

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА В ОБЛАСТЯХ С БОЛЬШИМИ ЛОКАЛЬНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В. Я. НЕЙЛАНД, В. В. СЫЧЕВ

(Москва)

Существует много задач динамики вязких течений жидкостей и газов при больших числах Рейнольдса, для решения которых не может быть использована классическая теория пограничного слоя. Сюда относятся, в частности, все задачи с различного рода локальными особенностями в потоке — течения в окрестности угловых точек, в области взаимодействия пограничного слоя с падающим скачком уплотнения, течения вблизи точек отрыва или присоединения потока и т. п. Целью настоящей работы является попытка теоретического исследования задач такого типа на основе общего анализа асимптотического поведения решений уравнений Навье — Стокса. С этой целью применяется известный метод построения и сращивания совокупности асимптотических разложений, представляющих решения в различных характерных областях потока при неограниченно убывающей вязкости [1].

В качестве примера в работе подробно рассмотрена задача о вязком сверхзвуковом течении около стенки с большой локальной кривизной поверхности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим некоторые общие свойства асимптотических решений уравнений Навье — Стокса при стремлении характерного числа Рейнольдса задачи к бесконечности. Будем считать для определенности, что имеем дело с задачей внешнего обтекания какого-либо тела с характерным линейным размером l_0 . Определяя число Рейнольдса как

$$R = \rho_0 u_0 l_0 / \mu_0$$

(где ρ_0 , u_0 , μ_0 — характерные значения плотности, скорости и коэффициента вязкости), нетрудно установить, что при $R \rightarrow \infty$ в большей части потока влияние вязкости исчезает и уравнения Навье — Стокса переходят в уравнения Эйлера. Вблизи поверхности тела в пределе образуется поверхность контактного разрыва, благодаря чему выполняется условие прилипания газа к его поверхности. При некоторых условиях эта поверхность может отрываться от поверхности тела и сноситься вниз по потоку до бесконечности. Если вдоль такой поверхности продольные градиенты параметров течения достаточно малы, то, как известно, ее структура описывается в первом приближении уравнениями типа уравнений пограничного слоя.

Предположим теперь, что это основное положение теории пограничного слоя (малость продольных градиентов) выполняется всюду, кроме области, длина которой по порядку величины равна толщине пограничного слоя. Пусть на этой длине искомые функции течения (например, давление, тангенциальная компонента скорости и т. п.) меняются на конечную величину, т. е. на величину, остающуюся всегда по порядку равной характерному значению соответствующей функции в рассматриваемом потоке. В пределе (при $R \rightarrow \infty$) длина такой области будет стремиться к нулю, а функция станет претерпевать разрыв при переходе через некоторую точку вдоль рассматриваемой контактной поверхности.

Выберем криволинейную систему координат (s, n) , начало которой расположено на контактной поверхности в той ее точке, где в пределе $R \rightarrow \infty$ локализуется продольный разрыв параметров. Пусть s отсчитывается вдоль контактной поверхности (например, вдоль поверхности тела),

а n — по нормали к ней (фиг. 1). В качестве характерного размера примем расстояние вдоль l_0 от начала контактной поверхности до начала координат. В качестве основного параметра малости примем величину, обычную для теории пограничного слоя

$$\varepsilon = R^{-1/2} \quad (1.1)$$

Уравнения Навье — Стокса для двумерного течения могут быть записаны в следующей форме:

$$[\rho u]_s + [(1 + kn)\rho v]_n = 0 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon^{-2} \left[\rho \left(\frac{uu_s}{1+kn} + vv_n + \frac{k}{1+kn} uv \right) + \frac{p_s}{1+kn} \right] = \left[\mu \left(u_n + \frac{v_s - ku}{1+kn} \right) \right]_n + \quad (1.3)$$

$$+ \frac{2}{1+kn} \left[\mu \left(\frac{u_s + kv}{1+kn} \right) \right]_s + \mu \frac{2k}{1+kn} \left(u_n + \frac{v_s - ku}{1+kn} \right) + \frac{1}{1+kn} \left[\lambda \left(\frac{u_s + kv}{1+kn} + v_n \right) \right]_s$$

$$\varepsilon^{-2} \left[\rho \left(\frac{uv_s}{1+kn} + vv_n - \frac{k}{1+kn} u^2 \right) + p_n \right] = 2 \left(\mu v_n \right)_n + \frac{1}{1+kn} \times \quad (1.4)$$

$$\times \left[\mu \left(u_n + \frac{v_s - ku}{1+kn} \right) \right]_s + 2\mu \frac{k}{1+kn} \left(v_n - \frac{u_s + kv}{1+kn} \right) + \left[\lambda \left(\frac{u_s + kv}{1+kn} + v_n \right) \right]_n$$

