

## МЕТОД ЛОКАЛЬНОГО ПОДОБИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

Б. А. ЗЕМЛЯНСКИЙ

*(Москва)*

Гиперзвуковой пограничный слой обладает рядом особенностей, одной из которых является его относительно слабая чувствительность к отрицательному градиенту давления. Это связано с наличием в пограничном слое пристеночной области сравнительно холодного газа с большой плотностью. Поэтому, следуя работе [1], для приближенного описания таких течений может быть применен метод локального подобия с использованием известного решения Блазиуса для пластины.

В работе [2] этот подход применен к трехмерному пограничному слою на сильно охлажденных притупленных телах, когда влиянием вторичных течений можно пренебречь.

Точность таких решений ухудшается с ростом градиента давления, температуры стенки и скорости на внешней границе (когда число Прандтля  $\sigma \neq 1$ ).

В работе [3] для двумерного случая и  $\sigma = 1$  предложена модификация этого решения, основанная на интегральном учете влияния градиента давления. Ниже такой метод учета градиента давления обобщен на  $\sigma \neq 1$  и на некоторые трехмерные задачи.

Пусть  $V$  — модуль скорости,  $u, w, v$  — составляющие скорости по осям  $x, z, y$  соответственно;  $i$  — энталпия,  $H$  — полная энталпия,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\mu$  — вязкость и  $\sigma$  — число Прандтля газа. Параметры газа у стенки, на внешней границе пограничного слоя и в невозмущенном потоке обозначим индексами  $w, e, \infty$  соответственно. Кроме того, положим

$$t_s = \frac{i_e + 1/2 u_e^2}{H_e}, \quad t_w = \frac{H_w}{H_e}, \quad N = \frac{V_e^2}{2H_e}, \quad E = \frac{V_\infty^2}{2H_e} \quad (H = i + 1/2(u^2 + w^2))$$

Система координат  $x, z, y$  такова, что координатные линии  $x, z$  образуют на поверхности тела криволинейную ортогональную сетку,  $y$  — расстояние от тела по нормали. Для тонкого пограничного слоя эта система координат может считаться триортогональной, хотя строго это имеет место лишь тогда, когда координатные линии  $x, z$  на теле совпадают с главными линиями кривизны<sup>1</sup>. Тогда линейный элемент можно представить в виде

$$dl^2 = l_1^2 dx^2 + l_2^2 dz^2$$

где  $l_1(x, z, y), l_2(x, z, y)$  — коэффициенты Ламэ, причем, с точностью порядка  $\delta/R$  можно считать  $l_1 = l_1(x, z, 0)$ ,  $l_2 = l_2(x, z, 0)$ .

Относительно свойств газа примем обычные упрощающие предположения: 1)  $\mu\rho/p = \text{const}$ , 2)  $\sigma = \text{const}$ , 3) справедливо уравнение состояния совершенного газа  $p = (\gamma - 1)\rho i/\gamma$ , где  $\gamma = \text{const}$  — показатель адиабаты<sup>2</sup>.

Поверхность тела считаем изотермической.

<sup>1</sup> Сделанная при этом ошибка имеет порядок  $\delta/R$  ( $\delta$  — толщина пограничного слоя,  $R$  — меньший из главных радиусов кривизны) и укладывается в точность теории пограничного слоя.

<sup>2</sup> Непосредственно последнее предположение влияет на профиль скорости лишь через градиент давления, поэтому при расчете профиля полной энталпии оно не скажется существенно.

