

ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИЛ В РЕШЕТКЕ ПРОФИЛЕЙ

В. П. ВАХОМЧИК

(Москва)

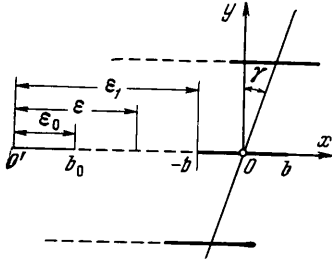
Неустановившемуся обтеканию решетки тонких профилей потоком невязкой несжимаемой жидкости и определению возникающих аэродинамических сил и моментов посвящено большое число работ. Так, например, в частном случае движения решетки с выносом γ при нулевом сдвиге фаз колебаний α между соседними профилями М. Д. Хаскинд [1] определил нестационарную подъемную силу и момент. Попеску [2] предложил выражения для силы и момента в том случае, когда $\alpha=0$ и $\gamma=0$, используя метод конформного отображения. Г. С. Самойлович [3] получил формулы для неустановившейся подъемной силы и момента методом потенциала ускорений при сдвиге фаз колебаний между соседними профилями $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$. В. В. Мусатов [4] рассчитал на ЭЦВМ суммарные нестационарные аэродинамические характеристики решетки вихревым методом, принимая во внимание амплитуду колебаний и начальную циркуляцию при $\alpha = m\pi$ ($|m| \leq 1$). Д. Н. Горелов [5] определил коэффициенты суммарной нестационарной аэродинамической силы и момента профиля в решетке с выносом γ и любым значении $\alpha = m\pi$. При этом применялся метод, основывающийся на неустановившемся обтекании одиночного профиля с последующим учетом интерференции профилей в решетке.

Ниже находятся общие выражения неустановившейся подъемной силы и момента, действующих на решетку, движущуюся в несжимаемой жидкости с постоянной скоростью U . Эти формулы обобщают известные формулы для одиночного крыла [6]. Профили решетки с выносом (§ 1) считаются тонкими слабоизогнутыми и совершают колебания со сдвигом фаз колебаний между соседними профилями. Для получения решения в замкнутом виде применяется метод выделения особенностей. Вычисляются коэффициенты разложения комплексной скорости в ряд по производным от некоторой функции. Выведено интегральное уравнение (§ 2) относительно неизвестной касательной составляющей скорости в следе и дано его аналитическое решение (§ 3). При $\alpha=0$ решение совпадает с решением, полученным ранее в работе [7]. Получены выражения сил и момента (§ 4) в виде четырех слагаемых. Первые два слагаемых определяют силу и момент при движении с постоянной циркуляцией, а последние — при движении с переменной циркуляцией. Определена в общем виде подсосывающая сила, возникающая в передних кромках профилей. Рассмотрены частные случаи редкой и густой решетки. Приведены примеры расчета.

§ 1. Рассмотрим аэродинамическую решетку с углом выноса γ из тонких слабоизогнутых профилей¹, движущуюся в плоском безвихревом потоке несжимаемой жидкости с постоянной скоростью U под малым углом атаки (фиг. 1). Предположим еще, что помимо движения со скоростью U профили решетки совершают неустановившиеся синхронные перемещения с постоянным сдвигом фаз α между соседними профилями относительно основного поступательного движения. Амплитуда этих перемещений считается бесконечно малой величиной. Скорость, с которой каждая точка профилей совершает неустановившиеся движения $v_n = v_n(x, \tau)$ (τ —время), считается заданной и определяется формой и условиями движения профилей или в общем случае их деформацией. Движение решетки изучается в подвижной системе координат, жестко связанной с серединой одного из профилей, который в дальнейшем будем считать за основной профиль. Положительная часть оси абсцисс совпадает по направлению со скоростью основного поступательного движения решетки. Будем считать, что тонкие профили решетки схематически пред-

¹ Угол выноса γ отсчитывается от направления фронта решетки до нормали к хорде профиля.

ставляют собой криволинейные дужки, мало отличающиеся от прямолинейного отрезка $(-b, b)$ оси x . Передние кромки профилей предполагаем скругленными, а выходные кромки — заостренными. На выходных кромках в точках $y = -b + int \sin \gamma$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) должно выполняться условие Жуковского — Чаплыгина о конечности скорости.



Фиг. 1

При неустановившемся обтекании такой решетки с выходных кромок профилей сбегает вихревая пелена, математически представляющая собой линию разрыва касательной составляющей скорости $u(x, \tau)$, которая является неизвестной функцией. Линии разрыва скоростей, возникающие за профилями, заменим прямолинейными отрезками $(b_0, -b)$ параллельными оси x .

Вне решетки профилей, за которой имеются вихревые следы, нужно определить комплексную скорость течения $dW/dz = u - iv$, являющуюся вне следов и вне профилей непрерывной функцией, стремящейся к нулю на бесконечности перед решеткой.

При переходе через вихревые следы нормальная составляющая скорости $v_n = \partial \Phi / \partial n$ — непрерывная функция, принимающая на обеих сторонах профилей одинаковые значения $v_n = v_n(x, \tau)$. Зная комплексный потенциал течения, нужно определить касательную составляющую скорости $u(x, \tau)$, а затем нестационарные подъемную силу и момент, действующие на профиль в решетке.