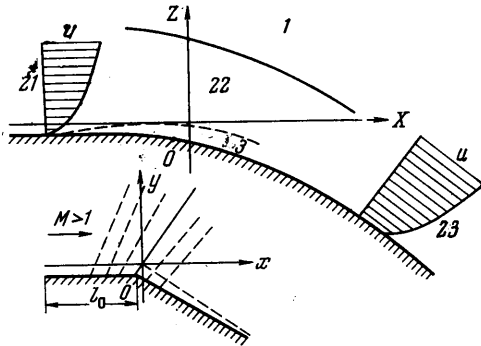
$$\varepsilon^{-2} \left[\rho \left(\frac{uh_s}{1+kn} + v h_n \right) - \left(\frac{u p_s}{1+kn} + v p_n \right) \right] = \frac{1}{1+kn} \left[\frac{\mu h_s}{\sigma(1+kn)} \right]_s + \quad (1.5)$$

$$+ \left[\frac{\mu}{\sigma} h_n \right]_n + \frac{k}{1+kn} \frac{\mu}{\sigma} h_n + \Phi$$

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{u_s + kv}{1+kn} \right)^2 + 2v_n^2 + \left(u_n + \frac{v_s - ku}{1+kn} \right)^2 \right] + \lambda \left[\frac{u_s + kv}{1+kn} + v_n \right]^2 \quad (1.6)$$

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h$$

Здесь u и v — тангенциальная и нормальная компоненты скорости; p , ρ , h , μ , λ , σ — давление, плотность, удельная энтальпия, первый и второй динамические коэффициенты вязкости и число Прандтля газа; k — кривизна поверхности $n = 0$.



Фиг. 1

Все переменные в уравнениях (1.2) — (1.5) являются безразмерными. При образовании безразмерных величин используются характерные значения ρ_0 , u_0 , l_0 , μ_0 , комбинация которых образует число R . Заметим, что поверхность $n = 0$ может лишь частично совпадать с поверхностью тела¹.

Так, например, если в точке O поверхность тела обрывается (это соответствует отрыву потока от поверхности тела), то следует ввести в рассмотрение и всю область течения $n < 0$ ($s > 0$). Нашей целью, как уже говорилось, будет построение совокупности асимптотических разложений, представляющих решение уравнений (1.2) — (1.5) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и удовлетворяющих необходимым граничным условиям.

¹ На фиг. 1 изображен частный случай течения около поверхности тела.

2. Асимптотические разложения. Начнем с рассмотрения внешнего асимптотического разложения, которое как обычно, ищем в виде ¹:

$$\zeta(\varepsilon; s, n) \sim \zeta_1^1(s, n) + \dots, \quad \zeta = u, v, p, \rho, h \quad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем будут получены результаты только для первых главных членов разложений. Для первых членов (2.1) подстановка в (1.2) — (1.6) приводит к уравнениям Эйлера

$$\begin{aligned} \rho_1^1 \left(\frac{u_1^1 u_{1s}^1}{1+kn} + v_1^1 u_{1n}^1 + \frac{k}{1+kn} u_1^1 v_1^1 \right) + \frac{p_{1s}^1}{1+kn} &= 0 \\ \rho_1^1 \left(\frac{u_1^1 v_{1s}^1}{1+kn} + v_1^1 v_{1n}^1 - \frac{k}{1+kn} (u_1^1)^2 \right) + p_{1n}^1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$(\rho_1^1 u_1^1)_s + [(1+kn)\rho_1^1 v_1^1]_n = 0$$

$$\rho_1^1 u_1^1 \left[h_1^1 + \frac{(u_1^1)^2 + (v_1^1)^2}{2} \right]_s + \rho_1^1 v_1^1 \left[h_1^1 + \frac{(v_1^1)^2 + (u_1^1)^2}{2} \right]_n = 0$$

Им соответствуют обычные граничные условия задачи о невязком потоке, включая условия совместности на ударных волнах и контактных разрывах. Таким образом, на поверхности тела граничными условиями будет равенство нулю нормальной составляющей вектора скорости.

