

РЕШЕТКА ПЛАСТИН В СВЕРХЗВУКОВОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

Д. Н. ГОРЕЛОВ

(Новосибирск)

Сверхзвуковое нестационарное течение газа около решетки тонких слабо изогнутых профилей исследовано в ряде работ. Работа [1] посвящена оценке влияния на нестационарные аэродинамические характеристики профиля стенок аэродинамической трубы, а работа [2] — границ свободной струи. Эти случаи эквивалентны соответственно противофазным и синфазным колебаниям профилей решетки без выноса. В работе [3] рассмотрен более общий случай течения газа около профиля в аэродинамической трубе с перфорированными стенками. Обтекание решетки профилей с выносом исследовано в работе [4], причем величина угла выноса ограничена условием, что фронт решетки находится в невозмущенном потоке.

В настоящей работе дан метод расчета нестационарного сверхзвукового течения газа около решетки профилей произвольного выноса. В качестве примера приведены результаты расчета аэродинамических сил и моментов, действующих на колеблющийся профиль в аэродинамической трубе с твердыми стенками и в свободной струе.

§1. Рассмотрим обтекание сверхзвуковым потенциальным потоком газа решетки тонких слабо изогнутых профилей (пластин), колеблющихся с малыми амплитудами по некоторому заданному закону с постоянным сдвигом фаз между колебаниями соседних профилей. Обозначим через β угол выноса решетки, $2c$ — хорду профилей, h — расстояние между профилями вдоль фронта решетки. Выберем один из профилей в качестве исходного. Профилям, расположенным выше исходного, присвоим номера $+1, +2, \dots$, а профилям ниже исходного номера $-1, -2, \dots$. С исходным профилем свяжем систему координат ξ, η с началом в носике профиля. Ось ξ направим вдоль хорды, ось η — перпендикулярно хорде профиля. Аналогичные системы координат ξ_j, η_j свяжем с каждым другим профилем решетки ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$). Координаты ξ_j, η_j связаны с ξ, η соотношениями

$$\xi_j = \xi - jh \sin \beta, \quad \eta_j = \eta - jh \cos \beta \quad (1.1)$$

Потенциал скорости обтекания решетки $\varphi(\xi, \eta, t)$ в случае гармонических колебаний профилей с круговой частотой ν удовлетворяет уравнению [5]

$$(M^2 - 1) \varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta} + 2ikM^2\varphi_{\xi} - k^2M^2\varphi = 0 \quad (1.2)$$

$$(M = V/a, k = \nu c/V)$$

где a — скорость звука в невозмущенном потоке, и соответствующим граничным условиям, которые выражают условия непротекания газа через профили решетки, отсутствие возмущений потока вне конусов Маха и непрерывность давления при переходе через вихревые следы за профилями.

Характеристики уравнения (1.2), выходящие из передней кромки j -го профиля ($j = 0, \pm 1, \dots$), пересекают оси ξ_{j+1} и ξ_{j-1} в точки ξ_1^* , ξ_0^* соответственно (фиг. 1,2), где

$$\xi_1^* = h(\sqrt{M^2 - 1} \cos \beta - \sin \beta), \quad \xi_0^* = h(\sqrt{M^2 - 1} \cos \beta + \sin \beta) \quad (1.3)$$

Удобно перейти к безразмерным координатам x_j, y_j , связанным с ξ_j, η_j соотношениями

$$\xi_j = cx_j, \quad \eta_j = cy_j \sqrt{M^2 - 1} \quad (j = 0, \pm 1, \dots) \quad (1.4)$$

Исходному профилю соответствует $j = 0$. Из (1.1), (1.3), (1.4) имеем

$$x_j = x - 2j\tau^{-1} \sin \beta, \quad y_j = y - 2j\tau^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \cos \beta$$

$$(\tau = 2c/h; j = 0, \pm 1, \dots) \quad (1.5)$$

$$x_0^* = 2\tau^{-1} [\sqrt{M^2 - 1} \cos \beta + \sin \beta], \quad x_1^* = 2\tau^{-1} [\sqrt{M^2 - 1} \cos \beta - \sin \beta] \quad (1.6)$$

Положим

$$\Phi(\xi, \eta, t) = cV\Phi(x, y)e^{i(vt - \lambda x)} \quad (\lambda = \kappa m^2/m^2 - 1) \quad (1.7)$$

