

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

А. П. КОРОТКИН

(Ленинград)

Устойчивость плоскопараллельных течений несжимаемой жидкости с переменной кинематической вязкостью при наличии твердых стенок обсуждается в исследованиях [1-5]. В работе [1] рассматривается устойчивость течения Куэтта. Метод решения, совпадающий с методом, использованным в работе [2], отличается от метода Толлмина — Шлихтинга, так как используемое разложение решений по степеням αR предполагает малость этой величины. Исследование [3] содержит общую постановку задачи об устойчивости неоднородной жидкости. В работе Ди Прима и Дана [4] методом Галеркина исследована устойчивость пограничного слоя относительно вихреобразных возмущений в случае переменной кинематической вязкости. Так как развитие такого рода возмущений слабо зависит от формы профиля скоростей в пограничном слое, то заметное изменение вязкости незначительно повлияло на критическое число Рейнольдса. Этой же проблеме посвящена статья [5]. В литературе автору не удалось обнаружить ссылок на исследования устойчивости ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости с переменной кинематической вязкостью относительно возмущений типа Толлмина — Шлихтинга, за исключением упоминания в [4] неопубликованной работы Макинтоша, который выявил существенную зависимость критического числа Рейнольдса от градиента вязкости.

В § 1 изучается влияние переменности кинематической вязкости на устойчивость пограничного слоя относительно волн Толлмина — Шлихтинга при условии постоянства плотности жидкости.

Возможны два подхода к изучению развития возмущений в неоднородной жидкости. С одной стороны, можно предположить, что перемещение частиц жидкости не вызывает изменений в распределении $\rho(y)$ и $\nu_*(y)$, т. е. пульсации скоростей не сопровождаются пульсациями ρ и ν_* . Это будет иметь место, если частица, характеризуемая величинами ρ_1, ν_1 , попадая в слой с определенными значениями ρ_2, ν_2 , мгновенно изменяет свои свойства так, что ее плотность становится равной ρ_2 , а кинематическая вязкость — ν_2 . С другой стороны, можно считать, что частица жидкости, перемещаясь из слоя 1 в слой 2, полностью сохраняет свойства, которыми она обладала в слое 1. При этом пульсации скоростей, естественно, вызовут пульсации величин ρ и ν_* .

В действительности, явление развивается по какой-то промежуточной схеме, так как при своем перемещении в неоднородной жидкости частица меняет свои свойства. От скорости этих изменений зависит степень приближенности процесса к первой или второй схемам. Исследования, изложенные ниже, пмечут в основе первую схему.

§ 1 Уравнение Орра — Зоммерфельда, записанное в безразмерном виде относительно амплитуды функции тока возмущающего движения, имеет в рассматриваемом случае следующий вид:

$$(u - c)(f'' - \alpha^2 f) - u''f = -\frac{i}{\alpha R} \left[\nu(f^{1V} - 2\alpha^2 f'' + \alpha^4 f) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial \nu}{\partial y} (f''' - \alpha^2 f') + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} (f''' + \alpha^2 f) \right] \quad \left(\nu = \frac{\nu_*(y)}{\nu_0}, R = \frac{u\delta}{\nu_0} \right) \quad (1.1)$$

Здесь $u(y)$ — распределение скорости в пограничном слое, c — скорость распространения волн возмущающего движения, α — волновое число, характеризующее длину волны возмущения, ν_0 — кинематическая вязкость основного потока, U — скорость на границе пограничного слоя, δ — толщина пограничного слоя.

