

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ТЕЛ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

А. В. ШИПИЛИН

(Москва)

Рассматривается задача о нахождении формы плоских и осесимметричных тел, обеспечивающих минимальное волновое сопротивление в сверхзвуковом потоке совершенного газа. Решение ищется среди тел, при обтекании которых возникают присоединенные ударные волны. Ограничения на контур тела произвольны: могут задаваться размеры тела, объем, площадь и т. п. Подобные задачи с произвольными изопериметрическими условиями могут быть решены методом, предложенным в работах [1,2]. Этот метод состоит в том, что в качестве дополнительных связей привлекаются точные уравнения газовой динамики, описывающие течение. В работах [3-6] этот метод получил свое дальнейшее развитие при решении ряда задач.

1. Пусть  $x$  и  $y$  — координатные оси (фиг. 1),  $ab$  — контур искомого тела,  $ac$  — присоединенная ударная волна,  $bc$  — характеристика второго семейства,  $cd$  — характеристика первого семейства. Предполагается, что внутри области  $abc$  течение сверхзвуковое и ударных волн нет. Набегающий поток является равномерным. Пусть  $u$  и  $v$  — проекции скорости на оси  $x$  и  $y$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность газа,  $\psi$  — функция тока, причем

$$d\psi = y^{\nu} \rho (udy - vdx)$$

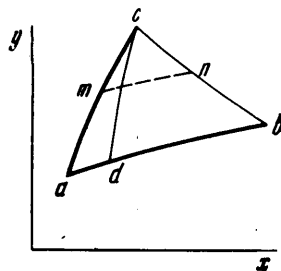
$\nu = 0$  и  $1$  соответственно в плоском и осесимметричном случае. Здесь все величины считаются безразмерными, а  $\psi$  на теле примем равным нулю.

Анализ задачи проводится в переменных  $\psi, y$ . Стационарное неизэнтропическое течение газа внутри области  $abc$  описывается уравнениями

$$L_1 \equiv \frac{\partial y^{\nu} p}{\partial \psi} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad L_2 \equiv \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{u}{v} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{y^{\nu} \rho v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{w^2}{2} + \frac{\kappa p}{(\kappa - 1)\rho} = \frac{1}{2} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}, \quad \frac{p}{\rho^{\kappa}} = \varphi^{\kappa-1}(\psi)$$

$$w = \sqrt{u^2 + v^2}$$



Фиг. 1

Здесь  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $\varphi$  — энтропийная функция. Волновое сопротивление выражается функционалом

$$\chi = \int_{y_a}^{y_b} p[x(y)] y^{\nu} dy \quad (1.2)$$

Координата  $y_b$  может быть как фиксированной, так и произвольной в зависимости от условий, накладываемых на контур тела. Величина  $x_b$  должна быть задана. В общем случае может быть задано  $n$  изопериметрических условий, которые записываются следующим образом:

$$r^i = \int_{y_a}^{y_b} f^i[x_i(y), x'(y), y] dy \quad (1.3)$$

Здесь  $x(y)$  — функция, описывающая контур тела,  $x'(y)$  — ее производная по  $y$ . Вдоль контура  $ab$  выполняется условие

$$vx'(y) - u = 0 \quad (1.4)$$

Задача формулируется следующим образом: найти функцию  $x(y)$ , реализующую экстремум функционала (1.2), удовлетворяющую изопериметрическим условиям (1.3) при выполнении связи (1.4) вдоль  $ab$  и уравнений (1.1) в области  $abc$ . Обозначим область, заключенную внутри  $abc$ , буквой  $S$ . Составим функционал Лагранжа

$$I = \int_{y_a}^{y_b} [py^v + \gamma_0(y)(vx' - u)] dy + \sum_{i=1}^n \gamma_i r^i + \iint_S [h_1(\psi, y)L_1 + h_2(\psi, y)L_2] dy d\psi \quad (1.5)$$

Здесь  $\gamma_i$  — постоянные, а  $\gamma_0(y)$ ,  $h_1(\psi, y)$  и  $h_2(\psi, y)$  — переменные множители Лагранжа. Определим функции  $x(y)$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $\gamma_0$  так, чтобы функционал (1.5) принял стационарное значение. Тогда согласно [7] найденные функции обеспечат экстремум исходного функционала (1.2) при заданных ограничениях.

2. Вычислим первую вариацию функционала  $I$ . Отметим, что в плоскости  $\psi y$  положения тела  $ab$  и ударной волны  $ac$  являются фиксированными. Могут смещаться лишь положения точек  $b$  и  $c$ . Форма характеристики  $bc$  изменяется при варьировании течения в области  $S$ . Однако вариация двойного интеграла, связанная с изменением границы области  $S$  отсутствует из-за равенства нулю подынтегральных выражений.