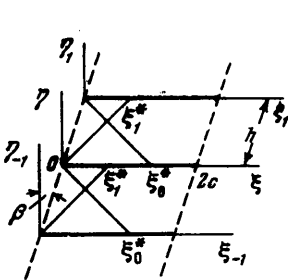
Тогда уравнение (1.2) примет вид

$$\Phi_{xx} - \Phi_{yy} + \omega^2 \Phi = 0 \quad \omega = \lambda/\mu \quad (1.8)$$

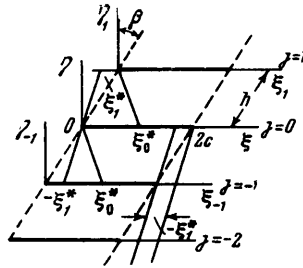
Если $Vv^{(j)}(x_j) \exp(ivt)$ — заданный закон колебаний j -го профиля, то условие непротекания в точках этого профиля можно записать в виде ($j = 0, \pm 1, \dots$)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} v^{(j)}(x_j) e^{i\lambda x_j} \quad \text{при } y_j = 0, \quad 0 \leq x_j \leq 2 \quad (1.9)$$

Здесь координаты x, y связаны с x_j, y_j соотношениями (1.5).



Фиг. 1



Фиг. 2

§ 2. Прежде всего рассмотрим случай, когда $\text{tg } \beta \leq \sqrt{M^2 - 1}$. В этом случае фронт решетки находится в невозмущенном потоке, и поэтому достаточно рассмотреть течение газа в канале между двумя профилями. Рассмотрим течение в канале между исходным и верхним профилями (фиг. 1). В области, ограниченной справа характеристиками первого и второго семейств, функция $\Phi(x, y)$ должна удовлетворять условию

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (2.1)$$

Другим граничным условием для определения $\Phi(x, y)$ является условие непротекания на профилях (1.9).

При $0 < x_j^* < 2$ ($j = 0, 1$) имеет место аэродинамическая интерференция между профилями, которую будем определять методом, изложенным в работе [6]. Следуя этому методу, функцию $\Phi(x, y)$ ищем в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{j=0}^1 [\Phi^{(j)}(x_j, y_j) + \Psi^{(j)}(x_j, y_j)] \quad (2.2)$$

Функция $\Phi(x_j, y_j)$ определяет потенциал обтекания одиночного профиля, форма колебаний которого равна $v^{(j)}(x_j)$, функция $\Psi^{(j)}(x_j, y_j)$ определяет дополнительный потенциал скорости, учитывающий интерференцию профилей и зависящий от искомой функции $u^{(j)}(x_j)$. По определению, имеем [5]

$$\Phi^{(0)}(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{M^2-1}} \int_0^{x-y} I_0 \{ \omega [(x-\xi)^2 - y^2]^{1/2} \} v^{(0)}(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi \quad (y > 0)$$

$$\Phi^{(1)}(x_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} \int_0^{x_1+y_1} I_0 \{ \omega [(x_1-\xi)^2 - y_1^2]^{1/2} \} v^{(1)}(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi \quad (y_1 < 0)$$

Здесь I_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Функции $\Psi^{(0)}$, $\Psi^{(1)}$ определяются теми же формулами (2.3), если $v^{(0)}$ заменить на $u^{(0)}$, а $v^{(1)}$ — на $u^{(1)}$.

Искомые функции $u^{(0)}$, $u^{(1)}$ определяются системой уравнений [6]

$$e^{i\lambda x} u^{(0)}(x) + \sqrt{M^2-1} [\Phi_{y_1}^{(1)} + \Psi_{y_1}^{(1)}] = 0 \quad \text{при } y = 0, 0 \leq x \leq 2$$

$$e^{i\lambda x_1} u^{(1)}(x_1) + \sqrt{M^2-1} [\Phi_{y_1}^{(0)} + \Psi_{y_1}^{(0)}] = 0 \quad \text{при } y_1 = 0, 0 \leq x_1 \leq 2$$

Координаты x, y связаны с координатами x_1, y_1 соотношениями (1.5). Предположим, что функции $v^{(j)}(x)$ ($j=0,1$) в промежутке $0 \leq x \leq 2$ заданы рядами Фурье.

$$v^{(j)}(x) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \theta_{j\sigma} \cos \sigma \eta \quad (\eta = \arccos(1-x)) \quad (2.5)$$

Учитывая, что влияние верхнего профиля на нижний происходит при $x_0^* < x \leq 2$, а нижнего на верхний — при $x_1^* < x_1 \leq 2$, искомые функции $u^{(j)}(x)$ будем искать в виде

$$u^{(j)}(x) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \theta_{j\sigma} [\cos \sigma \eta - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_j^*] \quad \text{при } x_j^* < x \leq 2 \quad (2.6)$$

$$u^{(j)}(x) = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_j^* \quad j = 0,1$$