§ 2. Комплексная скорость, удовлетворяющая отмеченным выше условиям в общем случае синхронных колебаний в решетке с углом выноса γ и сдвигом фаз колебаний α между соседними профилями, может быть написана в виде

$$\frac{dW}{dz} = \frac{q_1}{i\pi g} \left[\int_{-b}^b v_n(\xi, \tau) \left(\frac{\text{sh } q_1(b - \xi)}{\text{sh } q_1(b + \xi)} \right)^{1/2} \Phi(\xi - z, q_1, n(\alpha)) d\xi + \int_{b_0}^{-b} u(\xi, \tau) \left(\frac{\text{sh } q_1(\xi - b)}{\text{sh } q_1(\xi + b)} \right)^{1/2} \Phi(\xi - z, q_1, n(\alpha)) d\xi \right] \quad (2.1)$$

где

$$q_1 = qe^{i\gamma}, \quad q = \frac{\pi}{t} = \lambda\pi, \quad n(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{\pi}, \quad \alpha = m\pi$$

$$g(z, q_1) = \left(\frac{\text{sh } q_1(z - b_1)}{\text{sh } q_1(z - b_2)} \right)^{1/2}, \quad b_1 = b + nt \sin \gamma, \quad b_2 = -b + nt \sin \gamma$$

$$\Phi(z, q_1) = \frac{\text{ch } [n(\alpha) q_1 z]}{\text{sh } (q_1 z)} - ij \frac{\text{sh } [n(\alpha) q_1 z]}{\text{sh } (q_1 z)} \quad (2.2)$$

и «временная» мнимая единица j не связана с «пространственно» мнимой единицей i . Формулы (2.1) и (2.2) при $\alpha = 0$ переходят в соответствующие формулы, полученные Г. С. Самойловичем [8]. Введем обозначения:

$$g_1(\xi, q_1) = \left(\frac{\text{sh } q_1(b - \xi)}{\text{sh } q_1(b + \xi)} \right)^{1/2}, \quad g_2(\xi, q_1) = \left(\frac{\text{sh } q_1(\xi - b)}{\text{sh } q_1(\xi + b)} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

Во втором интеграле выражения (2.1) сделаем замену переменной

$$\xi = \varepsilon - \varepsilon_1 - b \quad (\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} U(\tau) d\tau)$$

Здесь ε — переменная координата в следе, отсчитываемая от некоторого неподвижного начала O' вне следа (фиг. 1); ε_1 — координата выходной кромки основного профиля, ε_0 — координата точки следа b_0 (его конца) по оси x .

После замены переменных в новых обозначениях комплексную скорость течения вне решетки можно записать так:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{q_1}{i\pi} \frac{1}{g(z, q_1)} \left[\int_{-b}^b v_n(\xi, \tau) g_1(\xi, q_1) \Phi(\xi - z, \alpha, q_1) d\xi + \right. \\ \left. + \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2(\varepsilon_1 - \varepsilon) \Phi(\xi - z, \alpha, q_1) d\varepsilon \right] \quad (2.4)$$

Вследствие периодичности течения интегрирование по системе контуров, охватывающих профили решетки, сводится к интегрированию по контуру около основного профиля. При этом эффект решетки в выражении комплексной скорости dW/dz сводится к одной функции $\Phi(\xi - z, \alpha, q_1)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \Phi(\xi - z, 0, q_1) &= \text{cth } q_1(\xi - z) + \text{const} \\ \Phi(\xi - z, 1/2\pi, q_1) &= 1/2 \text{csch } [1/2 q_1(\xi - z)] - 1/2 ij \text{sch } [1/2 q_1(\xi - z)] \\ \Phi(\xi - z, \pi, q_1) &= \text{csch } q_1(\xi - z) \\ \Phi(\xi - z, \alpha, 0) &= 1/q_1(\xi - z) \quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Комплексная скорость разлагается в ряд по последовательным производным функции $\Phi[z, n(\alpha), q_1] \equiv \Phi(z)$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma_\alpha^0}{2\pi i} \Phi(z) - iB_1 \frac{d\Phi(z)}{dz} + i \frac{B_2}{2} \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} + \dots \quad (2.5)$$

В отличие от разложения Г. С. Самойловича [9], коэффициенты этого ряда Γ_α^0, B_1 и B_2 являются комплексными величинами, зависящими от густоты решетки $\lambda = 1/t$, угла выноса γ , сдвига фаз α , а коэффициенты B_1 и B_2 могут быть еще и функциями времени. В случае $\alpha = 0$ этот ряд будет рядом по последовательным производным гиперболического котангенса, в случае $\alpha = 1/2\pi$ — по производным функции $\Phi(z, 1/2\pi)$, а в случае $\alpha = \pi$ — по производным гиперболического косеканса.

Этот ряд нужно рассматривать как обобщение на решетчатую область разложения ограниченной аналитической функции вне одного контура, ибо при $|q_1| \rightarrow 0$ ряд (2.5) преобразуется в ряд по отрицательным степеням z . Однако при осуществлении предельного перехода нужно иметь в виду, что в случае изолированного контура комплексный потенциал течения в бесконечно удаленной точке является регулярной функцией ($dW/dz \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \mp \infty$).

В случае решетки из бесконечного числа профилей, комплексный потенциал течения dW/dz стремится к различным величинам на бесконечности перед и за решеткой. Таким образом в этом случае функция dW/dz имеет на бесконечности существенно особую точку. С гидродинамической точки зрения это означает, что при стремлении шага решетки $t \rightarrow \infty$ переходим в физической плоскости к разложению в ряд (правильной части ряда Лорана), соответствующему одиночному профилю, вне полюса (вихря) в начале координат. На оси y в бесконечности ($y \rightarrow \pm \infty$) возникает скопление полюсов (гидродинамических вихрей), соответствующих остальным лопаткам решетки. Эти особенности характеризуются правильной частью ряда Лорана.