1. Система уравнений, описывающая тонкий трехмерный ламинарный граничный слой на гладких поверхностях, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u}{l_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{l_2} \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial y} + K_1 uw - K_2 w^2 &= -\frac{1}{\rho l_1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{u}{l_1} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w}{l_2} \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial y} - K_1 u^2 + K_2 uw &= -\frac{1}{\rho l_2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{l_1} \frac{\partial}{\partial x} \rho u l_2 + \frac{1}{l_1} \frac{\partial}{\partial z} \rho w l_1 + l_2 \frac{\partial}{\partial y} \rho v &= 0 \quad (1.1) \\ \frac{u}{l_1} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w}{l_2} \frac{\partial H}{\partial z} + v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2 + w^2}{2} \right) \\ \left( K_1 = \frac{1}{l_1 l_2} \frac{\partial l_1}{\partial z}, \quad K_2 = \frac{1}{l_1 l_2} \frac{\partial l_2}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Здесь  $K_1, K_2$  — геодезические кривизны координатных линий  $x, z$  на теле соответственно. Примем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u = v = w = 0, H = H_w &\text{ на теле } (y = 0) \quad (1.2) \\ u = u_e, w = w_e, H = H_e = H_\infty &\text{ на внешней границе } (y \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Первый случай относится к гиперзвуковому трехмерному обтеканию охлажденных тел. Здесь удобно ортогональную сетку на теле выбрать так, чтобы линии  $z = \text{const}$  совпадали с невязкими линиями тока. Тогда  $u_e = u_e(x), w_e = 0$ , и для обычного асимптотического пограничного слоя

$$\rho_e u_e^2 K_1 = \frac{1}{l_2} \frac{\partial p}{\partial z}$$

ввиду чего второе уравнение системы (1.1) можно представить так [2]:

$$\frac{u}{l_1} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w}{l_2} \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial y} + K_2 uw - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) = u_e^2 K_1 \left( \frac{u^2}{u_e^2} - \frac{\rho_e}{\rho} \right)$$

Согласно работе [2], в случае холодной стенки правой частью этого уравнения можно пренебречь. Тогда с учетом граничных условий для  $w$  получаем, что  $w = 0$ , т. е. вторичные течения отсутствуют<sup>1</sup>.

В этом приближении трехмерность течения проявляется лишь в расхождении линий тока на внешней границе и учитывается коэффициентом Ламэ  $l_2(x, z)$ . В работе [4] дается метод расчета коэффициента  $l_2$  вдоль невязких линий тока на теле, геометрия которых может быть найдена, если известно распределение давления на теле [5].

Второй случай относится к обтеканию скошенных бесконечных цилиндрических поверхностей. При этом удобно ось  $z$  на теле направить по образующей поверхности. Тогда в системе (1.1) все  $\partial/\partial z = 0, w_e = \text{const}, u_e = u_e(x), l_2 = \text{const}$ .

Объединяя эти случаи, уравнения (1.1) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (s = \int_0^x l_1 dx) \\ u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial s} \rho u l_2 + \frac{\partial}{\partial y} \rho v l_2 = 0 \quad (1.3) \\ u \frac{\partial H}{\partial s} + v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\sigma-1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2 + w^2}{2} \right) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Если невязкие линии тока на теле совпадают с геодезическими (где  $K_1 = 0$ ), то этот результат точен. В связи с этим отметим, что при пространственном гиперзвуковом обтекании тонких заостренных тел  $K_1 \approx 0$ , что связано с большой инерцией частиц газа вблизи тела.

2. Введем переменные  $\xi, \eta$  типа Хоуарта — Дородницина

$$\xi = \int_0^s (\mu \rho)_e u_e l_2^2 ds, \quad \eta = \frac{u_e l_2}{m(\xi)} \int_0^y \rho dy \quad (2.1)$$

Вид функции  $m(\xi)$  пока не фиксируем. Этот произвол будет использован при решении. Положим

$$u = u_e(\xi) f_\eta(\xi, \eta), \quad w = w_e g(\xi, \eta), \quad H = H_w + (H_e - H_w) \theta(\xi, \eta) \quad (2.2)$$