Здесь $\delta_{0\sigma}$ — символ Кронекера; $\eta_j^* = \arccos(1-x_j^*)$, $\eta = \arccos(1-x)$. Подставляя выражения (2.3), (2.5), (2.6) в условия непротекания (2.4), получим следующие уравнения для определения искомых коэффициентов $\theta_{j\sigma}$ ($j=0,1$; $\sigma=0,1,\dots$):

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \{ \theta_{0\sigma} e^{i\lambda x} [\cos \sigma \eta - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_0^*] + \theta_{1\sigma} f_{1\sigma}(x) + \theta_{1\sigma} f_{1\sigma}^*(x) \} = 0$$

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \{ \theta_{1\sigma} e^{i\lambda x_1} [\cos \sigma \eta_1 - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_1^*] + \theta_{0\sigma} f_{0\sigma}(x_1) + \theta_{0\sigma} f_{0\sigma}^*(x_1) \} = 0$$

Здесь

$$f_{0\sigma}(x_1) = \cos \sigma \psi_1 \exp \{ i\lambda (x_1 - x_1^*) \} - F_{0\sigma}(x_1)$$

$$F_{0\sigma}(x_1) = \frac{1}{2} y_* \omega^2 \int_0^{x_1-x_1^*} \cos \sigma \psi e^{i\lambda u} [I_0(z_1) + I_2(z_1)] du \quad (2.8)$$

$$(z_1 = \omega [(x_1 + 2\tau^{-1} \sin \beta - u)^2 - y_*^2]^{1/2})$$

$$f_{0\sigma}^*(x_1) = [\cos \sigma \psi_1 - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_1^*] \exp \{i\lambda (x_1 - x_1^*) - F_{0\sigma}^*(x_1)\}$$

$$F_{0\sigma}^*(x_1) = \frac{1}{2} y_* \omega^2 \int_{x_0^*}^{x_1 - x_1^*} e^{i\lambda u} [\cos \sigma \psi - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_1^*] [I_0(z_1) + I_2(z_1)] du \quad (2.9)$$

$$f_{1\sigma}(x) = \cos \sigma \psi_0 \exp \{i\lambda (x - x_0^*)\} - F_{1\sigma}(x)$$

$$F_{1\sigma}(x) = \frac{1}{2} y_* \omega^2 \int_0^{x - x_0^*} \cos \sigma \psi e^{i\lambda u} [I_0(z) + I_2(z)] du \quad (2.10)$$

$$(z = \omega [(x - 2\tau^{-1} \sin \beta - u)^2 - y_*^2]^{1/2})$$

$$f_{1\sigma}^*(x) = [\cos \sigma \psi_0 - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_0^*] - F_{1\sigma}^*(x)$$

$$F_{1\sigma}^*(x) = \frac{1}{2} y_* \omega^2 \int_{x_1^*}^{x - x_0^*} e^{i\lambda u} [\cos \sigma \psi - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_0^*] [I_0(z) + I_2(z)] du \quad (2.11)$$

$$\eta_j = \arccos(1 - x_j), \quad \eta_j^* = \arccos(1 - x_j^*), \quad \psi_j = \arccos(1 - x_j + x_j^*)$$

$$y_* = 2\tau^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \cos \beta, \quad \psi = \arccos(1 - u) \quad (j = 0, 1) \quad (2.12)$$

Кроме того, функции $f_{j\sigma}(x)$, $f_{j\sigma}^*(x)$ ($j = 0, 1$) подчиняются условию $f_{0\sigma}(x) = 0$ при $0 \leq x \leq x_1^*$, $f_{1\sigma}(x) = 0$ при $0 \leq x \leq x_0^*$

$$f_{0\sigma}(x) = f_{1\sigma}^*(x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_0^* + x_1^* \quad (2.13)$$

Решение уравнений (2.7) находим методом коллокаций. Для этого ограничимся в разложениях (2.5), (2.6) конечным числом n слагаемых. Тогда уравнения (2.7) будут содержать $2n$ неизвестных коэффициентов $\Phi_{j\sigma}$ ($j = 0, 1$; $\sigma = 0, 1, \dots, n - 1$).