Отметим теперь основные свойства ряда (2.5).

1. Ряд является периодической функцией с общим периодом

$$T_\alpha = imte^{-i\gamma} \quad \text{или} \quad \Phi\left(z + i \frac{m\pi}{q_1}\right) = e^{-jm\alpha} \Phi(z)$$

$$(m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

В частности

$$\begin{aligned} T_0 &= ite^{-i\gamma}, \quad T_{1/2\pi} = 4 ite^{-i\gamma}, \\ T_\pi &= 2 ite^{-i\gamma}, \end{aligned}$$

2. В бесконечности перед и за решеткой ($x \rightarrow \pm\infty$)

$$\frac{dW}{dz} \rightarrow \pm \frac{\Gamma}{2\pi i} (1 \mp ij) e^{\mp \alpha q_1 x}$$

т. е. к различным скоростям перед и за решеткой.

3. На выходных кромках профилей в точках $z = -b + int \sin \gamma$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) каждое слагаемое ряда — непрерывная функция. Кроме того, каждое слагаемое, за исключением точек $z_m = imt \exp(-i\gamma)$ будет аналитической функцией.

4. Если в каждой точке физической плоскости $z_m = imt \exp(-i\gamma)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) поместить одиночные вихри на расстоянии $t_1 = it \exp(-i\gamma)$ так, чтобы направление обхода вокруг каждого вихря совпадало через m вихрей, то индуцированная комплексная скорость будет иметь полосы в точках $z_m = imt \exp(-i\gamma)$ с главными частями

$$g_m(z) = \frac{1}{q_1} \frac{e^{-jmz}}{z - (im\pi/q_1) e^{i\gamma}} \quad (2.6)$$

Основной параллелограмм периодов на оси x с действительным достаточно большим первым периодом $x = \pm K$ и комплексным вторым периодом $z = \pm 1/2 ite^{-i\gamma}$. В основном периоде содержится только одна особенность $z_0 = 0$, в остальных периодах $z_m = imt \exp(-i\gamma)$.

Таким образом, ряд (2.5) представляет собой вырожденный частный случай разложения эллиптической функции по последовательным производным ζ — функции Вейерштрасса при первом комплексном периоде и бесконечном втором периоде. Если $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$, то второй период будет чисто мнимым, и получим частный случай [10], когда дзета-функция переходит в гиперболический котангенс.

Обращаясь снова к выражению комплексной скорости течения (2.4) и внося функцию $g(z, q_1)$ под знак интеграла, представим произведение функций $g^{-1}(z, q_1) \Phi$ первого интеграла рядом

$$\frac{\Phi(z - \xi, q_1, \alpha)}{g(z, q_1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} a_{k\alpha}(\xi, q_1, \alpha) \frac{d^k \Phi_\alpha}{dz^k} \quad (2.7)$$

Здесь α в индексе означает, что для каждой величины сдвига фаз колебаний между соседними профилями α будет соответственно своя функция $\Phi(z)$ и функция $a_{k\alpha}(\xi, q_1, \alpha)$. Отметим, что $-b \leq \xi \leq b$ ($|\xi| \leq b$). Написанный ряд сходится внутри окружности радиуса $|r| = t$ с центром в середине отрезка $(-b, b)$ с исключенной малой окрестностью точки $z = 0$ ($r_1 = \varepsilon^0$). Внутри кольца меньшей ширины ряд сходится равномерно. Его коэффициенты определяются так:

$$a_{k\alpha}(\xi, q_1, \alpha) = \frac{q_1}{2\pi i} \int_{L_0} z^k g(z, g_1) \Phi(\xi - z, \alpha, q_1) dz \quad (2.8)$$

Здесь L_0 — бесконечно-удаленный контур в основном периоде решетки, содержащий профиль с номером $n = 0$ и след, ξ — точка контура профиля, z — комплексная координата области течения вне профилей и следов. Применяя теорему Коши к суммарному двухсвязному контуру $L = L_0 + L_1$, переходим к интегрированию по контуру L_1 , охватывающему профиль и след. Точки $b_0, -b, b$ обходятся по бесконечно малым окружностям радиуса $\varepsilon^0 \rightarrow 0$, $\varepsilon^0 > 0$. Интегралы вдоль следа взаимно уничтожаются, а интегралы по малым окружностям в точках $b_0, -b, b$ стремятся к нулю при $\varepsilon^0 \rightarrow 0$. Останутся только интегралы по краям

разреза отрезка $(-b, b)$ и

$$a_{k\alpha} = \frac{q_1}{\pi} \int_{-b}^b x^k g(x, q_1) \Phi(\xi - x, \alpha, q_1) dx \quad (2.9)$$

$$\Phi(\xi - x, \alpha, q_1) = \Phi(\xi - z, \alpha, q_1) \quad \text{при } z = x, y \rightarrow \pm 0$$

Подынтегральная функция в точке $x = b$ терпит разрыв второго рода, типа $(b-x)^{-1/2}$, и поэтому в этой точке интеграл сходится. Функция $\Phi(\xi-x)$ терпит разрыв в точке $x = \xi$; в этой точке берется главное значение интеграла по Коши.

