

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

О. Ю. ПОЛЯНСКИЙ

(Москва)

Рассматривается нестационарное обтекание тел сверхзвуковым потоком газа при малых числах Струхала. Амплитуда углов атаки предполагается произвольной, лишь бы головной скачок оставался присоединенным, а течение за ним — сверхзвуковым. Формулируется критерий, позволяющий сравнивать характеристики демпфирования при малых и больших амплитудах возмущенного движения. На примере клина проводится сравнение характеристик демпфирования, вычисленных по различным теориям и проверяется гиперзвуковой закон подобия. Приводятся простые асимптотические формулы для вращательных производных тонкого клина в гиперзвуковом потоке газа.

1. Задача обтекания заостренных тел и, в частности, клина, сверхзвуковым потоком газа при малых амплитудах возмущенного движения исследовалась в ряде работ, например, [1—4] и др. При больших амплитудах задача, вообще говоря, становится существенно сложнее, однако, в тех случаях, когда числа Струхала S малы, а числа Маха M в возмущенной области движения не слишком близки к единице, течение около тела, движущегося с большими амплитудами и произвольными законами движения, при локально-временном рассмотрении, с достаточно высокой точностью эквивалентно течению около этого тела при некотором его движении с малыми амплитудами колебаний.

Докажем это положение

Известно, что при нестационарном движении газодинамические параметры течения в области около тела зависят от предыстории движения тела. Пусть L — длина тела, V_0 — скорость его движения. Тогда очевидно, что в случае

$$S = \frac{L}{V_0 T} \ll 1, \quad M > 1, \quad \frac{M}{M-1} \sim 1 \quad (1.1)$$

время влияния предыстории движения τ мало по сравнению с характерным временем нестационарного процесса T

$$\tau \sim \frac{L}{V_0} \frac{M}{M-1}, \quad \frac{\tau}{T} \sim S \frac{M}{M-1} \ll 1 \quad (1.2)$$

Рассмотрим для простоты нестационарное движение тела с одной степенью свободы — колебания относительно некоторой фиксированной точки. Обозначим через x, y, z координаты точки пространства в декартовой инерциальной системе координат, отнесенные к L , а через α — угол атаки тела.

Пусть $z = \varphi(x, y, \alpha(t))$ — уравнение поверхности тела. Разложим функцию φ в ряд Тейлора в окрестности $t = t_1$

$$z = \varphi(x, y, \alpha(t_1)) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \right)_{t_1} (t - t_1) + \dots \quad (1.3)$$

Оценки порядков членов в этом выражении дают

$$\varphi \sim 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \sim 1, \quad \frac{d\alpha}{dt} \sim \frac{1}{T} \quad (1.4)$$

Теперь легко убедиться, что для значений t , лежащих в интервале $|t - t_1| \sim \tau$, с точностью до членов первого порядка малости относительно величины S предыстории движения характеризуется лишь двумя параметрами: значениями угла атаки α и

угловой скорости $\alpha' = d\alpha/dt$ при $t = t_1$. Это обстоятельство позволяет отождествлять при локально-временном рассмотрении все нестационарные движения рассматриваемого тела в классе (1.1), при которых мгновенные значения углов атаки и угловых скоростей одинаковы. Естественно, остальные параметры задачи, как-то: положение оси вращения, числа Маха и другие — также должны быть одинаковы.

Таким образом, для определения мгновенных характеристик поля течения около тел, движущихся с большими амплитудами углов атаки, можно непосредственно использовать результаты, полученные при решении задачи нестационарного движения этих тел с малыми амплитудами около некоторого не равного нулю угла атаки.

Такая процедура эквивалентна распространению гипотезы гармоничности, сформулированной С. М. Белоцерковским, на случай больших амплитуд колебаний.

2. Построим решение для течения в области сжатия вблизи клина (пластинки), колеблющегося в сверхзвуковом потоке относительно передней кромки по некоторому закону $\theta_s = \theta_s(t)$ при условиях (1.1) (θ_s — угол между поверхностью клина и вектором скорости V_0).

Будем пользоваться полярной инерциальной системой координат (θ, r) , начало которой совпадает с передней кромкой клина, а ось $\theta = 0$ направлена по вектору скорости набегающего потока. Уравнения газовой динамики в этой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\rho}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) + u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

При сделанных выше предположениях решение системы (2.1) можно искать в виде

$$\begin{aligned} u &= V_* \left[u_* + \frac{r}{V_0} \theta_s' u_1 + O(S) \right], & v &= V_* \left[v_* + \frac{r}{V_0} \theta_s' v_1 + O(S) \right] \\ p &= p_* \left[1 + \frac{r}{V_0} \theta_s' p_1 + O(S) \right], & \rho &= \rho_* \left[1 + \frac{r}{V_0} \theta_s' \rho_1 + O(S) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $V_* u_*$, $V_* v_*$, p_* и ρ_* — компоненты скорости, давление и плотность при стационарном обтекании клина с углом θ_s ; точка означает дифференцирование по времени. Введем обозначения

$$\vartheta = \theta - \theta_s, \quad \vartheta_1 = \theta_1 - \theta_s, \quad m = \cos \vartheta_1 / \cos \theta_1 \quad (2.3)$$