Из (1.3) получаем следующую систему уравнений для  $f, g, \theta$

$$\begin{aligned} f_{\eta\eta\eta} + \lambda f f_{\eta\eta} + \frac{\beta_m}{t_s} \left[ (1 - t_w) \theta - \frac{w_e^2}{2H_e} g^2 + t_w - t_s f_\eta^2 \right] &= m^2 (f_\eta f_{\xi\eta} - f_\xi f_{\eta\eta}) \\ g_{\eta\eta} + \lambda f g_\eta &= m^2 (f_\eta g_\xi - f_\xi g_\eta) \\ \theta_{\eta\eta} + \lambda \sigma f \theta_\eta - \frac{1-\sigma}{1-t_w} \left[ \frac{u_e^2}{2H_e} (f_\eta^2)_{\eta\eta} + \frac{w_e^2}{2H_e} (g^2)_{\eta\eta} \right] &= m^2 (f_\eta \theta_\xi - f_\xi \theta_\eta) \\ \left( \lambda = m \frac{dm}{d\xi}, \quad \frac{\beta_m}{t_s} = \frac{m^2}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \frac{H_e}{i_e} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Границные условия имеют вид

$$\begin{aligned} f = f_\eta = g = \theta &= 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow 0 \\ f_\eta = g = \theta &= 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь нижние индексы  $\xi, \eta$  означают дифференцирование по соответствующей переменной.

Метод локального подобия основан на предположении, что влиянием правых частей в системе (2.3) можно пренебречь. Тогда система (2.3) будет содержать  $\xi$  лишь в качестве параметра и в каждом сечении  $\xi = \text{const}$  может решаться как система обыкновенных относительно  $\eta$  уравнений. При этом предыстория пограничного слоя будет сказываться через переменную подобия  $\eta$  и коэффициенты системы, зависящие от  $\xi$ .

Следуя работе [3], перепишем уравнение для  $f(\eta)$  так:

$$f''' + (\lambda + v_m) f f'' + \left\{ \frac{\beta_m}{t_s} \left[ (1 - t_w) \theta - \frac{w_e^2}{2H_e} g^2 + t_w - t_s f'^2 \right] - v_m f f'' \right\} = 0 \quad (2.5)$$

Выберем  $v_m$  таким образом, чтобы

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{\beta_m}{t_s} \left[ (1 - t_w) \theta - \frac{w_e^2}{2H_e} g^2 + t_w - t_s f'^2 \right] - v_m f f'' \right\} d\eta = 0$$

Это условие будем считать достаточным для пренебрежения в уравнении (2.5) членом в фигурных скобках. Для вычисления интегралов воспользуемся автомодельным решением для плоской пластины

$$\partial p / \partial s = 0, \quad m = \sqrt{2\xi}$$

Получаем

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{\beta_m}{t_s} I(\sigma, t_w, N), \quad I(\sigma, t_w, N) = 3.59 - 2.13 (1 - t_w) \int_0^\infty (1 - \theta_0) d\xi \\ &\quad \left( \zeta = \frac{u_e l_2}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \right) \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Здесь  $\theta_0(\zeta)$  — профиль полной энталпии на плоской пластине.

В общем случае  $I(\sigma, t_w, N)$  — функция, линейная относительно  $t_w$  и  $N$ . В частности,

$$I(1, t_w, N) = 1 + 2.59 t_w, \quad I(0.7, t_w, N) = 0.64(1 + 4.6t_w + 0.336N) \quad (2.6.2)$$

Естественно, при  $\sigma = 1$  результат практически совпадает с результатом работы [3].

Функцию  $m(\xi)$  определим из условия  $\lambda + v_m = 1$ , которое можно привести к виду

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\omega}{\lambda_0} &= \varepsilon \frac{d\omega}{d\lambda_0} \\ \left( \omega = \frac{m^2}{2\xi}, \lambda_0 = \left(1 + \frac{\beta I}{t_s}\right)^{-1}, \frac{\beta}{t_s} = 2 \frac{H_e}{i_e} \frac{d \ln u_e}{d \ln \xi}, \varepsilon = \xi \frac{d\lambda_0}{d\xi} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В приближении локального подобия это уравнение имеет простое решение  $\omega = \lambda_0$ , откуда

$$m(\xi) = \sqrt{2\xi\lambda_0} \quad (2.8)$$

Действительно, как отмечается в работе [6], концепция локального подобия верна, если мала величина  $\xi d\beta / d\xi$ . С другой стороны, ограничиваясь для простоты случаем  $\sigma = 1$ , легко получить, что при этом мала и величина

$$\xi \frac{d\lambda_0}{d\xi} = -\xi \frac{d\beta}{d\xi} \frac{\lambda_0^2 I}{t_s}$$