Выберем n точек на исходном профиле в промежутке $(x_0^*, 2)$ и n точек на верхнем профиле в промежутке $(x_1^*, 2)$, распределив их, например, равномерно на этих отрезках. Потребуем выполнения уравнений (2.7) в выбранных точках. Тогда придем к системе $2n$ линейных алгебраических уравнений для определения $2n$ искомого коэффициентов $\Phi_{j\sigma}$ ($j = 0, 1$; $\delta = 0, 1, \dots, n - 1$).

Подставляя найденные значения этих коэффициентов в выражения (2.2), (2.3), получим потенциал скорости для течения газа между исходным и верхним профилями. Если профили решетки колеблются с постоянным сдвигом фаз ψ , то полученное выражение для потенциала скорости, умноженное на $\exp(ij\psi)$, дает решение задачи для любого другого канала, у которого роль исходного играет j -й профиль решетки.

Давление потока на поверхность профиля определяется уравнением Коши-Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_0 V^2 (\Phi_x - i\alpha \Phi) e^{i(ivt - \lambda x)} \quad (\alpha = \lambda - k) \quad (2.14)$$

где p_0 , ρ_0 — давление и плотность невозмущенного потока. Перепад давления, действующего сверху и снизу в точке x исходного профиля

$$\Delta p(x, t) = p(x, +0, t) - p(x, -0, t) =$$

$$= -\rho_0 V^2 e^{i(vt - \lambda x)} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha \right) [\Phi(x, +0) - \Phi(x, -0)] \quad (2.15)$$

где

$$\Phi(x, +0) = \Phi^{(0)}(x, +0) + \Psi^{(0)}(x, +0) + \Phi^{(1)}(x_1, y_1) + \Psi^{(1)}(x_1, y_1)$$

$$(x_1 = x - 2\tau^{-1} \sin \beta, \quad y_1 = -2\tau^{-1} \cos \beta \sqrt{M^2 - 1}) \quad (2.16)$$

$$\Phi(x, -0) = -\Phi^{(0)}(x, +0) - \Psi^{(0)}(x, +0) +$$

$$+ e^{-i\psi} [\Phi^{(0)}(x_{-1}, y_{-1}) + \Psi^{(0)}(x_1, y_1)] \quad (2.17)$$

$$(x_{-1} = x + 2\tau^{-1} \sin \beta, \quad y_{-1} = 2\tau^{-1} \cos \beta \sqrt{M^2 - 1})$$

Здесь функции $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$ и $\Psi^{(0)}$, $\Psi^{(1)}$ определяются формулами (2.3), (2.5), (2.6), в которых $v^{(1)} = v^{(0)}e^{i\psi}$.

Аэродинамическая сила и момент, действующие на исходный профиль, определяются выражениями

$$P = 1/2 \rho_0 V^2 b C_y, \quad M = 1/2 \rho_0 V^2 b^2 C_m$$

$$P = -c \int_0^2 \Delta p(x, t) dx, \quad M = c^2 \int_0^2 (x-1) \Delta p(x, t) dx$$

Аэродинамический момент определен здесь относительно середины профиля.

3. Перейдем к рассмотрению случая, когда $\operatorname{tg} \beta > \sqrt{M^2 - 1}$. Теперь характеристики первого семейства, отходящие от передних кромок профилей, не пересекают другие профили, и фронт решетки находится в возмущенном потоке (фиг. 2). Это обстоятельство приводит к тому, что определенные участки контура исходного профиля оказываются в области влияния как верхнего профиля ($j = 1$), так и всех профилей, расположенных ниже исходного ($j = -1, -2, \dots$).

Обозначим через $(a, b; \pm 0; j)$ участок контура j -го профиля, координаты которого в системе координат x_j, y_j , связанной с этим профилем, меняются в пределах $a \leq x_j \leq b; y_j = \pm 0$. Значение $y_j = 0$ соответствует верхнему берегу разреза $0 \leq x_j \leq 2$, а $y_j = -0$ — нижнему.

Тогда в этих обозначениях отрезок $(0, x_0^*; +0; 0)$ находится в области влияния отрезков $(0, -x_1^*; +0; j)$, где $j = -1, -2, \dots$; отрезок $(x_0^*, 2; +0, 0)$ — в области влияния тех же отрезков, и, кроме того, в области влияния отрезка $(0, 2-x_0^*; -0; 1)$. Отрезок $(0.2; -0; 0)$ будет находиться в области влияния отрезков $(0, -x_1^*; +0; j)$, а отрезок $(2 + x_1^*; 2; -0; 0)$ лежит дополнительно в области влияния отрезков $2 + (j+1)x_1^* \leq x_j \leq 2 + jx_j^*$ вихревых следов, сходящихся с j -го профиля ($j = -1, -2, \dots$). Отметим, что величины x_0^*, x_1^* определяются формулами (1.6) и в рассматриваемом случае $x_0^* > 0, x_1^* < 0$.