Первая вариация функционала (1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta I = & \left( py^v + \sum_{i=1}^n \gamma_i f^i \right) \delta y_b + \int_{y_a}^{y_b} \left[ \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial f^i}{\partial x} \delta x + \right. \\ & \left. + \left( \gamma_0 v + \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial f^i}{\partial x'} \right) \delta x' + y^v \delta p + \gamma_0 x' \delta v - \gamma_0 \delta u \right] dy + \\ & + \iint_S \left\{ h_1(\psi, y) \left[ \frac{\partial \delta(y^v p)}{\partial \psi} - \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right] + h_2(\psi, y) \left[ \frac{\partial \delta(uv^{-1})}{\partial \psi} + \frac{\partial \delta(y^v \rho v)^{-1}}{\partial y} \right] \right\} d\psi dy \end{aligned} \quad (2.1)$$

Производные от вариаций функций исключаются в двойных интегралах при помощи формулы Грина. Вариация  $\delta x'$  в интеграле вдоль  $ab$  исключается путем интегрирования по частям, при этом учитывается то, что  $x(y_b)$  фиксировано. Используя конечные уравнения системы (1.1) выразим вариации  $\delta p$  и  $\delta \rho$  через вариации  $\delta u$ ,  $\delta v$  и  $\delta \psi$  по формулам

$$\delta p = -\rho u \delta u - \rho v \delta v - \frac{p}{\varphi} \delta \varphi, \quad \delta \rho = -\frac{\rho u}{a^2} \delta u - \frac{\rho v}{a^2} \delta v - \frac{\rho}{\varphi} \delta \varphi \quad (2.2)$$

где  $a^2 = \kappa \rho^{-1}$  — квадрат скорости звука. Кроме того, заметим, что функции, описывающие течение, в точках на ударной волне зависят только от  $\sigma$  — угла наклона ударной волны к оси  $x$  и параметров набегающего потока. Вариация любой из этих функций  $f$  связана с вариацией  $\delta \sigma$  соотношением

$$\delta f = \frac{df}{d\sigma} \delta \sigma \quad (2.3)$$

Учитывая все сказанное и используя (2.2) и (2.3), преобразуем выражение (2.1) к виду

$$\begin{aligned} \delta I = & W_1 \delta y_b + \int_{y_a}^{y_b} (U_1 \delta u + V_1 \delta v + \Phi_1 \delta \varphi + W_2 \delta x) dy + \\ & + \int_{\psi_b}^{\psi_c} (U_2 \delta u + V_2 \delta v + \Phi_2 \delta \varphi) d\psi + \int_{\psi_c}^{\psi_a} W_3 \delta \sigma d\psi + \\ & + \iint_S (U_3 \delta u + V_3 \delta v + \Phi_3 \delta \varphi) d\psi dy \end{aligned}$$

Коэффициенты при вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$ ,  $\sigma$ ,  $y_b$ ,  $x$  являются известными функциями от параметров течения и множителей Лагранжа. Определим  $h_1(\psi, y)$  и  $h_2(\psi, y)$  в области  $S$ , приравняв нулю выражения, стоящие при  $\delta u$  и  $\delta v$  в двойном интеграле.

Получим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} U_3 &\equiv y^{\nu} \rho u \frac{\partial h_1}{\partial \psi} + \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{1}{v} \frac{\partial h_2}{\partial \psi} - \frac{|u|}{y^{\nu} \rho v a^2} \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0 \\ V_3 &\equiv y^{\nu} \rho v \frac{\partial h_1}{\partial \psi} + \frac{u}{v^2} \frac{\partial h_2}{\partial \psi} - \frac{v^2 - a^2}{y^{\nu} \rho v^2 a^2} \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Система (2.4) гиперболична при  $w > a$  и имеет два семейства характеристик, совпадающих с характеристиками системы (1.1). Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$y^{\nu} \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha dh_1 \mp dh_2 = 0 \quad \left( \sin \alpha = \frac{a}{w} \right) \quad (2.5)$$

Здесь верхний знак относится к характеристикам первого семейства. Из обращения в нуль выражения при  $\delta x$  в интеграле вдоль  $ab$  получим

$$\frac{d\gamma_0 v}{dy} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \left[ \frac{\partial f^i}{\partial x} - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial f^i}{\partial x} \right) \right] \quad (2.6)$$

Приравняв нулю выражения при  $\delta u$  и  $\delta v$  в интеграле вдоль  $ab$  и исключив из них  $\gamma_0(y)$  после интегрирования уравнения (2.6), получим граничные условия для  $h_1$  и  $h_2$ , вдоль  $ab$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \sum_{i=1}^n \gamma_i \int_y^{y_b} \left[ \frac{\partial f^i}{\partial x} - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial f^i}{\partial x} \right) \right] dy + \gamma^* \quad (2.7)$$

Здесь  $\gamma^*$  — константа интегрирования. В силу первого условия (2.7) уничтожается коэффициент при  $\delta \varphi$  в интеграле вдоль  $ab$ . В задачах, в которых  $y_b$  фиксировано, внеинтегральная часть вариации  $\delta I$  пропадает из-за того, что  $\delta y = 0$  при  $y = y_b$ . Если по условию задачи  $y_b$  свободно, то нужно потребовать, чтобы в точке  $y_b$  выполнялось равенство

$$W_1 \equiv p y^{\nu} + \sum_{i=1}^n \gamma_i f^i = 0 \quad (2.8)$$

Приравняв нулю коэффициенты при  $\delta u$  и  $\delta v$  в интеграле вдоль характеристики  $bc$ , получим после простых преобразований

$$h_2 - y^{\nu} \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha h_1 = 0 \quad (2.9)$$

Заметим, что вариация  $\delta \varphi$  во всем течении сохраняет свое значение вдоль линии тока и выражается через  $\delta \sigma$  по формуле (2.3).