Граничные условия для уравнения (1.1) возьмем в обычной [6] форме

$$f(0) = f'(0) = \alpha f(1) + f'(1) = 0, \quad f(y)|_{y \rightarrow \infty} < M < \infty \quad (1.2)$$

Следуя методу Гейзенберга — Толлмина — Шлихтинга — Линя, находим четыре линейно-независимые решения уравнения (1.1)

$$\begin{aligned}
 f_1(y) &= (u - c) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} g_n(y), & g_0(y) &= 1 \\
 f_2(y) &= (u - c) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} g_n(y), & g_0(y) &= \int_0^y (u - c)^{-2} dy \\
 g_{n+1}(y) &= \int_0^y (u - c)^{-2} dy \int_0^y (u - c)^2 g_n(y) dy \\
 f_3(y) &= \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} V \bar{\eta} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\beta\eta)^{3/2} \right] d\eta \\
 f_4(y) &= \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} V \bar{\eta} H_{1/3}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (i\beta\eta)^{3/2} \right] d\eta
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\eta = (y - y_k) (\alpha R)^{1/3}, \quad \beta = (u_k')^{1/3} \left(1 + \frac{v_w - v_0}{v_0} e^{-By_k} \right)^{-1/3}, \quad u(y_k) = c$$

Здесь $H_{1/3}^{(1)}, H_{1/3}^{(2)}$ — функции Ханкеля. Для конкретизации закона изменения кинематической вязкости предполагается, что

$$v = 1 + \frac{v_w - v_0}{v_0} e^{-By} \quad (v_w = v_*(0))$$

Используя решения (1.3) и условия (1.2), приходим к следующему комплексному характеристическому уравнению задачи:

$$F(w) = 1 + z, \quad F(w) = F_r(w) + iF_i(w)$$

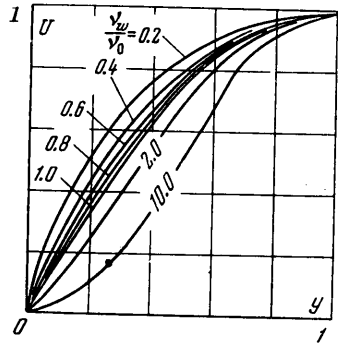
эквивалентному двум вещественным

$$F_r(w) = 1 + z_r, \quad F_i(w) = z_i \tag{1.4}$$

$$z_r = -\frac{u_0'}{u_k'} + u_0' \frac{cu_k''}{(u_k')^3} \ln c + \frac{u_0'c}{(1-c)^2} z$$

$$z_i = -\frac{\pi u_0' cu_k''}{u_k'^3}, \quad u_0' = u'(0), \quad u_k' = u'(y_k)$$

$$w = y_k \left[\alpha u_k' R \left(1 + \frac{v_w - v_0}{v_0} e^{-By_k} \right)^{-1} \right]^{1/3}$$



Фиг. 1

Здесь $F(w)$ — функция Линя [6].

Используя систему (1.4), можно последовательно определить c , α и соответствующее значение числа Рейнольдса при заданном профиле скоростей и распределении вязкости. Расчеты устойчивости были проведены для семейства профилей, полученных Э.В. Борисовой интегрированием обобщенного на случай переменной вязкости уравнения Блазиуса

$$\zeta''' + \frac{v_0}{v_*} \left(\frac{1}{2} \zeta + \frac{v_*'}{v_0} \right) \zeta'' = 0 \tag{1.5}$$

при следующем законе изменения вязкости поперек пограничного слоя:

$$v_* = v_0 + (v_w - v_0) e^{-B_1 \zeta}, \quad \xi = y_* \left(\frac{U}{x_* v_0} \right)^{1/2}$$

Результаты интегрирования (1.5) с граничными условиями

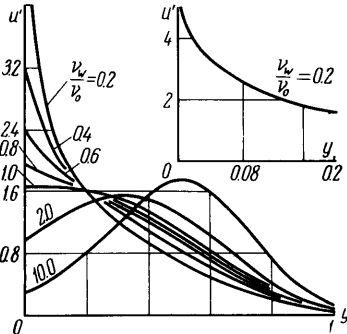
$$\zeta(0) = \zeta'(0) = 0, \quad \zeta(\xi) \rightarrow 1 \text{ при } \xi \rightarrow \infty$$