Таким образом, решение для потенциала скорости обтекания решетки в точках исходного профиля представляется бесконечной суммой решений, каждое из которых определяет влияние одного из указанных отрезков. Причем суммарное влияние всех профилей решетки должно быть таким, чтобы на исходном профиле выполнялось условие непротекания (1.9). Решение поставленной задачи снова ищем методом работы [6]. А именно:

$$\Phi(x, y) = \sum_{j=-\infty}^1 [\Phi^{(j)}(x_j, y_j) + \Psi^{(j)}(x_j, y_j)] \quad (3.1)$$

Здесь функции $\Phi^{(j)}(x_j, y_j)$ определяют потенциал скорости обтекания j -го одиночного профиля в системе координат x_j, y_j с заданной формой колебаний $v^{(j)}(x_j) = v^{(0)}(x_j) \exp(i_j \psi)$; $\Psi^{(j)}(x_j, y_j)$ — дополнительные потенциалы скорости, учитывающие интерференцию профилей в решетке. Координаты x, y связаны с x_j, y_j соотношениями (1.5). По определению [5],

$$\Phi^{(j)}(x_j, y_j) = -\frac{\operatorname{sign}(y_j)}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^{x_j - |y_j|} v(\xi) e^{i\lambda \xi} I_0 \{ \omega [(x_j - \xi)^2 - y_j^2]^{1/2} \} d\xi$$

$$\Phi^{(j)}(x_j, y_j) = -\Phi^{(j)}(x_j, -y_j) \quad (3.2)$$

В точках профиля ($0 \leq x \leq 2$) функция $v(x) = v^{(j)}(x)$, а в точках вихревого следа ($2 < x < \infty$)

$$v(x) = e^{-i\lambda x} \left[\frac{dg}{dx} + \omega \int_0^x g(\xi) I_1 \{ \omega(x - \xi) \} \frac{d\xi}{x - \xi} \right] \quad (3.3)$$

$$g(x) = e^{i\alpha x} \int_0^2 v^{(j)}(\xi) e^{i\lambda \xi} I_0 \{ \omega(2 - \xi) \} d\xi - \int_0^2 v^{(j)}(\xi) e^{i\lambda \xi} I_0 \{ \omega(x - \xi) \} d\xi \quad (3.4)$$

Предположим, что

$$v^{(0)}(x) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \theta_{\sigma} \cos \sigma \eta \quad (\eta = \arccos(1 - x) \quad 0 \leq x \leq 2) \quad (3.5)$$

Тогда $v(x)$ можно представить в виде

$$v(x) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \theta_{\sigma} \gamma_{\sigma}(x) \quad (3.6)$$

$$\gamma_{\sigma}(x) = \cos \sigma \eta \quad (\eta = \arccos(1 - x)) \quad (0 \leq x \leq 2) \quad (3.7)$$

$$\gamma_{\sigma}'(x) = e^{-i\lambda x} \left[\frac{d g_{\sigma}}{dx} + \omega \int_0^x g_{\sigma}(\xi) I_1 \{ \omega(x - \xi) \} \frac{d\xi}{x - \xi} \right] \quad (2 < x < \infty) \quad (3.8)$$

$$g_{\sigma}(x) = e^{i\alpha x} \int_0^2 \cos \sigma \psi e^{i\lambda \xi} I_0 \{ \omega(2 - \xi) \} d\xi - \int_0^2 \cos \sigma \psi e^{i\lambda \xi} I_0 \{ \omega(x - \xi) \} d\xi$$

$$(\psi = \arccos(1 - \xi)) \quad (3.9)$$

Выражение (3.2) для функции $\Phi^{(j)}(x_j, y_j)$ сводится к

$$\Phi^{(j)}(x_j, y_j) = \frac{e^{ij\psi}}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \theta_{\sigma} \Phi_{\sigma}^{(j)}(x_j, y_j) \quad (3.10)$$

$$\Phi_{\sigma}^{(j)}(x_j, y_j) = -\text{sign}(y_j) \int_0^{x_j - |y_j|} \gamma_{\sigma}(\xi) e^{i\lambda \xi} I_0 \{ \omega [(x_j - \xi)^2 - y_j^2]^{1/2} \} d\xi \quad (3.11)$$