Для того чтобы удовлетворить условию прилипания потока к поверхности тела или более общим условиям существования разрыва тангенциальной компоненты скорости, необходимо рассмотреть внутреннюю структуру течения в этих областях. С этой целью вводятся внутренние асимптотические разложения в виде

$$\begin{aligned} \zeta(\varepsilon; s, n) &\sim \zeta_{2i}^1(s, N) + \dots, \quad \zeta = u, p, \rho h \\ v(\varepsilon; s, n) &\sim \varepsilon v_{2i}^1(s, N) + \dots \quad (i=1,3) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь независимая переменная $N = n/\varepsilon$ будет величиной порядка единицы. Первые члены этих разложений удовлетворяют обычным уравнениям пограничного слоя

$$(\rho_{2i}^1 u_{2i}^1)_s + (\rho_{2i}^1 v_{2i}^1)_N = 0, \quad p_{2iN}^1 = 0 \quad (2.4)$$

$$\rho_{2i}^1 u_{2i}^1 u_{2is}^1 + \rho_{2i}^1 v_{2i}^1 u_{2iN}^1 = -p_{2is}^1 + (\mu_{2i}^1 u_{2iN}^1)_N$$

$$\rho_{2i}^1 u_{2i}^1 H_{2is}^1 + \rho_{2i}^1 v_{2i}^1 H_{2iN}^1 = \left(\frac{\mu}{\sigma} H_{2iN}^1 \right)_N + \left[\mu \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{(u_{2iN}^1)^2}{2} \right]_N$$

В соответствии со сделанными ранее предположениями, уравнения (2.4) описывают течение вблизи поверхности $n = 0$ всюду, за исключением окрестности точки O с продольным размером порядка ε . Это связано с основным допущением настоящей работы, согласно которому функции течения меняются здесь на величину $O(1)$. Производные $\partial/\partial s$ в окрестности точки O должны иметь следующий порядок величины:

$$\partial/\partial s = O(1/\varepsilon) \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что в окрестности точки O независимыми переменными порядка единицы будут

$$S = s/\varepsilon, \quad N = n/\varepsilon \quad (2.6)$$

¹ Здесь и в дальнейшем верхний индекс соответствует номеру приближения, а нижний — номеру области, в которой строится асимптотическое разложение (согласно фиг. 1).

а соответствующие асимптотические разложения имеют следующий вид:

$$\zeta(\varepsilon; s, n) \sim \zeta_{22}^1(S, N) + \dots, \quad \zeta = u, v, p, \rho, h \quad (2.7)$$

При подстановке (2.7) в уравнения (1.2) — (1.6) для первых членов разложений вновь получаются уравнения течения невязкого газа

$$\rho_{22}^1 \left(\frac{u_{22}^1 u_{22}^1}{1 + KN} + v_{22}^1 u_{22}^1 + \frac{K}{1 + KN} u_{22}^1 v_{22}^1 \right) + \frac{P_{22}^1 S}{1 + KN} = 0 \quad K = \varepsilon k(s)$$

$$\rho_{22}^1 \left(\frac{u_{22}^1 v_{22}^1}{1 + KN} + v_{22}^1 v_{22}^1 - \frac{K}{1 + KN} (u_{22}^1)^2 \right) + p_{22}^1 = 0 \quad (2.8)$$

$$(\rho_{22}^1 u_{22}^1)_S + [(1 + KN) \rho_{22}^1 v_{22}^1]_N = 0$$

$$u_{22}^1 \left[h_{22}^1 + \frac{(u_{22}^1)^2 + (v_{22}^1)^2}{2} \right]_S + v_{22}^1 \left[h_{22}^1 + \frac{(u_{22}^1)^2 + (v_{22}^1)^2}{2} \right]_N = 0$$

Решение системы этих уравнений, очевидно, не может удовлетворять условию прилипания. Следовательно, вблизи поверхности тела в окрестности точки O должна существовать область течения, в которой, как в пограничном слое, роль вязкости является определяющей.