Произведение функций $g^{-1}(z, q_1) \Phi(\xi-z, \alpha, q_1)$ под знаком второго интеграла представляется другим рядом

$$\frac{\Phi(\xi - z, \alpha, q_1)}{g(z, q_1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} b_{k\alpha}(\xi, q_1, \alpha) \frac{d^k \Phi_{\alpha}}{dz^k} \quad (b_0 \leq \xi \leq -b) \quad (2.10)$$

Ряд сходится внутри окружности радиуса R , равного расстоянию до ближайшей особой точки, с центром в середине отрезка $(b_0, -b)$. Коэффициенты ряда определяются так:

$$b_{k\alpha}(\xi, \alpha, q_1) = \frac{q_1}{\pi} \int_{-b}^b x^k g(x, q_1) \Phi(\xi - x, \alpha, q_1) dx - \frac{\xi^k}{g_2(\xi, q)} \quad (2.11)$$

Зная теперь коэффициенты разложений (2.7) и (2.10) и сравнивая их с коэффициентами разложения (2.5), находим $\Gamma_{\alpha}^0, B_1, B_2$ в виде

$$\Gamma_{\alpha}^0 = 2 \int_{-b}^b v_n g_1 a_{0\alpha}(\xi, q_1) d\xi + 2 \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2 b_{0\alpha}(\xi, q_1) d\varepsilon \quad (2.12)$$

$$B_1 = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-b}^b v_n g_1 a_{1\alpha} d\xi - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2 b_{1\alpha} d\varepsilon \right] \quad (2.13)$$

$$B_2 = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-b}^b v_n g_1(\xi, q_1) a_{2\alpha} d\xi + \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2 b_{2\alpha} d\varepsilon \right] \quad (2.14)$$

При $|q_1| \rightarrow 0$, т. е. для одиночного профиля, коэффициенты $\Gamma_{\alpha}^0, B_1, B_2$ переходят в соответствующие коэффициенты Γ_0, c_2, c_3 , введенные в работе [6]. В рассматриваемом общем случае коэффициенты $\Gamma_{\alpha}^0, B_1, B_2$ являются комплексными величинами, зависящими от угла выноса γ , сдвига фаз колебаний между соседними профилями α , густоты решетки λ .

Величина Γ_{α}^0 в выражении (2.12) представляет собой циркуляцию по контуру L_0 , охватывающему и профиль и след, и с течением времени не изменяется. Контур L_0 можно деформировать в бесконечно удаленный контур. Если неустановившееся движение возникает в жидкости с начальной циркуляцией $\Gamma = \Gamma_{\alpha}^0$, то (2.12) можно переписать в виде

$$-2 \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2(\xi, q_1) b_{0\alpha} d\varepsilon = -\Gamma_{\alpha}^0 + 2 \int_{-b}^b v_n g_1 a_{0\alpha} d\xi \quad (2.15)$$

Так как величина нормальной скорости на профиле считается заданной, то правая часть равенства (2.15) является известной функцией времени. Если движение происходит с постоянной циркуляцией вокруг профилей, то $u(\varepsilon) \equiv 0$; физически это означает, что вихревые следы отсутствуют или ушли в бесконечность. Тогда равенство (2.15) однозначно определяет величину этой циркуляции

$$\Gamma_{\alpha}^0 = 2 \int_{-b}^b v_n(\xi, \tau) g_1(\xi, q_1) a_{0\alpha}(\xi, q_1) d\xi \quad (2.16)$$

Если неустановившееся движение возникает из состояния покоя, то из равенства (2.16) следует, что $\Gamma_{\alpha}^0 = 0$. Если же неустановившееся движение возникает из некоторого установившегося состояния, то Γ_{α}^0 определяется формулой (2.16), только вместо $v_n(\xi, \tau)$ нужно взять ее значение в стационарном положении $v_{n0} = v_{n0}(\xi)$. По этой причине (2.15) можно переписать так:

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1(\tau)} u(\varepsilon) g_2(\varepsilon - \varepsilon_1) b_{0\alpha}(\xi, q_1) d\varepsilon = \int_{-b}^b (v_{n0} - v_n) g_1 a_{0\alpha}(\xi, q_1) d\xi \quad (2.17)$$

В частном случае большого шага ($t \rightarrow \infty$) полученное соотношение переходит в аналогичные соотношения для изолированного крыла [6] и решетки при $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$ [11].

Так как $v_n(\xi, \tau)$ и $v_{n0}(\xi)$ — известные функции, то интеграл в правой части равенства (2.17) тоже известная функция времени. Следовательно, это равенство представляет собой интегральное уравнение типа Вольтерра первого рода относительно неизвестной функции $u(\varepsilon)$, равной касательной составляющей скорости в следе за решеткой с выносом γ при наличии сдвига фаз колебаний $\alpha \neq 0$ между соседними профилями.

§ 3. Преобразуем соотношение (2.15), подставляя вместо $b_{0\alpha}$ его выражение согласно формуле (2.11) при $k = 0$; получим

$$-2 \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) [g_2(\xi, q_1) b_{0\alpha}^{(0)}(\xi, q_1) - 1] d\varepsilon = -\Gamma_{\alpha}^0 + 2 \int_{-b}^b v_n g_1 a_{0\alpha} d\xi \quad (3.1)$$

$$b_{0\alpha}^{(0)} = \frac{q_1}{\pi} \int_{-b}^b g(x, q_1) \Phi(\xi - x, \alpha, q_1) dx$$

Раскрываем скобки подынтегрального выражения левой части первого равенства и переносим его второе слагаемое в правую часть. Учитывая (2.16), равенство (3.1) приводится к следующему виду:

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2(\xi, q_1) b_{0\alpha}^{(0)} d\varepsilon = \int_{-b}^b (v_{n0} - v_n) g_1 a_{0\alpha} d\xi + \frac{\Gamma(\varepsilon_1) - \Gamma_{\alpha}^0}{2} \quad (3.2)$$

При $\alpha = 0$, т. е. когда сдвиг фаз колебаний между соседними профилями равен нулю

$$b_{00}^{(0)} = \frac{q_1}{\pi} \int_{-b}^b g(x, q_1) [\operatorname{cth} q_1(\xi - x) + 1] dx = -[e^{-q_1 b} - g_2^{-1}(\xi, q_1)]$$

$$a_{00} = -e^{-q_1 b}$$

и равенство (3.2) записывается так:

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) [g_2(\xi, q_1) - e^{q_1 b}] d\varepsilon = \int_{-b}^b (v_{n0} - v_n) g_1 d\xi - \frac{1}{2} e^{q_1 b} (\Gamma_1 - \Gamma_0^0) \quad (3.3)$$

Это выражение совпадает с соответствующим выражением работы [7].

Сделаем в (3.2) замену переменной $\xi = -bs$. В новых переменных равенство (3.2) имеет вид

$$\int_{s_1}^1 u [b(1-s) + \varepsilon_1] g_2(s, q_1) b_{0\alpha}^{(0)} ds = \frac{1}{b} \int_{-b}^b (v_n - v_{n0}) g_1 a_{0\alpha} d\xi - \frac{\Gamma(\varepsilon_1) - \Gamma_{\alpha}^0}{2b} \quad (3.4)$$

$$\left(s_1 = 1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{b} \right)$$

В случае гармонических колебаний, которые обычно рассматриваются

Здесь ω — круговая частота, $\varepsilon_1 = U\tau_1$, $\mu = \omega b/U$ — число Струхаля;

$$2 \int_{-b}^b (v_n - v_{n0}) g_1 \alpha_{0\alpha}(\xi) d\xi = 2 \exp \frac{j\mu \varepsilon_1}{b} \int_{-b}^b v(\xi) g_1 \alpha_{0\alpha} d\xi = A_0 \exp \frac{j\mu \varepsilon_1}{b} \quad (3.5)$$

$$\Gamma_1 - \Gamma_\alpha^0 = B_\alpha(q_1) \exp \frac{j\mu \varepsilon_1}{b}, \quad 2u(\varepsilon) = \frac{d\Gamma}{d\varepsilon} = j \frac{\mu}{b} B_\alpha \exp \frac{j\mu \varepsilon_1}{b} \quad (3.6)$$

$$u(b + \varepsilon_1 - bs) = j \frac{\mu}{b} \frac{B_\alpha(q_1)}{2} e^{j\mu} e^{-j\mu s} \exp \frac{j\mu \varepsilon_1}{b} \quad (3.7)$$

Подставляя (3.5), (3.6) и (3.7) в (3.4), находим, что

$$B_\alpha(q_1) = A_\alpha(q_1) \left(j\mu e^{j\mu} \int_{\varepsilon_1}^1 e^{-j\mu s} g_2(q_1, s) b_{0\alpha}^{(0)} ds + 1 \right)^{-1} \quad (3.8)$$

Итак, определение касательной скорости $u(b + \varepsilon_1 - bs)$ сводится к квадратуре.

§ 4. Перейдем теперь к определению нестационарных подъемной силы и момента. В качестве контура интегрирования выберем контур, проходящий по берегам разреза (b_0, b) , который можно деформировать в бесконечно удаленный контур. Используя разложение мероморфной функции в ряд

$$\Phi(z, q_1, \alpha) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{jm\alpha}}{z + im\pi/q_1} + \frac{e^{-jm\alpha}}{z - im\pi/q_1} \right)$$

сходящийся равномерно в любой окрестности точки z вне полюсов, приходим к выводу, что в основном прямоугольнике периодов, содержащем основной профиль с номером $n = 0$, функция $\Phi(z, q_1, \alpha)$ является аналитической, за исключением точки $z = 0$. По этой причине комплексный потенциал

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma_\alpha^0}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{iB_1}{z^2} + \frac{iB_2}{z^3} + \dots + \psi(z, q_1) + \dots$$

Функция $\psi(z, q_1)$ является аналитической и внутри основного прямоугольника не имеет особенностей. Применяя общие формулы Л. И. Седова [6], получим нестационарную подъемную силу и момент, действующие на профиль решетки с выносом γ при наличии сдвига фаз колебаний между соседними профилями

$$X + iY = i\rho U \Gamma_\alpha^0 - 2\pi\rho i \frac{dB_1}{d\tau} \quad (4.1)$$

$$M_1 + iM_2 = -2\pi\rho U \operatorname{Re}_i B_1 - \frac{\rho}{4\pi} \operatorname{Re}_i i (\Gamma_\alpha^0)^2 - \rho\pi \frac{d}{d\tau} (\operatorname{Re}_i B_2)$$