в случае $B_1 = 1$ представлены на фиг. 1—3, на которых

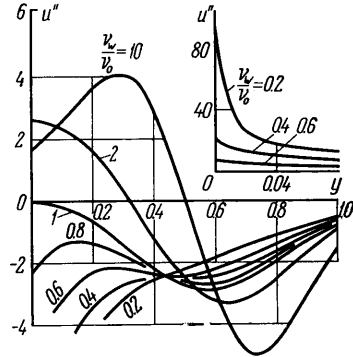
$$y = y_*/\delta, \quad u = u_*/U, \quad u' = u_*'/U, \quad -u'' = u_*''\delta^2/U$$

Величины y_* , x_* , u_* , u_*' , u_*'' размерные.

Изучая влияние градиента вязкости на форму профиля скоростей и рассматривая порядок определения критического числа Рейнольдса для заданного профиля скорости пограничного слоя в жидкости с переменной вязкостью, можно сделать вывод о наличии двух аспектов в вопросе о том, как воздействует градиент кинематической вязкости вблизи стенки на устойчивость ламинарной формы течения.



Фиг. 2



Фиг. 3

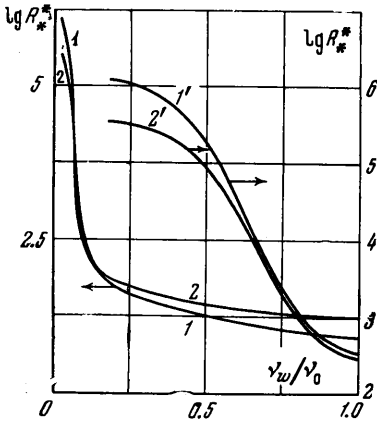
Предположим, например, что $v_w/v_0 < 1$. Тогда с уменьшением v_w/v_0 полнота эпюры скоростей в пограничном слое существенно увеличивается, что ведет к повышению устойчивости при прочих равных условиях. Но уменьшение v_w/v_0 , с другой стороны, ослабляет стабилизирующее воздействие вязкости на возмущения, что видно из приведенных выше формул, и критическое число Рейнольдса при закреплённом профиле скоростей уменьшается по сравнению с однородной жидкостью. Для выяснения суммарного влияния обоих факторов были проведены соответствующие расчеты. На фиг. 4 показаны кривые нейтральной устойчивости, построенные на основе профилей с характеристиками, представленными на фиг. 1—3. Расчеты устойчивости велись в предположении, что градиент вязкости не влияет на развитие возмущений. Зависимость критических чисел Рейнольдса от параметра v_w/v_0 показана на фиг. 5. Для кривых 1 и 2 значения абсцисс следует увеличить в 10 раз, т. е. вместо указанных на шкале 0,5 и 1,0 принять 5 и 10; для кривых 1' и 2' значения 0,5 и 1,0 сохраняются (кривая 1). Затем для этих же профилей был проделан расчет с учетом влияния градиента вязкости на развитие возмущений. Соответствующие кривые также нанесены на фиг. 5 (кривые 2). Рассмотрение указанных зависимостей $R_*^* = R_*^*(v_w/v_0)$ (R_*^* — критическое число Рейнольдса, построенное по толщине вытеснения) позволяет сделать вывод, что уменьшение кинематической вязкости несжимаемой жидкости в пристеночной области, по сравнению с кинематической вязкостью основного потока, приводит к заметному увеличению полноты профиля и росту критического числа Рейнольдса. Дестабилизирующее влияние уменьшения рассеивания несколько ослабляет эффект роста R_*^* . Суждение о количественной стороне проблемы можно получить при изучении графика на фиг. 5.