В выражение  $\Phi_3$ , стоящее перед  $d\varphi$  в двойном интеграле, входят частные производные  $\partial h_1/\partial\psi$  и  $\partial h_2/\partial y$ . Используя (2.4), выразим  $\partial h_1/\partial\psi$  через  $\partial h_1/\partial y$  и  $\partial h_2/\partial y$ . Пусть  $mn$  — произвольная линия тока (фиг. 1), которой соответствует значение  $\psi_m$ . Преобразуем двойной интеграл к виду

$$\iint_S \Phi_3 \delta\varphi d\psi dy = - \int_{\psi_a}^{\psi_c} \left\{ \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\sigma} \delta\sigma \left[ \int_{h_1(\psi, y_m)}^{h_1(\psi, y_n)} \frac{u \sin^2 \alpha}{\kappa} dh_1 + \int_{h_2(\psi, y_m)}^{h_2(\psi, y_n)} \frac{\kappa - \cos^2 \alpha}{\kappa y^{\nu} \rho v} dh_2 \right] \right\} d\psi$$

Используя соотношения, связывающие параметры течения перед ударной волной и за нею, можно упростить выражение  $W_3$ , стоящее перед  $d\sigma$  в интеграле вдоль ударной волны  $ac$ . Объединяя все выражения при  $d\sigma$ , входящие в вариацию  $\delta I$ , и приравнивая нулю полученную сумму, найдем, что при каждом  $\psi$  должно выполняться равенство

$$E \equiv N h_2 + A = 0, \quad \frac{1}{N} = \frac{1}{\varphi} \left( y^{\nu} \rho_0 w_0 \sin^2 \sigma \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) \left( \vartheta = \arctg \frac{v}{u} \right) \quad (2.10)$$

$$A = \int_{h_1(\psi, y_m)}^{h_1(\psi, y_n)} \frac{u \sin^2 \alpha}{\kappa} dh_1 + \int_{h_2(\psi, y_m)}^{h_2(\psi, y_n)} \frac{\kappa - \cos^2 \alpha}{\kappa y^{\nu} \rho v} dh_2 + h_1 \frac{\rho \sin(\vartheta - \alpha)}{\rho v \sin \alpha} - \frac{h_2}{y^{\nu} \rho v}$$

Здесь  $\rho_0$  — плотность газа в набегающем потоке. Первое слагаемое в уравнении (2.10) вычисляется на ударной волне, а внеинтегральные члены, входящие в  $A$ , — на характеристике  $bc$  при соответствующем  $\psi$ . В силу условий (2.4), (2.6) — (2.10) первая вариация функционала (1.5) обращается в нуль.

Полученные уравнения составляют систему необходимых условий, определяющих оптимальный контур. Задав некоторый контур  $ab$ , можно для заданного набегающего потока рассчитать течение в области  $S$ , которая является для  $ab$  областью влияния. По найденному течению решается задача Коши для множителей  $h_1$  и  $h_2$ , удовлетворяющих системе уравнений (2.4) и граничным условиям (2.7). Контур  $ab$  должен быть выбран таким, чтобы параметры течения и функции  $h_1, h_2$  удовлетворяли условиям (2.9) и (2.10). Действительно, участок контура  $ad$  (фиг. 1) определяет течение в области  $adc$  и ударную волну  $ac$ , т. е. угол  $\sigma$  как функцию от  $\psi$ . Участок  $db$  при данных на характеристике  $dc$  определяет течение в области  $bcd$  и характеристику  $bc$ . Таким образом, свободны две функции, управляя которыми можно удовлетворить условиям (2.9) и (2.10). Кроме того, имеем  $n$  произвольных констант  $\gamma_i$ , которые выбираются так, чтобы удовлетворить  $n$  изопериметрическим условиям (1.3). Константа интегрирования  $\gamma^*$  находится из условия одновременного выполнения равенств (2.7) и (2.9) в точке  $b$ . Если величина  $y_b$  свободна, то для нахождения ее имеется условие (2.8).