При нахождении функции $\Psi^{(j)}$ следует учесть неравномерность аэродинамической интерференции на верхнюю и нижнюю поверхности исходного профиля. Введем функции $u_0^{(j)}(x)$, $u_1^{(j)}(x)$, определение которых позволит учесть аэродинамическую интерференцию профилей решетки. Индекс 0 относится к нижней, а 1 — к верхней поверхности j -го профиля. В рассматриваемом случае колебаний профилей решетки с постоянным сдвигом фазы ψ

$$u_p^{(j)}(x) = u_p^{(0)}(x) e^{ij\psi} \quad (p = 0, 1; 0 \leq x \leq 2) \quad (3.12)$$

Предположим, что

$$u_p^{(0)}(x) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \vartheta_{p\sigma} \cos \sigma \eta \quad (\eta = \arccos(1 - x); p = 0, 1) \quad (3.13)$$

Тогда [5]

$$\Psi^{(j)}(x_j, y_j) = \frac{e^{ij\psi}}{2\sqrt{M^2 - 1}} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \{ (\vartheta_{0\sigma} + \vartheta_{1\sigma}) \Phi_{\sigma}^{(j)}(x_j, y_j) + (\vartheta_{1\sigma} - \vartheta_{0\sigma}) \chi_{\sigma}^{(j)}(x_j, y_j) \} \quad (3.14)$$

Здесь функция $\chi_\sigma^{(j)}(x_j, y_j)$ определена формулой (3.11), в которой следует положить $\gamma_\sigma(\xi) = 0$, если $\xi > 2$. Кроме того, имеет место условие

$$\chi_\sigma^{(j)}(x_j, y_j) = \chi_\sigma^{(j)}(x_j, -y_j) \quad (3.15)$$

Запишем теперь, используя выражение (3.1) — (3.15), условие непротекания жидкости через профили решетки. Так как все профили колеблются по одному закону с постоянным сдвигом фазы ψ , то условие (1.9) достаточно выполнить только для одного профиля решетки. Для исходного профиля условие непротекания (1.9), с учетом областей влияния для каждой точки контура, можно записать в виде

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \left\{ \vartheta_{0\sigma} e^{i\lambda x} \cos \sigma \eta + \sum_{j=-\infty}^{-1} e^{ij\psi} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left\{ \theta_\sigma + \frac{1}{2} (\vartheta_{0\sigma} + \vartheta_{1\sigma}) \right\} \Phi_\sigma^{(j)}(x_j, y_j) + \frac{1}{2} (\vartheta_{1\sigma} - \vartheta_{0\sigma}) \chi_\sigma^{(j)}(x_j, y_j) \right] \right\} = 0 \quad (y = -0, 0 \leq x \leq 2) \quad (3.16)$$

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \left\{ \vartheta_{1\sigma} e^{i\lambda x} \cos \sigma \eta + (\theta_\sigma + \vartheta_{0\sigma}) e^{i\psi} \frac{\partial}{\partial y} \Phi_\sigma^{(1)}(x_1, y_1) + \sum_{j=-\infty}^{-1} e^{ij\psi} (\theta_\sigma + \vartheta_{1\sigma}) \frac{\partial}{\partial y} \Phi_\sigma^{(j)}(x_j, y_j) \right\} = 0 \quad (y = +0, 0 \leq x \leq 2) \quad (3.17)$$

Здесь $\eta = \arccos(1-x)$. Координаты x_j, y_j связаны с координатой x соотношением (1.5) при $y=0$. Функции $\Phi_\sigma^{(j)}$ определяются равенствами

$$\Phi_\sigma^{(1)}(x_1, y_1) = \int_0^{x-x_0^*} \cos \sigma \psi e^{i\lambda \xi} I_0 \left\{ \omega \left[(x - 2\tau^{-1} \sin \beta - \xi)^2 - y_1^2 \right]^{1/2} \right\} d\xi \quad (3.18)$$

$$(\psi = \arccos(1-\xi), \quad x_0^* \leq x \leq 2, \quad y_1 = -2\tau^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \cos \beta)$$

$$\Phi_\sigma^{(j)}(x_j, y_j) = - \int_0^{x+jx_1^*} \gamma_\sigma(\xi) e^{i\lambda \xi} I_0 \left\{ \omega \left[(x - 2j\tau^{-1} \sin \beta - \xi)^2 - y_j^2 \right]^{1/2} \right\} d\xi$$

$$(y_j = -2j\tau^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \cos \beta, \quad j = -1, -2, \dots) \quad (3.19)$$

Функция $\gamma_\sigma(\xi)$, входящая в выражение (3.19), при $0 \leq \xi \leq 2$ определяется формулой (3.7), а при $\xi > 2$ — формулой (3.8). При этом следует дополнительно учитывать, что $\gamma_\sigma(\xi) = 0$ при $y = -0$ в промежутке $-x_1^* < \xi < 2 + (1+j)x_1^*$, если $j \leq -2$, а $\gamma_\sigma(\xi) = 0$ при $y = +0$ для $\xi > -x_1^*$.