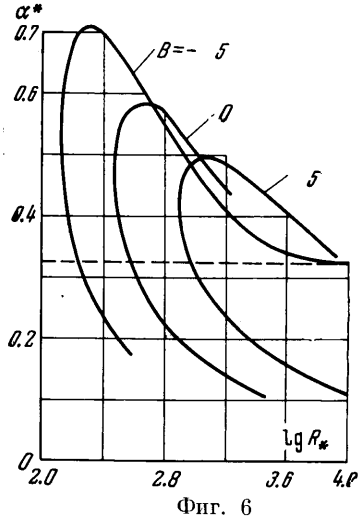
Фиг. 4

Исследованию устойчивости ламинарного течения идеальной жидкости с переменной плотностью посвящены работы [7—15]. Так как вязкость жидкости во внимание не принималась, то механизм возникновения неустойчивости существенным образом отличался от такового в однородной вязкой жидкости, в частности, переход к турбулентному состоянию никак не связывался с изменением числа Рейнольдса. Для пограничных слоев, где вязкость играет определяющую роль в формировании течения, такой подход, по-видимому, неприменим. Единственным известным автору исследованием, в котором изучается вопрос об устойчивости ламинарного пограничного слоя в несжимаемой вязкой и неоднородной по плотности жидкости, является работа Шлихтинга [16]. Однако использованный им метод решения может вызывать возражения [7], ибо исследуемое обобщенное уравнение Орра — Зоммерфельда содержит особенность, требующую специального рассмотрения.

§ 2. Задача об устойчивости ламинарного пограничного слоя в жидкости с переменной плотностью решается в допущении о том, что пульсации скорости не вызывают пульсаций плотности. Уравнение Орра — Зом-



Фиг. 5



Фиг. 6

мерфельда при этом условии запишется так:

$$(u - c)(f'' - \alpha^2 f) - u''f + \frac{\rho \delta}{\rho} [(u - c)f' - u'f] =$$

$$= -\frac{i}{\alpha R} \left[f^{IV} - 2\alpha^2 f'' + \alpha^4 f + 2\frac{\rho \delta}{\rho} (f''' - \alpha^2 f') + \frac{\rho \delta^2}{\rho} (f'' + \alpha^2 f) \right] \quad (2.1)$$

Обычными приемами можно найти следующие линейно-независимые частные решения уравнения (2.1):

$$f_1(y) = (u - c) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} g_n(y), \quad g_0 = 1$$

$$f_2(y) = (u - c) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} g_n(y), \quad g_0 = \int_0^y (u - c)^{-2} e^{-Hy} dy$$

$$g_{n+1}(y) = \int_0^y (u - c)^{-2} e^{-Hy} \left[\int_0^y (u - c)^2 e^{Hy} g_n(\xi) d\xi \right] dy$$

$$f_3(y) = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} \sqrt{\eta} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\beta\eta)^{1/2} \right] d\eta, \quad H = \frac{\rho \delta}{\rho} = \text{const} = -B$$

$$f_4(y) = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} \sqrt{\eta} H_{1/3}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (i\beta\eta)^{3/2} \right] d\eta, \quad \rho(y_*) = \rho_w \exp \frac{-By_*}{\delta}$$

Здесь

$$\eta = (y - y_k) (\alpha R)^{1/3}, \quad \beta = (u_k')^{1/2}$$

Характеристическое уравнение сводится к системе (1.4), в которой

$$z_r = -e^{By_k} \frac{u_0'}{u_k'} + cu_0' e^{By_k} \left(\frac{u_k''}{u_k'^3} - \frac{B}{u_k'^2} \right) \ln c + \frac{cu_0'}{(1-c)^2 \alpha} e^B$$

$$z_i = -\pi cu_0' e^{By_k} \left(\frac{u_k''}{u_k'^3} - \frac{B}{u_k'^2} \right), \quad w = y_k (\alpha u_k' R)^{1/3}$$

Используя равенства (1.4), можно указать следующую схему расчета кривой нейтральной устойчивости.