3. Рассмотрим теперь соотношения (2.9) и (2.10) в точке  $c$ . Интегральные члены, входящие в (2.10), в этой точке пропадают. Условия (2.9) и (2.10) относительно  $h_1$  и  $h_2$  представляют собой однородную систему двух линейных алгебраических уравнений. Если  $h_1$  и  $h_2$  не равны нулю, то детерминант этой системы должен обратиться в нуль. Так как все параметры течения в этой точке определяются через  $\sigma$ , то получается некоторое условие на  $\sigma$  при  $\psi = \psi_c$ .

$$\varepsilon \equiv \kappa \rho w \sin^2 \vartheta - \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\sigma} \rho_0 w_0 \sin^2 \sigma [\kappa \sin \vartheta - \cos \alpha \sin(\vartheta - \alpha)] = 0 \quad (3.1)$$

Это означает, что решение поставленной таким образом задачи существует лишь при некоторых частных соотношениях между параметрами набегающего потока и наложенными на тело условиями (1.3). В общем случае при непрерывных  $h_1$  и  $h_2$  в точке  $c$  нельзя удовлетворить условиям (2.9) и (2.10) одновременно. Поэтому необходимо ввести разрыв множителей Лагранжа в точке  $c$ .

В связи с введением разрывных множителей следует упомянуть работы [3,7,8]. В работе [3] разрывные множители Лагранжа впервые были рассмотрены в применении к вариационным задачам газовой динамики. Показано, что линиями разрыва могут быть только характеристики, и дан вывод условий для разрывов. Задачи газовой динамики с использованием разрывных множителей Лагранжа рассмотрены также в [5].

Разобьем область  $S$  на три подобласти, как показано на фиг. 2. Здесь  $dc_1$  — характеристика второго семейства. Учтем уравнения (1.1) в подобластях  $S_i$  при помощи множителей  $h_1^{(i)}$  и  $h_2^{(i)}$ . Внутри каждой из подобластей множители определяются при помощи системы уравнений (2.4), а на участках  $ad$  и  $db$  удовлетворяют условиям (2.7). При вычислении первой вариации появляются интегралы вдоль характеристик  $dc_1$  и  $cd$ , содержащие под знаком интеграла вариации  $\delta u$ ,  $\delta v$  и  $\delta \sigma$ . Учитывая, что параметры течения и их вариации непрерывны на  $dc_1$  и  $cd$ , получим, что в коэффициенты при  $\delta u$ ,  $\delta v$  и  $\delta \sigma$  войдут  $\Delta h_1$  и  $\Delta h_2$ , где  $\Delta h_1$ ,  $\Delta h_2$  — разрывы множителей. Приравнявая нулю выражения при  $\delta u$  и  $\delta v$ , получим два условия для разрывов. На характеристиках эти условия линейно зависимы. Имеем [3]

$$y^0 \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha \Delta h_1 \pm \Delta h_2 = 0 \quad (3.2)$$

где верхний знак относится к характеристикам первого семейства. Таким образом, задав, например,  $\Delta h_1$  в одной точке характеристики, можно определить из (3.2) и (2.5) разрыв множителей вдоль всей характеристики. Условие (2.9) не изменится от введения разрывных множителей, а условие (2.10) примет вид

$$E \equiv \begin{cases} N h_2^{(2)} - \Delta h_1^{(1)} B + A = 0 & (\psi_{c_1} \leq \psi \leq \psi_c) \\ N h_2^{(3)} - \Delta h_1^{(1)} B + \Delta h_1^{(2)} C + A = 0 & (\psi_a \leq \psi \leq \psi_{c_1}) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\Delta h_1^{(1)} = h_1^{(2)} - h_1^{(1)}, \quad \Delta h_1^{(2)} = h_1^{(3)} - h_1^{(2)}$$

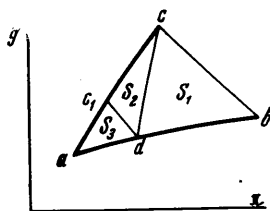
$$B = \frac{p \sin(\vartheta + \alpha)}{\rho v \sin \alpha} - v \operatorname{tg} \alpha, \quad C = \frac{p \sin(\vartheta - \alpha)}{\rho v \sin \alpha} - v \operatorname{tg} \alpha$$

При этом  $\Delta h_1^{(1)}$  и  $B$  берутся вдоль характеристики  $cd$ , а  $\Delta h_1^{(2)}$  и  $C$  — вдоль  $dc_1$ . Путем интегрирования (3.2) и (2.5) найдем

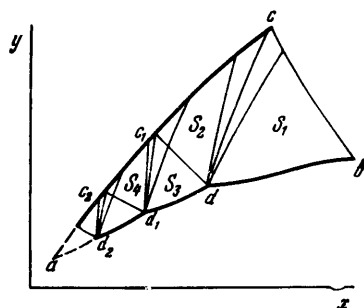
$$\begin{aligned} \Delta h_1^{(1)} &= \frac{\mu_1}{\sqrt{G}}, & \Delta h_2^{(1)} &= -\mu_1 \sqrt{G} \\ \Delta h_1^{(2)} &= \frac{\mu_2}{\sqrt{G}}, & \Delta h_2^{(2)} &= \mu_2 \sqrt{G} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$(G = y^0 \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha)$$