Отметим также, что в этом приближении

$$\lambda = \lambda_0$$

Таким образом, можно считать, что при выборе  $m(\xi)$  согласно (2.8) величина  $f(\eta)$  будет функцией Блазиуса (в частности, производная  $f''(0) = 0.47$ ).

Следовательно, в задачах с градиентом давления профиль продольной скорости  $u/u_e$  в каждом сечении  $\xi = \text{const}$  может быть получен из известного профиля Блазиуса путем некоторой деформации поперечной координаты ( $\zeta = \lambda_0^{1/2} \eta$ ).

Точность такого метода иллюстрирует фиг. 1, где кривая 1 соответствует профилю Блазиуса  $f'(\eta)$ , кривая 2 представляет  $u/u_e = \Phi'(\zeta)$  из точного решения для критической линии скшенного цилиндра ( $\beta = 1$ ,  $t_s = 0.33$ ,  $t_w = 0$ ,  $\sigma = 0.7$ ), взятого из работы [7].

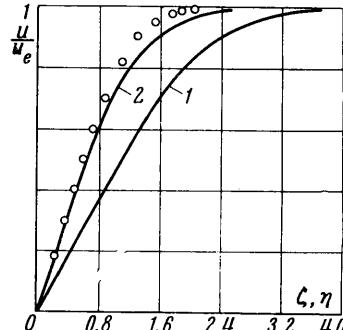
Точки обозначены профилем  $u/u_e$ , полученный указанным способом. Поскольку различие между точным и приближенным профилями  $u/u_e$  имеется практически лишь во внешней части пограничного слоя, следует ожидать, что такая модификация достаточна для целей расчета трения и теплопередачи на теле.

Профили  $g(\eta)$  и  $\theta(\eta)$  находятся через функцию Блазиуса в квадратурах, содержащих  $\lambda_0$  в качестве параметра

$$g(\eta) = \frac{G(\lambda_0, \eta)}{G(\lambda_0, \infty)}, \quad \theta(\eta) = \frac{t_* - t_w}{1 - t_w} \frac{G(\sigma\lambda_0, \eta)}{G(\sigma\lambda_0, \infty)} + \frac{1 - \sigma}{1 - t_w} \Phi(\lambda_0, \eta) \quad (2.9)$$

$$G(\lambda_0, \eta) = \int_0^\eta f''^{\lambda_0} d\eta, \quad \Phi(\lambda_0, \eta) = \int_0^\eta f''^{\sigma\lambda_0} \int_0^\eta \left( \frac{u_e^2}{2H_e} f'^2 + \frac{w_e^2}{2H_e} g^2 \right)'' f''^{-\sigma\lambda_0} d\eta d\eta$$

$$(t_* = 1 - (1 - \sigma) \Phi(\lambda_0, \infty))$$



Фиг. 1

По существу  $t_*$  совпадает с безразмерной температурой теплоизолированной стенки  $t_{aw}$ . Дело в том, что, хотя  $t_*$  в полученном решении и зависит от  $t_w$  (через  $\lambda_0$ ), эта зависимость несущественна — при изменении  $t_w$  от 0 до 1 (или  $t_{aw}$ ) величина  $t_*$  изменяется примерно на 1%.