Продольный размер области вязкого подслоя имеет порядок $O(\varepsilon)$. Следовательно, в качестве продольной следует использовать координату $S = s/\varepsilon$. Поперечную координату Y следует определить так, чтобы в получающихся уравнениях главные вязкие члены были порядка инерционных. На внешней границе вязкого подслоя искомые функции, определяемые решением системы (2.8), являются величинами порядка единицы. Поэтому нетрудно установить, что

$$Y = n/\varepsilon^{3/2} \quad (2.9)$$

Тогда соответствующее асимптотическое разложение имеет вид:

$$\zeta(\varepsilon; s, n) \sim \zeta_3^1(S, Y) + \dots, \quad \zeta = u, p, \rho, h \quad (2.10)$$

$$v(\varepsilon; s, n) \sim \varepsilon^{1/2} v_3^1(S, Y) + \dots \quad (2.11)$$

После подстановки этих разложений в исходные уравнения (1.2) — (1.6) для главных членов получаются уравнения пограничного слоя. (Эта система уравнений получается из уравнений (2.4), если дифференцирование по N заменить на дифференцирование по Y , а нижний индекс $2i$ заменить индексом 3 .)

Таким образом, теперь получены дифференциальные уравнения для первых членов асимптотических разложений во всех областях течения. Дальнейшая задача состоит в установлении граничных условий путем сращения этих разложений.

3. Условия сращения. Как уже говорилось, в области I внешнего невязкого потока, описываемого уравнениями (2.2), должны выполняться условия в набегающем потоке, а также условия равенства нулю нормальной компоненты скорости на поверхности тела. Если имеются поверхности контактных разрывов, оторвавшиеся от поверхности тела, то на них, как обычно для невязких течений, получаются условия равенства давлений и нормальных компонент скорости по обе стороны поверхности разрыва. Решения тех уравнений, которые описывают течения в областях, непосредственно примыкающих к поверхности тела, должны удовлетворять условию прилипания газа к поверхности тела

$$u_{2i}^1(S, 0) = v_{2i}^1(S, 0) = 0, \quad u_3^1(S, 0) = v_3^1(S, 0) = 0 \quad (3.1)$$

а также условиям для уравнения энергии, которые могут иметь, например, следующий вид (если задана температура стенки):

$$h_{2i}^1(S, 0) = \varphi_{2i}^1(S), \quad h_3^1(S, 0) = \varphi_3^1(S) \quad (3.2)$$

Получение недостающих краевых условий требует проведения сращивания асимптотических разложений.

Простейшая форма принципа сращивания двух асимптотических разложений состоит, как известно, в том, что предел первого разложения, записанного в независимых переменных второго, должен совпадать с пределом второго асимптотического разложения, записанного в независимых переменных первого, при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированных значениях этих независимых переменных.

Этот принцип сращивания асимптотических разложений применим в тех случаях, когда имеется частичное перекрытие областей, где они справедливы [1]; в рассматриваемой задаче это имеет место для всех областей.

Внешние краевые условия для уравнений (2.4), относящихся к области $2I$ и 23 , получаются в форме

$$\begin{aligned} u_{2i}^1(s, N) &\rightarrow u_1^1(s, 0), & \rho_{2i}^1(s, N) &\rightarrow \rho_1^1(s, 0) & \text{при } N \rightarrow \infty \\ p_{2i}^1(s, N) &\rightarrow p_1^1(s, 0), & h_{2i}^1(s, N) &\rightarrow h_1^1(s, 0) & (i = 1, 3) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Начальные условия для области 23 имеют следующий вид:

$$u_{23}^1(0, N) = \lim_{S \rightarrow \infty} u_{22}^1(S, N) \quad h_{23}^1(0, N) = \lim_{S \rightarrow \infty} h_{23}^1(S, N) \quad (3.4)$$