Отметим, что когда $\gamma = 0$, а q — действительная величина, то второе слагаемое в выражении для момента исчезает. Подставляя коэффициенты (2.12) (2.13) и (2.14) в (4.1) и считая для простоты $\gamma = 0$, имеем:

$$X + iY = i2\rho U i \int_{-b}^b v_n g_1 \alpha_{0\alpha}(\xi, q) d\xi + 2\rho i \frac{d}{d\tau} \int_{-b}^b v_n g_1 \alpha_{1\alpha} d\xi + 2\rho U i \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2(\xi, q) b_{0\alpha} d\varepsilon - 2\rho i \frac{d}{d\tau} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2 b_{1\alpha} d\xi \quad (4.2)$$

$$M_1 + iM_2 = 2\rho U \int_{-b}^b v_n g_1(\xi, q_1) \alpha_{1\alpha} d\xi + \rho \frac{d}{d\tau} \int_{-b}^b v_n g_1 \alpha_{2\alpha} d\xi + 2\rho U \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2 b_{1\alpha} d\varepsilon + \rho \frac{d}{d\tau} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2 b_{2\alpha} d\varepsilon \quad (4.3)$$

Отличие этих формул для сил и момента от полученных ранее другими авторами [12] состоит в том, что первые два слагаемые в (4.2) и (4.3) выражаются не через интенсивность распределенных по профилю вихрей, которая является неизвестной величиной, а через нормальную составляющую скорости на профиле, которая определяется из кинематики движения.

Первые два слагаемые в формулах (4.2) и (4.3) дают величину подъемной силы и момента при движении профиля решетки с постоянной циркуляцией, определяемой в рассматриваемый момент времени из условия конечности скорости у выходных кромок профиля решетки.

Два последних слагаемых в (4.2) и (4.3) определяют ту часть нестационарной силы и момента, которая возникает за счет образования системы вихревых цепей при неустановившемся движении решетки профилей со сдвигом фаз колебаний между соседними профилями. В предельном случае очень редкой решетки ($q \rightarrow 0$) формулы (4.2) и (4.3) переходят в известные формулы, имеющиеся в работе [6].

Подсасывающая сила на передних кромках профилей решетки

$$X_n = \frac{\rho q_1}{\pi} [A(q_1 b)]^2 \operatorname{sh} 2q_1 b$$

$$A(q_1, b) = \left[\int_{-b}^b v_n g_1 \Phi(\xi - b, \alpha, q_1) d\xi + \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_2 \Phi(\varepsilon, \alpha, q_1) d\varepsilon \right]$$

Проекция суммарной гидродинамической силы на ось x при движении профилей со сдвигом фаз колебаний равна

$$R(q_1, \alpha) = -Y(q_1, \alpha) \beta(\tau) + X_n$$

В этом равенстве $\beta(\tau)$ — угол, составляемый профилем с осью x .

Таким образом, при неустановившемся движении решетки из тонких профилей за счет наличия подсасывающей силы возникает тянущая сила. Рассмотрим теперь в (4.2) ту часть подъемной силы, которая обусловлена вихревыми следами за решеткой

$$Y_w = 2\rho U \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) \left(\frac{\operatorname{sh} q(\xi - b)}{\operatorname{sh} q(\xi + b)} \right)^{1/2} b_{0\alpha}(\xi, q) d\varepsilon + 2\rho \frac{dT(\tau, q)}{d\tau}$$

$$T(\tau, q) \equiv \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1(\tau)} u(\varepsilon) \left(\frac{\operatorname{sh} q(\xi - b)}{\operatorname{sh} q(\xi + b)} \right)^{1/2} b_{1\alpha}(\xi, q) d\varepsilon \quad (4.4)$$

В первом слагаемом функция $g_2(\xi, q)$ имеет разрыв в точке $\xi = -b$ типа $g_2(-b, q) \sim (\xi + b)^{-1/2}$. Поэтому подынтегральная функция интегрируема, а первый интеграл сходится. Функция $b_{1\alpha}(\xi, q)$ в точке $\xi = -b$ также непрерывна, однако наличие разрыва функции $g_2(\xi, q)$ во втором слагаемом препятствует применению правила дифференцирования интеграла. Поэтому интеграл $T(\tau, q)$ нужно сначала взять по частям и избавиться от особенности подынтегральной функции в точке $\varepsilon = \varepsilon_1$ ($\xi = -b$).

Выполняя эти несложные преобразования, получим

$$\frac{dT}{d\tau} = -U \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) \left\{ \frac{\Pi'(\xi, q)}{g_2(\xi, q)} - \frac{q\Pi(\xi, q) g_2 \operatorname{sh} 2qb}{\operatorname{sh}^2 q(\xi - b)} \right\} d\varepsilon$$

В этом выражении

$$\Pi(\xi, q) = \frac{H(\xi) b_{1\alpha} - H_1(\xi) b_{1\alpha}'}{q \operatorname{ch}^2 q(b + \xi)}$$

$$H(\xi) = 1/2 q [3 \operatorname{ch} 2qb - \operatorname{ch} 2q\xi], \quad H_1(\xi) = q \operatorname{ch} q(b + \xi) \operatorname{sh} q(\xi + b)$$

Здесь штрих — дифференцирование по ξ . Таким образом, получаем выражение для нестационарной подъемной силы при любом сдвиге фаз колебаний соседних лопаток α и конечных вихревых следах за решеткой.

Аналогичное выражение можно получить и для вычисления момента.