Здесь константа  $\mu_1$  выбирается из условия одновременного удовлетворения равенств (2.9) и (2.10) в точке  $c$ , а  $\mu_2 = -\mu_1$ . В этом случае  $h_1 = 1$  в точке  $d$  при подходе слева и справа. Легко видеть, что при этом второе условие (2.7) не выполняется слева от разрыва. Поэтому в точке  $d$  должны рваться параметры потока, что обеспечивается введением излома контура  $ab$  в этой точке. Разрывы  $\Delta h_1^{(2)}$  и  $\Delta h_2^{(2)}$ , распространяясь вдоль  $dc_1$ , придут в точку  $c_1$ , находящуюся на ударной волне. В этой точке имеется только один произвол — выбор угла  $\sigma$ . Условие (3.3) должно быть



Фиг. 2



Фиг. 3

тура  $ab$  в этой точке. Разрывы  $\Delta h_1^{(2)}$  и  $\Delta h_2^{(2)}$ , распространяясь вдоль  $dc_1$ , придут в точку  $c_1$ , находящуюся на ударной волне. В этой точке имеется только один произвол — выбор угла  $\sigma$ . Условие (3.3) должно быть

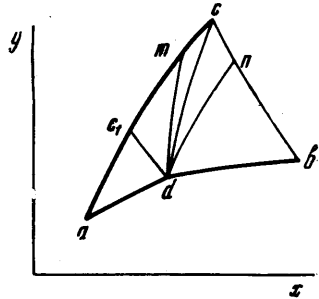


Для простоты рассмотрим вначале структуру потока (фиг. 4), определяемую одним изломом контура в точке  $d$ . В этом случае изопериметрическое условие на длину с учетом (1.4) выражается следующим образом:

$$x_b - x_a = \int_{y_a}^{y_d} \frac{u}{v} dy + \int_{y_d}^{y_b} \frac{u}{v} dy$$

Функционал Лагранжа имеет вид

$$I = \int_{y_a}^{y_d} \left( py^v + \lambda \frac{u}{v} \right) dy + \int_{y_d}^{y_b} \left( py^v + \lambda \frac{u}{v} \right) dy + \sum_{i=1}^3 \iint_{S_i} [h_1^{(i)}(\psi, y) L_1 + h_2^{(i)}(\psi, y) L_2] dy d\psi \tag{4.1}$$



Фиг. 4

Здесь  $\lambda$  — постоянный множитель Лагранжа;  $S_1$  — область течения  $bcd$ ;  $S_2$  — область  $cdc_1$ ;  $S_3$  — область  $adc_1$ . Область  $dmcnd$  соответствует течению разрежения, вызванному изломом в точке  $d$ . Положение точки  $d$  свободно. Необходимые условия экстремума в областях  $amd$  и  $bnd$  выписываются так же, как в п. 2. Вычислим вариацию части функционала  $I$ , относящуюся к области  $dmcnd$ , которую обозначим через  $\tau$ . Частные производные по  $y$ , входящие в дифференциальные уравнения (1.1), обращаются в бесконечность в точке  $d$ . Поэтому вариация двойного интеграла при варьировании точки  $d$  может не быть равной нулю.

Вычисления проведем в соответствии с работой А. Н. Крайко [6]. Для этого двойной интеграл по области  $\tau$  запишем в новых независимых переменных  $\omega, \psi^*$ , связанных с  $y, \psi$  формулами

$$\psi^* = \psi, \quad \omega = \arctg(\psi/y - y_d) \tag{4.2}$$

В этих переменных производные, входящие в подынтегральное выражение, становятся конечными, и процесс вычисления вариации аналогичен процессу, описанному выше. Выражения при вариациях  $\delta u, \delta v$  и  $\delta \sigma$  в двойном интеграле после обратного перехода к переменным  $\psi, y$  совпадают с соответствующими выражениями, полученными в п. 2. Кроме того, варьируется еще функция  $y$ , которая входит в уравнения (1.1) и не является независимой переменной. Из формул перехода (4.2) следует, что в любой точке области  $\tau$  выполняется равенство  $\delta y = \delta y_d$ , где  $\delta y_d$  — смещение точки  $y_d$  — величина, которую можно вынести за знак интеграла.

Пусть  $f$  — одна из функций, описывающих течение в областях  $dc_1md$  и  $dnbd$ , а  $f^*$  — та же функция в области  $\tau$ . Вариации этой функции на границе области  $\tau$  выражаются следующим образом:

$$\delta f = \Delta f - \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad \delta f^* = \Delta f - \frac{\partial f^*}{\partial \omega} \Delta \omega$$

