членом в (3.6) можно пренебречь, т. е. сила F оказывается не зависящей от толщины пристенного слоя и совпадающей с F_0 также в предельном случае $\xi \to 1$. Сравнивая (3.5) и (3.6), получим, что возрастание $F \,/\, F_0$ с ростом R при определенном значении R сменяется убыванием.

В этом же случае $\xi \to 1$ имеем на малых расстояниях от сферы $v_\theta \approx -{}^3/_2\varepsilon u_0\eta\sin\theta$, $v_r = {}^3/_4\varepsilon u_0\eta^2\cos\theta$, $\eta = R^{-1}(r - R) \ll 1$.

Касательная скорость частиц вблизи поверхности погруженной во взвешенный слой сферы при $\xi \to 1$ оказывается направленной обратно основному потоку жидкой фазы.

Физически это обстоятельство, равно как и убывание отношения $F \,/\, F_0$ с ростом R, можно объяснить тем, что введение во взвешенный слой тела достаточно больших размеров затормаживает движение псевдоожижающего агента. Это тело как бы «экранирует» частицы, расположенные вблизи его поверхности, от воздействия потока. Последнее приводит к тому, что сила тяжести начинает превосходить силу динамического воздействия потока жидкой фазы, так что такие частицы «осыпаются» вдоль поверхности тела в направлении действия силы тяжести. Они способствуют выравниванию профиля скорости жидкости в окрестности тела (в частности, в пристенном слое) и тем самым уменьшают отношение $F \,/\, F_0$. Этот механизм уменьшения сопротивления совершенно иной, чем, например, в случае, когда твердое тело покрыто тонкой жидкой пленкой и обтекается однородным потоком иной жидкости [7], хотя формально можно говорить об аналогии между жидкой пленкой во втором случае и пристенным слоем однородной псевдоожижающей среды в первом.

Заметим, что отмеченное «осыпание» частиц вблизи стенок, ограничивающих занятый взвешенным слоем объем, представляет, по-видимому, основную причину возникновения циркуляции частиц и жидкой фазы в реальных взвешенных слоях.

Автор благодарен Ю. С. Рязанцеву за полезные советы.

Поступило 3 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17, № 3, стр. 261.
2. Murray J. D. On the Mathematics of Fluidization. Part 1. Fundamental Equations and Wave Propagation. Part 2. Steady Motion of Fully Developed Bubbles. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, No 3, p. 465, vol. 22, No 1, p. 57.
3. Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдоожижение твердых частиц. Изд-во «Химия», 1965.
4. Furukawa J., Ohmae T. Liquid-like Properties of Fluidized Systems. Industr. Engng. Chem., 1958, vol. 50, p. 821.
5. Jackson R. The Mechanics of Fluidized Beds. Part 1. The Stability of the State of Uniform Fluidization. Trans. Inst. Chem. Engng, 1963, vol. 41, No 1, p. 13.
6. Буевич Ю. А. Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах. ПМТФ, 1966, № 3.
7. Буевич Ю. А., Гупало Ю. П. Обтекание тела, покрытого жидкой пленкой. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5, стр. 11.