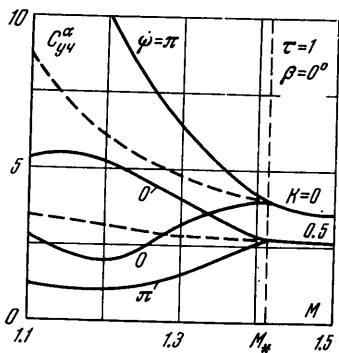
Функция $\chi_\sigma^{(j)}$ определяется так же, как и $\Phi_\sigma^{(j)}$, но с дополнительным условием $\gamma_\sigma(\xi) = 0$ при $\xi > 2$.

Следует отметить, что при $|j| \gg 1$ члены суммы по j в выражениях (3.16), (3.17) имеют порядок $C/|j|^{3/2}$, где C — постоянная, не зависящая от j . Это обеспечивает сходимость рядов и позволяет при практических расчетах бесконечную сумму с заданной степенью точности заменять конечным числом слагаемых.

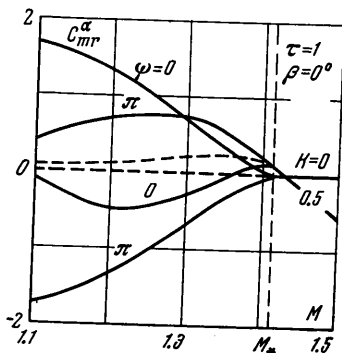
Ограничиваясь, далее, в разложениях (3.5), (3.13) конечным числом n слагаемых и требуя выполнения условий (3.16), (3.17) в n точках исходного профиля, получим систему линейных алгебраических уравнений $2n$ порядка для определения $2n$ неизвестных коэффициентов $\vartheta_{p\sigma}^{(0)}$ ($p = 0, 1; \sigma = 0, 1, \dots, n-1$). Решение этой системы можно получить с любой степенью точности, учитывая, конечно, возможности ЭВМ, путем

увеличения числа слагаемых в суммах по j в (3.16), (3.17) и в конечных суммах рядов Фурье (3.5), (3.13). Подставляя найденные значения коэффициентов $\phi_{ps}^{(0)}$ в (3.1), (3.10), (3.14), получим решение задачи для потенциала скорости обтекания решетки пластин. Аэродинамические силы и моменты, действующие на профили, определяются при помощи уравнения (2.14).

§ 4. В качестве примера на ЭВМ был проведен расчет аэродинамических сил и моментов, действующих на профили решетки без выноса, совершающих крутильные колебания относительно середины профиля со сдвигом фазы $\psi = 0; \pi$. Этот пример интересен тем, что позволяет выяснить влияние плоских границ потока на нестационарные

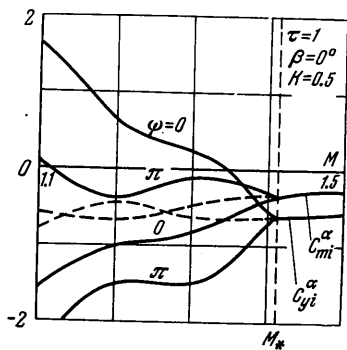


Фиг. 3

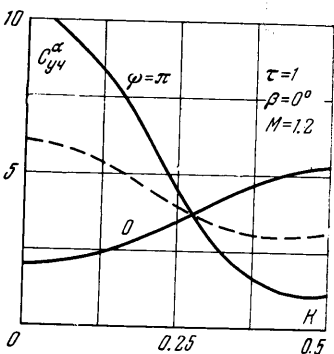


Фиг. 4

аэродинамические характеристики тонкого слабоизогнутого профиля, расположенного симметрично относительно границ. Случай $\psi = 0$ соответствует колебаниям такого профиля в свободной струе, а $\psi = \pi$ — в аэродинамической трубе с твердыми стенками. Следует отметить, что аэродинамическая интерференция между профилем и границами потока возникает только при $M < M_* = \sqrt{1 + \tau^2}$. Это накладывает ограничения на выбор практически интересных значений числа Маха и ширины потока $H = 2c\tau^{-1}$.