Для решения уравнений пограничного слоя, описывающих течение в области вязкого подслоя 3 , получаются следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} u_3^1(S, Y) &\rightarrow u_{22}^1(S, 0), & p_3^1(S, Y) &\rightarrow p_{22}^1(S, 0), & h_3^1(S, Y) &\rightarrow h_{22}^1(S, 0) \\ & & & & & \text{при } Y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение уравнений (2.8), описывающих невязкое течение в области 22 , должно удовлетворять условиям сращивания с «набегающим потоком» $2I$, которые имеют вид

$$u_{22}^1(S, N) \rightarrow u_{21}^1(0, N), \quad h_{22}^1(S, N) \rightarrow h_{21}^1(0, N) \quad \text{при } S \rightarrow -\infty \quad (3.6)$$

а также условию обтекания поверхности тела

$$v_{22}^1(S, 0) = 0 \quad (3.7)$$

Граничные условия при $N \rightarrow \infty$ для этой области получаются путем сращивания разложений (2.7) с разложениями (2.1), полученными для внешнего невязкого потока в области I . Они для всех функций имеют вид

$$v_{22}^1(S, N) \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_1^1(\varepsilon S, \varepsilon N) \quad (3.8)$$

Следует заметить, что в масштабах области I область 22 является точкой разрыва переменных. Поэтому значение предела $\lim_{n \rightarrow 0, s \rightarrow 0} v_1^1(n, s)$ при $n \rightarrow 0, s \rightarrow 0$ зависит от того, как именно совершаются предельные переходы $n \rightarrow 0, s \rightarrow 0$. Если они совершаются так, что отношение s/n стремится к некоторой постоянной величине, то в области 22 этой величине соответствует некоторое конечное значение координаты S . Этот момент подробней будет разъяснен на примере в следующем разделе.

Таким образом, задача о получении асимптотического решения уравнений Навье — Стокса распалась на ряд отдельных задач.

4. **Пример.** В качестве примера рассмотрим задачу обтекания вязким сверхзвуковым потоком газа поверхности, имеющей большую локальную кривизну. На фиг. 1 показана схема рассматриваемого течения. Предполагается, что набегающий поток является равномерным и сверхзвуковым. В данном примере в качестве характерных значений газодинамических переменных выбраны их значения в набегающем потоке. Уравнение, определяющее форму тела, можно записать в виде

$$x = -mz - \frac{a(\varepsilon l_0)^{\alpha+1}}{(-z)^\alpha} \quad (a > 0, \alpha > 0) \quad (4.1)$$

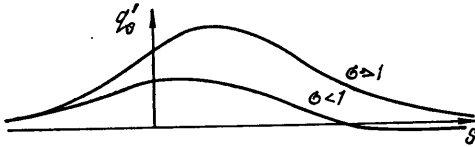
Нетрудно показать, что такое тело при $\varepsilon \rightarrow 0$ втягивается в угол, образованный отрицательной полуосью x и асимптотой. Максимальное значение кривизны оказывается пропорциональным ε^{-1} . Пусть расстояние от передней кромки до точки $s = 0$ всегда остается равным l_0 . Это значение и принято в качестве характерной длины.

Очевидно, что в невязком сверхзвуковом потоке в окрестности точки O (на расстояниях порядка ε) значения переменных изменяются на величины $O(1)$. В пределе ($\varepsilon \rightarrow 0$) около точки O реализуется хорошо известное течение Прандтля — Майера.

Нетрудно видеть, что для тела, форма которого определяется (4.1), а длина начального участка равна l_0 , радиус кривизны поверхности вблизи точки O имеет такой же порядок величины, как толщина пограничного слоя (εl_0). Применим к данной задаче изложенной выше общий метод, используя обозначения, показанные на фиг. 1.

Для области 1 решение получается в виде двух равномерных сверхзвуковых потоков и соединяющей их центрированной (в точке O) волны разрежения. В области 21 получается хорошо известное решение для пограничного слоя на плоской пластине, переходящее на внешней границе в равномерный набегающий поток.

Дальнейшая задача состоит в построении асимптотического решения для области 22. Эта задача сводится к нахождению течения невязкого газа около тела, форма которого задана в виде



Фиг. 2

$$X = -mZ - \frac{a}{(-Z)^\alpha} \quad (4.2)$$

$$\left(Z = \frac{z}{\varepsilon l_0}, \quad X = \frac{x}{\varepsilon l_0} \right)$$

Формула (4.2) получается из (4.1) при изменении всех линейных размеров области 22 в εl_0 раз, что соответствует переходу от переменных (sl_0, nl_0) к переменным (S, N) . Необходимость такого преобразования следует из формулы (2.6).