Здесь  $\Delta y$  — изменение ординаты точки границы при фиксированном  $\psi$ , а  $\Delta \omega$  — соответствующее изменение  $\omega$ . Величина  $\Delta f$  представляет собой разность между значениями  $f$  на проварьированной и первоначальной границах при фиксированном  $\psi$ . Из формул (4.2) следует, что  $\Delta \omega = \psi^{-1}(\delta y_d - \Delta y) \sin^2 \omega$ . Объединим члены, входящие в контурный интеграл вдоль  $dmcnd$  и двойной интеграл по области  $\tau$ , содержащие  $\delta y_d$ . Как показано в работе [6], сумма всех этих членов с использованием уравнений (1.1) и (2.4) сводится к

$$\delta y_d \int_{\omega_+}^{\omega_-} \left[ h_1 y^v \frac{dp}{d\omega} + h_2 \frac{d}{d\omega} \left( \frac{u}{v} \right) \right] d\omega$$

где  $\omega_+$  — угол наклона характеристики  $dm$  в точке  $d$ , а  $\omega_-$  — угол наклона характеристики  $dn$  в точке  $d$ . В оставшихся членах контурного интеграла перейдем к независимым переменным  $\psi, y$ . На участках  $md$  и  $nd$  объединим члены, стоящие при  $\Delta f$  справа и слева от границы. Эти выражения исчезнут, если  $h_1$  и  $h_2$  непрерывны. Если же они раз-

рывны, то получим условие для разрывов (3.2). В выражениях, относящихся к  $\Delta y$ , вдоль  $md$  и  $nd$  все частные производные, используя (1.1), можно заменить полными. Снова объединяя члены, стоящие при полных производных слева и справа от границы, получим выражения, тождественно обращающиеся в нуль. Если  $h_1, h_2$  непрерывны, это очевидно; если они разрывны, то, используя (3.2), можно показать, что эти выражения суть условия совместности вдоль характеристик системы (1.1). На участке  $mc$  ударной волны  $\Delta y = 0$  и  $\Delta f$  выражается через  $\delta\sigma$ . На участке характеристики  $cn$  от вариации  $\delta f^*$  остается величина  $\Delta f - (\partial f / \partial y) \Delta y$ , которая равна  $\delta f$ . Рассматривая выражение при  $\delta f$ , получаем те же условия экстремума, что и на участке  $nb$ .

Окончательно условия экстремума будут следующими. В областях  $S_i$  для определения  $h_1^{(i)}$  и  $h_2^{(i)}$  служат уравнения (2.4). На участках контура  $ad$  и  $db$  имеют место формулы (2.7), которые для рассматриваемой задачи дают

$$h_1^{(1)} = h_1^{(3)} = 1, \quad h_2^{(1)} = h_2^{(3)} = \lambda \quad (4.3)$$

В точке  $d$  должно выполняться условие

$$\left(y^v p + \lambda \frac{u}{v}\right)_+ - \left(y^v p + \lambda \frac{u}{v}\right)_- + \int_{\omega_+}^{\omega_-} \left[ h_1 y^v \frac{dp}{d\omega} + h_2 \frac{d}{d\omega} \left( \frac{u}{v} \right) \right] d\omega = 0 \quad (4.4)$$

Здесь знак плюс относится к значениям в точке  $d$  при подходе к ней слева, а знак минус — к значениям при подходе справа. При рассмотрении задачи в целом (фиг. 3) аналогичные равенства имеют место для точек  $d_1, d_2, \dots$

На характеристике  $bc$  необходимо выполнение условия (2.9), а на характеристиках  $dc$  и  $dc_1$  — условий (3.2). При всех  $\psi$  в  $abc$  должно удовлетворяться условие (3.3).

Легко заметить, что равенства  $h_1 = 1, h_2 = \lambda$  дают решение системы (2.4) для областей  $ac_1d$  и  $dnb$ . Подставим эти выражения в условие (2.9).

Получим, что вдоль характеристики  $nb$  выполняется равенство

$$\lambda = y^v \rho v^2 \operatorname{tg} \alpha \quad (4.5)$$

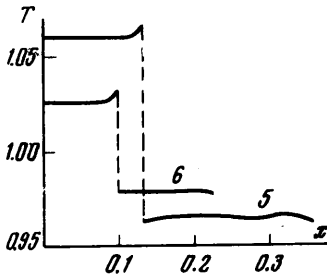
если контур  $bd$  имеет минимальное волновое сопротивление при фиксированной характеристике  $dn$ . Это соотношение получено в [13] при рассмотрении вариационной задачи о построении образующей с фиксированными точками  $d$  и  $b$  и фиксированной характеристикой  $dn$ . Отсюда следует, что удобнее решать обратную задачу, т. е. найти ударную волну  $ac$  и характеристику  $bc$ , удовлетворяющие условиям экстремума, а по ним, решая численно уравнения (1.1), построить искомый контур  $ab$ .