Исследуем частные случаи очень редкой и очень густой решетки. Если сдвиг фаз колебаний между соседними профилями $\alpha = 0$, тогда

$$b_{10} = \frac{q_1}{\pi} \int_{-b}^b xg(x, q_1) [\operatorname{cth} q_1 (\xi - x) + 1] dx - \frac{\xi}{g_2} \quad (b_0 \leq \xi \leq -b)$$

Заменим $x \equiv -(\xi - x) + \xi$ и преобразуем $b_{10} = b_{10}(\xi, q_1)$ к виду

$$b_{10}(\xi, q_1) \equiv -b_{10(1)} - \xi e^{-q_1 b}, \quad b_{10(1)} = \frac{q_1}{\pi} \int_{-b}^b (\xi - x) g(x, q_1) [\operatorname{cth} q_1 (\xi - x) + 1] dx$$

В случае редкой решетки ($|q_1| \rightarrow 0$, $q_1(\xi - x) \operatorname{cth} q_1(\xi - x) \rightarrow 1$)

$$b_{10}(\xi, q_1) = -\frac{1}{q_1} \operatorname{sh} q_1 b - \xi e^{-q_1 b}$$

и коэффициент $b_{10}(\xi, q_1)$ совпадает с коэффициентом $-d_1(\xi, q_1)$ работы [11]

Аналогично можно показать, что

$$b_{20}(\xi, q_1) = -b_{20(2)}(\xi, q_1) - b_{10(1)}(\xi, q_1) - \xi^2 e^{-q_1 b}$$

Функция $b_{20(2)}$ этого равенства получается из функции $b_{10(1)}$ просто путем умножения ее подынтегрального выражения на x .

Заметим, что целесообразно аналогичные преобразования коэффициентов применять при сдвиге фаз колебаний между соседними профилями $\alpha \neq 0$.

В случае густой решетки $|q_1| \rightarrow \infty$

$$b_{10}(\xi, q_1) \sim -\frac{\xi}{g_2(\xi, q_1)}, \quad b_{20} \sim -\frac{\xi^2}{g_2(\xi, q_1)} \quad (4.5)$$

Подставляя эти выражения в общую формулу (4.4) при $\alpha = 0$ и выполняя несложные преобразования, определим нестационарную силу, обусловленную системой вихревых следов для редкой решетки при $\gamma = 0$

$$Y_w = -\rho UA_0(q) e^{j\omega\tau} v(q, \mu) e^{i\theta(q, \mu)}$$

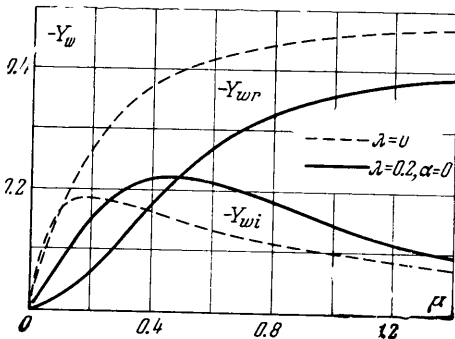
Здесь введены следующие обозначения:

$$\frac{\operatorname{sh} 2qb}{2qb} \frac{qI_{s_0}(q, \mu)}{n(q, \mu)} = v(q, \mu) e^{i\theta(q, \mu)}$$

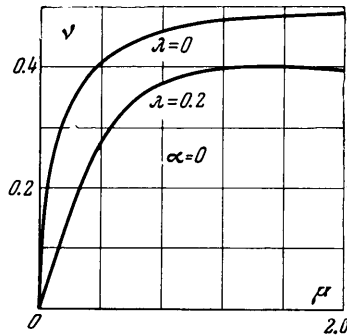
$$qI_{s_0}(q, \mu) = \int_{s_0}^1 e^{-j\mu s} \frac{q \operatorname{sh} q - q^2 s e^{-q}}{\operatorname{sh}^2 q (s-1)} \left(\frac{\operatorname{sh} q (s-1)}{\operatorname{sh} q (s+1)} \right)^{1/2} ds$$

$$n(q, \mu) = \int_{s_0}^1 e^{-j\mu s} \left[\left(\frac{\operatorname{sh} q (s+1)}{\operatorname{sh} q (s-1)} \right)^{1/2} - e^q \right] ds - \frac{1}{j\mu} \frac{e^q}{e^{j\mu}}$$

Величина $(-\rho UA(q) e^{j\omega\tau})$ представляет собой подъемную силу



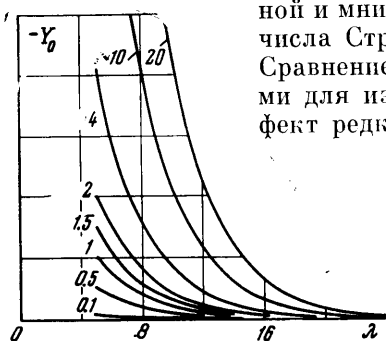
Фиг. 2



Фиг. 3

профиля в решетке в установившемся движении при постоянной циркуляции, когда нормальная скорость на профиле берется в данный момент

времени (следы еще отсутствуют). Следовательно, функция $v = v(q, \mu)$ в формуле (4.6) дает отношение амплитуды нестационарной силы, обусловленной следами, к амплитуде стационарной силы, $\theta(q, \mu)$ определяет сдвиг фазы между ними. На фиг. 2 представлена зависимость действительной и мнимой частей $Y_{wr} = v \cos \theta$, $Y_{wi} = v \sin \theta$ от числа Струхала μ при значении густоты $\lambda = 0,2$.