Начальные условия для области 22 ($S \rightarrow -\infty$) получаются на основании соотношений (3.6) и будут представлять собой профили распределения переменных в пограничном слое на пластине в сечении $s = 0$. Вид начального профиля скорости показан на фиг. 1. При $N = 0$ имеем условие (3.7).

Краевые условия при $N \rightarrow \infty$ получаются из (3.8). В данном случае они сводятся к одному условию, дающему связь между величиной вектора скорости и углом его наклона к некоторому фиксированному направлению. Эта связь следует из соотношений для течения в простой волне.

В области 3 имеем уравнения пограничного слоя. Этот пограничный слой развивается на теле с бесконечной протяженностью вверх и вниз по потоку. На его внешней границе должны выполняться краевые условия (3.5), в которых функции $u_{22}^{21}(S, 0)$, $p_{22}^{21}(S, 0)$ и др. известны из решения для области 22. На стенке выполняются обычные условия (3.1), (3.2).

Скорость $u_{22}^{21}(S, 0)$ при $S \rightarrow -\infty$ обращается в ноль. В работе [2] показано, что существует имеющее физический смысл решение уравнений пограничного слоя на бесконечном теле в ускоряющемся из бесконечно удаленной точки потока. Там же дан метод интегрирования уравнений этой задачи.

В области 23 получаются уравнения пограничного слоя при обычных условиях на внешней и внутренней границах, однако начальные условия задачи имеют вид (3.4). Пределы функций $u_{22}^{21}(S, N)$ и $h_{22}^{21}(S, N)$ при $S \rightarrow \infty$ известны из решения для области 22. В данном частном случае, однако, начальные условия для функций в области 23 могут быть найдены и без решения задачи в области 22. Дело в том, что давление в области 23 всюду постоянно и равно давлению в области 1 после поворота в центрированной волне разрежения. Распределение же давления торможения и полной энтальпии по струйкам тока будет тем же, что в области 21 при $s = 0$, так как течение в области 22 является невязким.

Этих данных достаточно, чтобы рассчитать распределение переменных на начальной характеристике в области 23. Начальный профиль скорости для области 23 показан на фиг. 1. Скорость газа около поверхности не равна нулю. Это вызвано изоэнтропическим ускорением газа в области 22. Метод решения уравнений сжимаемого ламинарного пограничного слоя при начальных данных такого типа также развит в [2].

Из сказанного можно сделать некоторые качественные выводы о распределении трения и тепловых потоков на рассматриваемой поверхности. Напомним, что в обычном пограничном слое напряжение трения τ и удельный тепловой поток q являются величинами порядка ε . Это положение естественно сохраняется и для большей части поверхности в настоящем случае. Однако вблизи точки O толщина вязкого слоя (область 23) является величиной порядка $\varepsilon^{3/2}$, а не ε , как обычно. Поэтому для τ и q получается следующая оценка:

$$q_3^1, \tau_3^1 \sim O(\varepsilon^{1/2}) \quad (4.3)$$

О распределении тепловых потоков можно сделать еще дополнительные заключения, не прибегая к численным расчетам. Для этого заметим, что для области 31, используя энтальпию торможения H , краевые условия (3.5) можно записать в форме

$$H_3^1(S, Y) \rightarrow H_{22}^1(S, 0), Y \rightarrow \infty \quad (4.4)$$

Но в области 22 течение является вязким и энтальпия торможения сохраняется вдоль линий тока. Тогда, используя начальные условия для области 22 (3.6), можно заключить, что энтальпия торможения $H_3^1(S, \infty)$ просто равна энтальпии тела в точке O

$$H_3^1(S, Y) \rightarrow h_{21}^1(0, 0), Y \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

Если предположить, что во всей малой области $S \sim O(1)$ около точки O температура поверхности тела остается постоянной, то можно сделать дополнительные выводы о характере распределения тепловых потоков при различных значениях числа Прандтля σ . Если число Прандтля $\sigma = 1$, то в уравнении энергии пограничного слоя исчезает диссипативный член и оно допускает простое решение $H_3^1(S, Y) \rightarrow h_{21}^1(0, 0)$.