Для численного решения задачи предлагается следующий итерационный процесс. В плоскости  $xy$  на оси  $y$  задается точка  $m$ . Отрезок  $y_m - y_a$  разбивается на  $N$  равных частей с ординатами  $y_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ). В каждой точке  $y_k$  задается  $\sigma_k$ . В плоскости  $xy$  строится ударная волна  $am$ , которая является начальным приближением к исходной (фиг. 4). По данным на ней рассчитывается течение в области  $amd$  и выделяется контур тела  $ad$ . Далее выбирается некоторый угол излома  $\Delta\Phi_1$ , по которому рассчитывается течение разрежения в области  $dmcd$  и строится участок ударной волны  $mc$ . По какой-либо выбранной величине угла излома  $\Delta\Phi_2$  рассчитывается область  $dcnd$ . В точке  $n$  вычисляется  $\lambda$  по формуле (4.5). По формуле (4.5) и соотношениям на характеристике второго семейства вычисляется характеристика  $nb$  до  $\psi = 0$ .

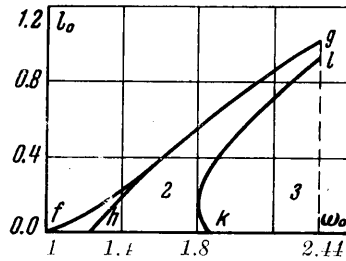
Вдоль характеристик  $nd$  и  $nb$  известны  $h_1^{(1)}$  и  $h_2^{(1)}$ , так как они определены во всей области  $dnb$ . Вычисляется член, входящий в уравнение (3.3) и относящийся к характеристике  $bn$ . Методом характеристик с использованием (2.9) определяются  $h_1^{(1)}$  и  $h_2^{(1)}$  в области  $dcnd$ . По формулам (3.4) вычисляются  $h_1^{(2)}$  и  $h_2^{(2)}$  вдоль характеристики  $cd$ . Здесь  $\mu_1$  выбирается из условия, что (2.9) и (3.3) выполняются в точке  $c$  одновременно. В области  $dmcd$  функции  $h_1^{(2)}$  и  $h_2^{(2)}$  вычисляются методом характеристик по данным на характеристике  $cd$  с привлечением условия (3.3) вдоль участка ударной волны  $cm$ . По формулам (3.4) и известным значениям  $h_1^{(3)}$  и  $h_2^{(3)}$  определяются  $h_1^{(2)}$  и  $h_2^{(2)}$  вдоль ха-



рактеристики  $c_1d$ . Константа  $\mu_2$  находится из условия непрерывности  $h_1^{(3)}$  и  $h_1^{(1)}$  в точке  $d$ . Величины  $\Delta\Phi_1$  и  $\Delta\Phi_2$  выбираются такими, чтобы в точке  $d$  выполнялось условие (4.4) и  $h_2^{(2)} + \Delta h_2^{(2)} = \lambda$ . После выполнения условий (4.3) и (4.4) в точке  $d$  решением задачи Гурса между характеристиками  $c_1d$  и  $dm$  определяются  $h_1^{(2)}$  и  $h_2^{(2)}$  в области  $dc_1md$ .



Фиг. 5



Фиг. 6

Может оказаться, что необходимые величины разрывов множителей  $h_1$  и  $h_2$  в точке  $c_1$  с выбранной точностью расчетов равны нулю. В этом случае изломами в точках  $d_1, d_2, \dots$  можно пренебречь. Тогда по известному течению и известным множителям Лагранжа вычисляется функция  $E$  в каждой из точек  $y_k$  на ударной волне. Углы наклона новой ударной волны  $am$  находятся по формуле

$$\sigma_{j+1}(y_k) = \sigma_j(y_k) + \eta E_j(y_k)$$

где  $j$  — номер итерации,  $\eta$  — некоторое число, удовлетворяющее условию  $|\eta| < 1$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . В точке  $m$  величина  $\sigma(y_N)$  остается фиксированной, так как  $E = 0$  в силу выбора  $h_1^{(2)}$  и  $h_2^{(2)}$  вдоль  $cm$  при расчете множителей Лагранжа внутри области  $dmcd$ . Вычисления проводятся до тех пор пока величина  $E$  не будет равна нулю во всех точках  $y_k$ . Тогда по полученным ударной волне  $am$ , двум углам излома  $\Delta\Phi_1$  и  $\Delta\Phi_2$  и характеристике второго семейства  $nb$ , подчиняющейся условию (4.5) строится контур  $ab$ . Этот контур дает решение задачи, если полученная точка  $b$  совпадает с заданной. Два произвольных параметра  $y_m$  и  $\sigma_N$  позволяют решить прямую задачу. Итерационный процесс в случае изломов в точках  $d_1, d_2, \dots$  аналогичен описанному.