Далее, при  $0.1 \leq \lambda_0 \leq 1$ ,  $0.7 \leq \sigma \leq 1$  для  $\Phi(\lambda_0, \infty)$  с ошибкой около 20% можно получить следующую простую формулу

$$\Phi(\lambda_0, \infty) = 0.65 \frac{u_e^2}{2H_e} + \frac{1}{1 + \sqrt{\sigma}} \frac{w_e^2}{2H_e} \quad (2.10)$$

Такая точность при расчете  $\Phi(\lambda_0, \infty)$  вполне приемлема, так как максимальный вклад величины  $(1 - \sigma)\Phi(\lambda_0, \infty)$  в значение  $t_{aw}$  порядка 25% для практических интересных случаев. Таким образом, с максимальной ошибкой  $\sim 5\%$  имеем формулу

$$t_{aw} = 1 - 0.65 (1 - \sigma) \frac{u_e^2}{2H_e} - (1 - \sqrt{\sigma}) \frac{w_e^2}{2H_e} \quad (2.11)$$



Фиг. 2

Эта формула, действительно, хорошо подтверждается результатами численных расчетов работ [6, 8].

3. Для сравнения с имеющимися точными численными решениями, в которых используется переменная подобия  $\zeta$ , представим  $u$ ,  $w$ ,  $H$  в виде

$$u = u_e(\xi) \varphi'(\zeta), \quad w = w_e g_*(\zeta)$$

$$H = H_w + (H_e - H_w) \theta_*(\zeta) \quad (3.1)$$

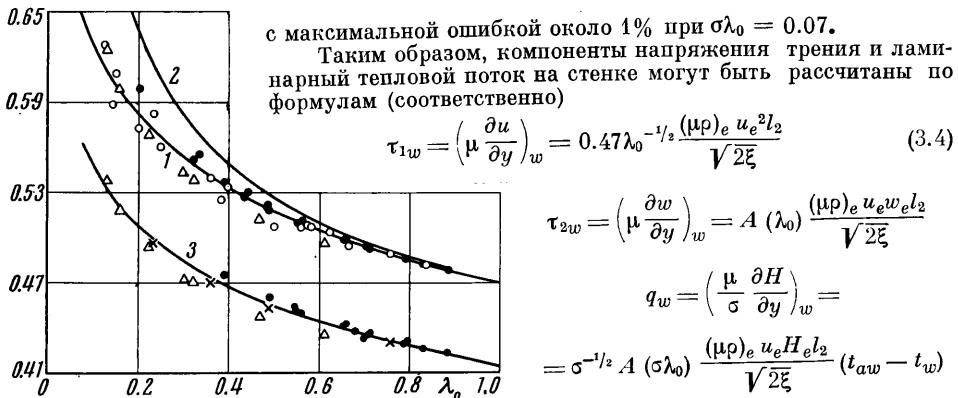
Полученное приближенное решение дает следующие значения необходимых для расчета трения и теплообмена производных на стенке:

$$\varphi''(0) = 0.47 \lambda_0^{-1/2}, \quad g_*'(0) = (0.47)^{\lambda_0} \lambda_0^{-1/2} G^{-1}(\lambda_0, \infty) = A(\lambda_0) \quad (3.2)$$

$$\tau \theta_*(0) = (0.47)^{\sigma \lambda_0} \lambda_0^{-1/2} G^{-1}(\sigma \lambda_0, \infty) = \sigma^{1/2} A(\sigma \lambda_0) \quad (\tau = \frac{1 - t_w}{t_{aw} - t_w})$$

Расчеты показали, что при  $0.1 \leq \lambda_0 \leq 1$ ,  $0.7 \leq \sigma \leq 1$

$$A(\sigma \lambda_0) = 0.47 - 0.16 \lg \sigma \lambda_0 \quad (3.3)$$



Фиг. 3

На фиг. 2, 3 приводятся сравнение приближенных формул (3.2), (3.3) с результатами численных расчетов автомодельных режимов при  $\sigma = 1.0$  и  $0.7$ , взятыми из работ [6, 8] и книги [9].