Фиг. 5



Фиг. 6

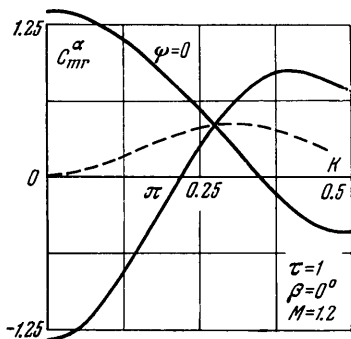
Безразмерные аэродинамические коэффициенты C_y^α и C_m^α определяются в виде

$$C_y = C_y^\alpha \alpha, \quad C_m = C_m^\alpha \alpha; \quad C_y^\alpha = C_{yr}^\alpha + i C_{yi}^\alpha, \quad C_m^\alpha = C_{mr}^\alpha + i C_{mi}^\alpha \quad (4.1)$$

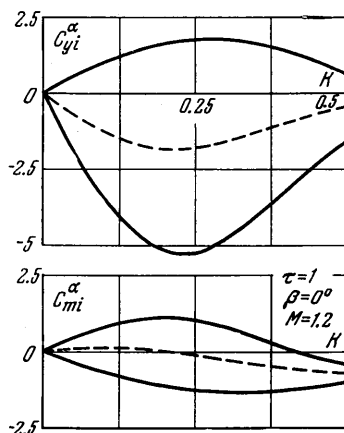
где α — угол поворота профиля около оси вращения, а C_y, C_m определяются формулой (2.18). Результаты расчета коэффициентов C_y^α, C_m^α даны на фиг. 3—8. Уравнения (2.7) выполнялись в семи точках.

На фиг. 3—5 показана зависимость коэффициентов C_y^α, C_m^α от числа Маха M при двух значениях числа Струхала $k = 0; 0.5$ и сдвига фазы $\psi = 0; \pi$ для решетки с густотой $\tau = 1$. Расчетные точки: $M = 1.1-1.5$ ($\Delta M = 0.1$). Пунктиром здесь и на фиг. 6—8 даны соответствующие результаты для одиночного профиля [5]. Результаты расчета при $k = 0$ (случай стационарного обтекания решетки) совпадают с данными работ

[1-3]. На фиг. 6—8 представлена зависимость коэффициентов $C_{y_i}^\alpha$, $C_{m_i}^\alpha$ от числа Струаля k при $M = 1.2$ для решетки с густотой $\tau = 1$. Расчетные точки: $k = 0, 0.05, 0.1—0.5$ ($\Delta k = 0.1$). Результаты, представленные на фиг. 3—8, показывают весьма существенное влияние границ потока на нестационарные аэродинамические характеристики профиля, причем характер этого влияния зависит как от вида границ потока, так и от частоты колебаний профиля.



Фиг. 7



Фиг. 8

На фиг. 8 верхняя сплошная кривая дает распределение $C_{y_i}^\alpha$ для $\psi = 0$, а нижняя — для $\psi = \pi$; наоборот во второй половине фигуры верхняя сплошная кривая дает распределение $C_{m_i}^\alpha$ для $\psi = \pi$.

Представляет интерес выяснить возможность автоколебаний профиля с одной степенью свободы в ограниченном потоке. Известно, что в безграничном сверхзвуковом потоке при некоторых значениях числа Маха и положениях оси вращения такие автоколебания возможны. Так, в работе [7] на фиг. 9—22 указана соответствующая область автоколебаний профиля для достаточно низких частот крутильных колебаний. Проведенные расчеты показали, что для профиля, колеблющегося в потоке, ограниченном твердыми стенками, область автоколебаний практически не зависит от границ потока. Однако при колебаниях профиля в свободной струе автоколебания исчезают, как только число Маха становится меньше того значения M_* , при котором имеет место аэродинамическая интерференция между границами потока и профилем.

Поступило 20.1.66 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miles J. W. The compressible flow past oscillating airfoil in a wind tunnel. JAS, 1956, No 7.
2. Drake D. G. The motion of an oscillating aerofoil in a compressible free jet. J. R. Aero. Soc., 1956, vol. 60.
3. Drake D. G. The oscillating two-dimensional aerofoil between porous walls. Aeronaut. Quart., 1957, No 3.
4. Lane F. Supersonic flow past an oscillating cascade with supersonic leading-edge locus. JAS, 1957, No 1.
5. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. Гостехиздат, 1952.
6. Горелов Д. Н. О расчете аэродинамической интерференции системы тел в идеальной жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
7. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфман Р. Л. Аэроупругость, ИЛ, 1958.