Фиг. 4

из графика фиг. 3. При малых числах Струхала $\mu \rightarrow 0$ модуль силы $v(q, \mu) \rightarrow 0$, а следовательно и $Y_w = 0$. В случае решетки большой густоты $\lambda \rightarrow \infty$ при $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$ из общей формулы (4.4), учитывая (4.5), можно определить нестационарную подъемную силу

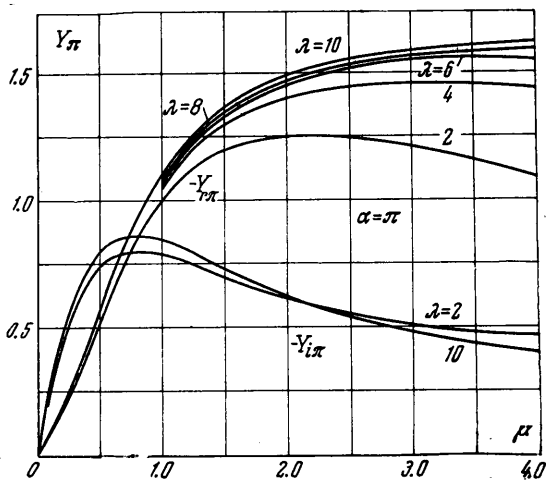
$$Y_0 = -j\mu b e^{-\lambda\pi b}$$

$$\left(Y_0 = \frac{Y_w}{\rho U A(q) e^{j\omega\tau}} \right)$$

и момент

$$M_0 = \frac{1}{2} \frac{\mu}{b} e^{-\lambda\pi b}$$

Полученный результат отличается от аналогичной формулы Г. С. Самойловича [8], в которую величина μ не входит. График функции Y_0 в зависимости от λ при значениях $\mu = 10, 4, 2, 1.5, 1, 0.5, 0.1$ приведен на фиг. 4. При малых числах Струхала ($\mu < 1$) и густотах $\lambda > 1$ нестационарная часть подъемной силы Y_0 в зависимости от числа Струхала μ стремится к нулю. При больших значениях μ ($\mu > 1$) такое же свойство проявляется при больших густотах (λ) (фиг. 4). Таким образом величина нестационарной части подъемной силы густой решетки $Y_0 \approx 0$. В этом случае эффект сбегающих вихревых следов за решеткой приводит к нестационарной силе, мало отличающейся от силы при движении решетки с постоянной циркуляцией вокруг профилей. Однако с увеличением числа Струхала нестационарная часть подъемной силы будет близка к стационарной силе только при больших густотах. Этот вывод справедлив только в том случае, когда сдвиг фаз колебаний между соседними профилями отсутствует ($\alpha = 0$). Поэтому в качестве примера была определена нестационарная часть подъемной силы густой решетки при значении $\alpha = \pi$. Опуская выкладки, аналогичные случаю $\alpha = 0$, приве-



Фиг. 5

дем окончательное выражение действительной и мнимой частей нестационарной силы

$$Y_{r\pi} = \frac{4}{\pi} \frac{q\mu [qB_2^{(2)}(q, \mu) - \mu B_1^{(1)}(q, \mu)]}{q^2 + \mu^2} + \mu B_2^{(2)}(q, \mu)$$

$$Y_{i\pi} = -\frac{4}{\pi} \frac{q\mu [qB_1^{(1)} + \mu B_2^{(2)}]}{q^2 + \mu^2} - \mu B_1^{(1)}(q, \mu)$$

где

$$B_1^{(1)}(q, \mu) = \frac{(\pi q + 4\mu^2)\pi q}{(\pi q + 4\mu^2)^2 + 16\mu^2 q^2}$$

$$B_2^{(2)}(q, \mu) = \frac{4\mu\pi q^2}{(\pi q + 4\mu^2)^2 + 16\mu^2 q^2}$$

По этим формулам был произведен расчет действительной и мнимой частей силы $Y_{w\pi}$. Результаты расчета показаны на графике фиг. 5. В отличие от случая $\alpha = 0$, в данном случае при малых числах Струхала ($\mu < 1$) сила практически не зависит от густоты решетки, а существенно зависит от числа Струхала. При числах Струхала $\mu > 1$ проявляется влияние густоты, однако при $\mu \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow \infty$, $Y_{w\pi} \rightarrow 0$ очень медленно. Различное поведение по λ действительной и мнимой составляющей объясняется, по-видимому, наличием экстремума функций $Y_{r\pi}$ и $Y_{i\pi}$ по λ .

Таким образом, при отличном от нуля значении сдвига фаз колебаний между соседними профилями ($\alpha \neq 0$) нестационарная часть подъемной силы густой решетки существенно изменяется от числа Струхала μ .

Поступило 3 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Колебания решетки тонких профилей в несжимаемом потоке. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
2. Рореску I. L. Ausupra miscării nepermanente a unui fluid inter-rete a de profile, Nota 1, Bul. Stiint. Acad. R. P. R. Sec mat. fiz., t 9, No 4, 1957 г.
3. Самойлович Г. С. Обтекание аэродинамической решетки тонких вибрирующих профилей. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
4. Мусатов В. В. К расчету нестационарного обтекания решетки профилей в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, ОТН Механика и машиностроение, 1963, № 3.
5. Горелов Д. Н., Доминас П. В. Нестационарные аэродинамические характеристики решетки пластины в плоском потоке несжимаемой жидкости. Механика, 1965, т. 3.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
7. Вахомчик В. П. Аналитическое решение интегрального уравнения колебаний тонких профилей в решетке. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 3.
8. Самойлович Г. С. Изгибно-крутильный флаттер лопаток в густой аэродинамической решетке. Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 6.
9. Самойлович Г. С. Расчет гидродинамических решеток. ПММ, 1950, т. 14, вып. 2.
10. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. Физматгиз, 1962.
11. Вахомчик В. П. Об определении нестационарных сил в решетке профилей. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 1.
12. Сиразетдинов Т. К. К обтеканию колеблющихся решеток. Тр. Казанск. авиацион. ин-та, т. 38, 1958.