Данные работы [8], относящиеся к случаю  $\sigma = 1.0$  (при этом  $0.2 \leq \beta \leq 2$ ,  $0.154 \leq t_s \leq 1$ ,  $0 \leq t_w \leq 1$ ), обозначены светлыми точками, а относящиеся к случаю  $\sigma = 0.7$  ( $\beta = 1$ ,  $0.154 \leq t_s \leq 1$ ,  $0 \leq t_w \leq t_{aw}$ ,  $u_e = 0$ ) — треугольниками. Данные работы [6] относятся к  $\sigma = 0.7$  ( $0.1 \leq \beta \leq 0.4$ ,  $0.33 \leq t_s \leq 1$ ,  $0.15 \leq t_w \leq t_{aw}$ ,  $0 \leq (u_e/u_\infty)^2 \leq 1$ ,  $E = 1$ ) и обозначены черными точками. Из книги [9] взяты данные, относящиеся к осесимметричной критической точке при  $\sigma = 0.7$  ( $\beta = 0.5$ ,  $t_s = 1$ ,  $u_e = 0$ ,  $0 \leq t_w \leq 2$ ). Они обозначены крестиками.

На фиг. 2 сравниваются точные и приближенные значения  $\Phi''(0)$ . Приведенные точные результаты относятся к случаю холодной стенки ( $t_w = 0$  и  $0.15$ ). Максимальное отличие в величине  $\Phi''(0)$  при этом порядка 10%. С ростом  $t_w$  это отличие, вообще говоря, возрастает, что естественно, так как в данном случае принятая минимизация влияния градиента давления менее точна, а это, в первую очередь, сказывается на функции  $f(\eta)$ .

На фиг. 3 дается сравнение для величин  $g_*'(0)$  и  $\tau\theta_*'(0)$ . Кривая 1 представляет полученное приближение для  $g_*'(0)$ . Здесь отличие от точных значений для любых  $\beta$ ,  $t_s$ ,  $t_w$  и т. д., укладывающихся в рассмотренный диапазон  $\lambda_0$ , не превышает  $\sim 3\%$ . Эта же кривая дает приближенное решение для  $\theta_*'(0)$  при  $\sigma = 1$ . Результат анализа работы [8] для этого случая представляет кривую 2. Кривая 3 представляет полученный для величины  $\tau\theta_*'(0)$  результат при  $\sigma = 0.7$ . Здесь во всех расчетных случаях отличие приближенных значений от точных не превышает  $\sim 2\%$ .

Таким образом, параметр  $\lambda_0$  в достаточной мере полно характеризует суммарное влияние параметров  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $t_s$ ,  $t_w$  и т. д. на величины  $\Phi''(0)$ ,  $g_*'(0)$ ,  $\tau\theta_*'(0)$ , особенно в случае холодной стенки (в частности, при гиперзвуковом обтекании). Раздельное влияние некоторых из этих параметров проявляется лишь в безразмерной температуре теплопроводящей поверхности  $t_{aw}$ , которая дается формулой (2.11) также достаточно точно.

Автор благодарит В. В. Лунёва за обсуждение работы и замечания.

Поступило 3 VII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lees L. Laminar Heat Transfer Over Blunt—Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds. Jet Propuls. 1956, vol. 26, No 4.
2. Vaglio-Laurin R. Laminar Heat Transfer on Three—Dimensional Blunt Nosed Bodies in Hypersonic Flow, 1959, ARS Journal, vol. 29, No. 2.
3. Moore F. K. On Local Flat-Plate Similarity in the Hypersonic Boundary Layer. JASS, 1961, vol. 28, No 10.
4. Адуэский В. С. Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2.
5. Майкара Г. И. Вычисление линий тока по известному распределению давления на поверхности твердого тела. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
6. Deweay C. F. Use of Local Similarity Concepts in Hypersonic Viscous Interaction Problem. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No 1.
7. Reshotko E., Beckwith I. E. Compressible Laminar Boundary Layer over a Yawed Infinite Cylinder with Heat Transfer and Arbitrary Prandtl Number. NACA Report. 1958, No 1379.
8. Beckwith I. E. Similar Solution for the Compressible Boundary Layer on a Yawed Cylinder with Transpiration Cooling. NASA 1959. TR R-42.
9. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностран. лит., 1962,