Это значит, что главный член для теплового потока (4.3) равен нулю.

Если число Прандтля $\sigma \neq 1$, то главный член разложения для теплового потока q_3^1 исчезает только при $S \rightarrow -\infty$. Обращение его в нуль связано с тем, что в силу начального условия (3.6) скорость на внешней границе $u_3^1(S, \infty)$ при $S \rightarrow -\infty$ стремится к нулю и диссипативный член в уравнении энергии опять исчезает.

В области значений $S \sim O(1)$, где существуют большие градиенты скорости на внешней границе области 3, тепловой поток q_3^1 может при $\sigma \neq 1$ достигать максимальных значений. В области, лежащей справа от точки O , где $S \rightarrow \infty$, продольные градиенты скорости асимптотически исчезают, и вследствие этого распределение тепловых потоков (и трения) становится таким же, как на плоской пластине. Это значит, что в силу условия (4.5), величина теплового потока q имеет следующую оценку:

$$q \sim \varepsilon^{1/2} (\sigma - 1) S^{-1/2} \quad (4.6)$$

Нетрудно видеть, что знак теплового потока зависит от знака величины $(\sigma - 1)$. Это обстоятельство объясняется тем, что при $\sigma > 1$ энтальпия газа у поверхности теплоизолированной пластины и должна быть больше, чем энтальпия торможения газа на внешней границе пограничного слоя (фиг. 2), а при $\sigma < 1$ — соответственно меньше ее; распределение $q_3^1(S)$ в окрестности точки O для $\sigma < 1$ показано ориентировочно.

Представляет интерес проследить, каким образом происходит сопряжение значений теплового потока и трения при переходе из области 3 в область 23. Как указывалось выше, при $S \rightarrow \infty$ решение уравнений пограничного слоя в области 3 приближается к решению для плоской пластинки, на внешней границе которой энтальпия торможения газа равна энтальпии газа у поверхности тела, а скорость $u_{23}^1(0, 0)$ равна скорости газа у стенки в начальном профиле для области 23. Следовательно, решения должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \tau &\sim \tau_3^1 \varepsilon^{1/2} \sim S^{-1/2} \varepsilon^{1/2} \sim s^{-1/2} \varepsilon \sim \tau_{23}^1 \varepsilon \\ q &\sim q_3^1 \varepsilon^{1/2} \sim S^{-1/2} (\sigma - 1) \varepsilon^{1/2} \sim s^{-1/2} (\sigma - 1) \varepsilon \sim q_{23}^1 \varepsilon \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тепловой поток в области 23 при $\sigma < 1$ и очень малых s направлен, согласно (4.7), от поверхности тела ($q_{23}^1 < 0$). При возрастании s направление q_{23}^1 быстро изменяется и на некотором конечном расстоянии достигает максимального значения. Это связано с перераспределением энтальпии торможения в пограничном слое за счет теплопроводности. Дальше вниз по потоку q_{23}^1 опять начинает убывать за счет роста толщины температурного пограничного слоя. Очевидно, что при достаточно больших значениях s значения q_{23}^1 и τ_{23}^1 убывают как $s^{-1/2}$.

В заключение кратко рассмотрим вопрос о возможности образования локальной зоны отрыва. Безотрывное обтекание поверхности с угловой точкой ($k_0 = \infty$), по-видимому, невозможно. Однако в рамках [$k_0 \sim O(\varepsilon)$] также возможно обнаружить отрыв потока. В окрестности точки O центробежные силы в области 22 направлены в сторону положительных значений N . Поэтому на линиях тока области 22 в некотором диапазоне можно ожидать, что давление станет меньше, чем давление в области 1 за точкой поворота. При дальнейшем возрастании S произойдет выравнивание давления поперек области 22, которое по необходимости вызовет возрастание давления вдоль поверхности тела. Такое возрастание давления может привести к отрыву пограничного слоя 23.

Поступило 25 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Van-Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. Acad. Press, N. Y., 1964.
2. Нейланд В. Я. О решении уравнений ламинарного пограничного слоя при произвольных начальных условиях. ПММ, 1966, № 4.