Задавшись определенным значением w_0 , по графикам $F_r(w)$, $F_i(w)$ находим $F_r(w_0)$, $F_i(w_0)$. Решая графически второе уравнение системы (1.4), определяем для заданного распределения скоростей и плотности в пограничном слое параметр c , а значит, и соответствующие ему y_k , u_k' , u_k'' . Используя первое уравнение (1.4), находим α , после чего вычисляем число Рейнольдса

$$R = \frac{1}{\alpha u_k'} \left(\frac{w_0}{y_k} \right)^3$$

Величину критического числа Рейнольдса можно получить, если все выкладки проделать для значения $F_i(w) = F_{i \max}$ (3.21) = 0,58. На фиг. 6 представлены кривые нейтральной устойчивости для профиля Блазуса при различных значениях параметра B . Обращает на себя внимание факт увеличения устойчивости течения в случае отрицательного градиента плотности ($B > 0$) в пристеночной области. Это обстоятельство объясняется тем, что при отрицательном градиенте плотности величина Рейнольдсовых напряжений будет меньше за счет переменности $\rho(y)$, а при положительном градиенте ($B < 0$) — больше, по сравнению с однородной жидкостью. Уменьшение величины напряжений Рейнольдса, которые передают энергию основного течения возмущениям, естественно приводит к увеличению устойчивости.

В случае возрастания плотности по координате y вид нейтральной кривой напоминает соответствующую кривую для профиля скорости с точкой перегиба, т. е. существует «невязкая неустойчивость», и область неустойчивости не исчезает при $v_0 \rightarrow 0$. Для верхней ветви нейтральной кривой при $R \rightarrow \infty$ параметр c определяется в этом случае условием

$$B - u_k''/u_k' = 0$$

Соответствующее волновое число α находится обычным путем при $F_r = 1$, $F_i = 0$.

Автор благодарит Г. И. Петрова и участников руководимого им семинара за обсуждение настоящей работы.

Поступило 9 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Семенов Е. В. Об одной задаче гидродинамической теории устойчивости в случае переменной вязкости. Изв. АН СССР. ОТН Механика и машиностроение 1964, № 4.
2. Семенов Е. В. О развитии волн на поверхности пленок с переменной вязкостью, обтекаемых потоком газа. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш. 1964, № 5.
3. D r a z i n P. G. On stability of parallel flow of an incompressible fluid of variable density and viscosity. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 1962. v. 58, No 4.
4. D i P r i m a R. C., D u n n D. W. The effect of heating and cooling on the stability of the boundary layer flow of a liquid over a curved surface. Journal of the Aeronautical Sciences 1956. v. 23. № 10. (Русск. перев. «Механика». Сбор. перев. и обзоров ОТН, 1957, № 4).
5. M o r d u c h o w M. Stability of laminar boundary layer near a stagnation point over an impermeable wall and a wall cooled by normal fluid injection. Advis Comm. Aeronaut. Techn. Notes № 4037, 1957.
6. Л и н ь Ц з я - ц з я о. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., 1958.
7. Д и к и й Л. А. Об устойчивости плоскопараллельных потоков неоднородной жидкости, ПММ, 1960, т. 24, в. 2.
8. T a y l o r G. I. Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1931, v. 132, p. 499.
9. G o l d s t e i n S. On the stability of superposed streams of fluid of different densities. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1931. v. 132, p. 524.
10. D r a z i n P. G. The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid. J. Fluid Mech. 1958, v. 4, No 2.
11. M i l e s J. W. On the stability of heterogeneous shear flows. J. Fluid Mech. 1961. v. 10, No 4.
12. H o w a r d L. N. Note on a paper of J. W. Miles. J. Fluid Mech. 1961, v. 10, No 4.
13. M i l e s J. W. On the stability of heterogeneous shear flows. Part 2. J. Fluid Mech. 1963, v. 16, No 2.
14. H o w a r d L. N. Neutral curves and stability boundaries in stratified flow. J. Fluid Mech. 1963, v. 16, No 3.
15. M i l e s J. W., H o w a r d L. N. Note on a heterogeneous shear flow. J. Fluid Mech. 1964, v. 20, No 2.
16. S c h l i c h t i n g H. Turbulenz bei Wärmeschichtung. ZAMM. 1935, Bd. 15, H. 6.