5. Проведены расчеты в плоском случае для различных значений скорости набегающего равномерного потока  $w_0$ , отнесенной к критической скорости течения. Газ считался совершенным с показателем адиабаты  $\kappa = 1.4$ . В таблице приведены наибо-

No	1	2	3	4	5	6	7
$w_0$	1.4000	1.6000	2.1000	2.3000	2.3000	2.3000	2.4000
$l_0$	0.2128	0.3358	0.4370	0.2069	0.4801	0.7237	0.8489
$c_{xm}$	1.0926	1.1815	0.6090	0.1717	0.5380	0.9519	0.9178
$c_{xk}$	1.0927	1.1818	0.6096	0.1721	0.5413	0.9533	0.9215
$x_d$	0.7133	1.0378	1.1226	1.9555	1.3248	1.0112	1.0422
$y_d$	0.1533	0.4021	0.5056	0.4289	0.6744	0.7507	0.8133
$x_b$	1.8354	1.6785	3.4001	7.5288	3.5811	2.2167	2.2688
$y_b$	0.3906	0.6475	1.4858	1.5578	1.7195	1.6043	1.6979
$\theta$	-0.0031	-0.0047	-0.0209	-0.0172	-0.0499	-0.0299	-0.0526
$\Delta h_{1c}^{(1)}$	0.0280	0.0367	0.0685	0.1190	0.1536	0.0788	0.1303
$\Delta h_{1d}^{(1)}$	0.0280	0.0361	0.0686	0.1192	0.1552	0.0792	0.1318
$\Delta h_{1d}^{(2)}$	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\Delta h_{1c_1}^{(2)}$	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\Delta h_{2c}^{(1)}$	-0.0050	-0.0370	-0.0518	-0.0150	-0.1759	-0.2089	-0.4056
$\Delta h_{2d}^{(1)}$	-0.0050	-0.0376	-0.0516	-0.0150	-0.1741	-0.2079	-0.4010
$\Delta h_{2d}^{(2)}$	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\Delta h_{2c_1}^{(2)}$	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

лее характерные результаты расчетов. Приняты следующие обозначения:  $l_0$  — величина, обратная удлинению;  $c_{xm}$  и  $c_{xk}$  — коэффициенты волнового сопротивления опти-

мального контура и клина с эквивалентным удлинением;  $\theta$  — суммарный угол излома в точке  $d$ , равный  $\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$ . Приведены также значения разрывов множителей Лагранжа в точках  $c$ ,  $d$  и  $c_1$ . Здесь  $\Delta h_{ic}^{(1)}$  и  $\Delta h_{id}^{(1)}$  — величины, равные  $h_i^{(2)} - h_i^{(1)}$  и определяемые соответственно в точках  $c$  и  $d$ . Значения  $\Delta h_{ic}^{(2)}$  и  $\Delta h_{ic_1}^{(2)}$  определяются ( $i = 1, 2$ ) как  $h_i^{(3)} - h_i^{(2)}$ , вычисляемые в точках  $d$  и  $c_1$ . Точка  $a$  во всех примерах имеет координаты  $(0, 0)$ . Из приведенной таблицы видно, что величины отраженных разрывов в точке  $d$  равны нулю с точностью проводимых вычислений. С этой точностью во всех примерах полученные оптимальные профили тел имеют только один излом в точке  $d$ . Для примеров  $b$  и  $b'$  из таблицы на фиг. 5 дана зависимость  $T = \tan \theta / \tan \theta_k$  на оптимальном профиле от  $x$ , где  $\theta_k$  — угол эквивалентного клина. Все примеры находятся в областях  $fg\bar{h}$  и  $\bar{z}$ , изображенных на фиг. 6. Кривая  $fg$  для каждого значения  $w_0$  определяет такое удлинение клина, при обтекании которого возникает звуковое течение. Кривые  $hg$  и  $kl$  соответствуют таким значениям удлинений и набегающего потока [9, 10], для которых оптимальной формой будет клин ( $\varepsilon = 0$ ). В областях  $fg\bar{h}$  и  $\bar{z}$  величина  $\varepsilon$  положительна, а в области  $\bar{z}$  — отрицательна.

Автор благодарен В. М. Борисову, А. Н. Крайко и Ю. Д. Шмыглевскому за внимание к работе.

Поступило 21 II 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G u d e r l e y K. G., A r m i t a g e I. V. A General Method for the Determination of Best Supersonic Rocket Nozzles. Русск. пер., Механика, Сб. пер. и обоз. ин. период. лит. Изд-во иностр. лит-ры, 1963, № 6.
2. С и р а з е т д и н о в Т. К. Оптимальные задачи газодинамики. Изв. вузов, Авиационная техника, 1963, № 2.
3. К р а й к о А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
4. Б о р и с о в В. М. Вариационная задача о трехмерных сверхзвуковых течениях. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
5. Б о р и с о в В. М. О системе тел с минимальным волновым сопротивлением. Инж. ж. 1965, т. 5, вып. 6.
6. К р а й к о А. Н. К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
7. Д у б о в и ц к и й А. Я., М и л ю т и н А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, вып. 3.
8. Г ю н т е р Н. М. Курс вариационного исчисления. Гостехтеоретиздат, 1941.
9. Ч е р н ы й Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
10. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Об одном классе тел вращения с минимальным волновым сопротивлением. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
11. Ш и п и л и н А. В. О телах с минимальным волновым сопротивлением в неравномерном набегающем потоке газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
12. C o l e I. D., A r o e s t y I. Optimum Hypersonic Lifting Surfaces Close to Flat Plates. AIAA Journal 1965, v. 3, No 8.
13. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.