где θ_1 — угол наклона скачка уплотнения при стационарном обтекании клина с углом θ_s . Тогда

$$V_* = V_0/m, \quad u_* = \cos \vartheta, \quad v_* = -\sin \vartheta$$

$$p_* = p_0 \frac{2\kappa}{\kappa+1} \left(M_0^2 \sin^2 \theta_1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa} \right) = \frac{2}{\kappa+1} \rho_0 V_0^2 \sin^2 \theta_1 \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa M_0^2 \sin^2 \theta_1} \right) \quad (2.4)$$

$$\rho_* = \rho_0 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(1 + \frac{2}{(\kappa-1) M_0^2 \sin^2 \theta_1} \right)^{-1}$$

Здесь κ — показатель адиабаты, индекс 0 обозначает параметры невозмущенного потока. Угол θ_1 определяется из уравнения $\rho_0 \operatorname{tg} \theta_1 = \rho_* \operatorname{tg} \vartheta_1$.

Подставляя (2.2) в (2.1) и учитывая, что с точностью до членов первого порядка относительно числа Струхала

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \theta_s} \theta_s' = V_0 \frac{\partial (u_*/m)}{\partial \theta_s} \theta_s' \quad (2.5)$$

и аналогично для других производных, получаем систему линейных уравнений относительно функций u_1 , v_1 , p_1 и ρ_1

$$\begin{aligned} -\sin\vartheta u_1' + \cos\vartheta u_1 + \sin\vartheta v_1 + p_1/\kappa M_*^2 &= -mu_k \\ -\sin\vartheta v_1' - \sin\vartheta u_1 + \cos\vartheta v_1 + p_1'/\kappa M_*^2 &= -mv_k \quad \left(' = \frac{d}{d\vartheta}\right) \\ v_1' - \sin\vartheta \rho_1' + 2u_1 + \cos\vartheta \rho_1 &= -m\rho_k \\ \kappa \sin\vartheta \rho_1' - \sin\vartheta p_1' - \kappa \cos\vartheta \rho_1 + \cos\vartheta p_1 &= -m(p_k - \kappa\rho_k) \\ u_k &= \frac{1}{V_*} \frac{\partial(V_* u_*)}{\partial\theta_s} = m \frac{\partial(u_*/m)}{\partial\theta_s} = \sin\vartheta + \delta \cos\vartheta \\ v_k &= m \frac{\partial(v_*/m)}{\partial\theta_s} = \cos\vartheta - \delta \sin\vartheta \\ p_k &= \frac{\partial \ln p_*}{\partial\theta_s} = 2k_0 \operatorname{ctg}\theta_1 \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa M_0^2 \sin^2\theta_1}\right)^{-1} \\ \rho_k &= \frac{\partial \ln \rho_*}{\partial\theta_s} = 2k_0 \operatorname{ctg}\theta_1 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2 \sin^2\theta_1\right)^{-1} \\ \delta &= -\frac{k_0 \sin\theta_s}{\cos\theta_1 \cos\vartheta} - \operatorname{tg}\vartheta_1 \\ k_0 &= \frac{d\theta_1}{d\theta_s} = \frac{1}{\sin^2\theta_s} \left[\frac{M_0^4 \sin^2\theta_1 (\kappa+1)}{(M_0^2 \sin^2\theta_1 - 1)^2} - \frac{\operatorname{ctg}\theta_s}{\cos\theta_1 \sin\theta_1} \right]^{-1} \\ M_*^2 &= \frac{1}{\sin^2\vartheta_1} \left[\left(\frac{\kappa+1}{2\kappa}\right)^2 \frac{1}{M_0^2 \sin^2\theta_1 - (\kappa-1)/2\kappa} + \frac{\kappa-1}{2\kappa} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь M_* — число Маха в возмущенной области течения при стационарном обтекании клина с углом θ_s . Общим решением системы (2.5) с учетом (2.6) при $M_*^2 \neq 2$ будет совокупность функций¹

$$\begin{aligned} u_1 &= A \sin 2\vartheta + C \left(\cos 2\vartheta + \frac{M_*^2}{2 - M_*^2} \right) + \frac{m\delta M_*^2 - m\rho_k/\kappa}{2 - M_*^2} \\ v_1 &= -m - B/\kappa M_*^2 - C \sin 2\vartheta - 2A \sin^2\vartheta \\ p_1 &= B \sin\vartheta - C 2\kappa M_*^2 \frac{\cos\vartheta}{2 - M_*^2} + m M_*^2 \cos\vartheta \frac{p_* - 2\kappa\delta}{2 - M_*^2} \\ \rho_1 &= D \sin\vartheta - C 2M_*^2 \frac{\cos\vartheta}{2 - M_*^2} + m \cos\vartheta \left[\frac{2}{(2 - M_*^2)\kappa} \frac{p_k}{\kappa} - \frac{2M_*^2\delta}{(2 - M_*^2)} - \rho_k \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь A , B , C и D — константы интегрирования, зависящие от θ_s , которые определяются из граничных условий на поверхности клина (условие непротекания, из которого следует, что $B = -2\kappa m M_*^2$) и законов сохранения на скачке уплотнения. Уравнение скачка θ_2 ищется в виде

$$\theta_2 = \theta_1 + k_1(\theta_s) \frac{r\theta_s}{V_0}$$

где k_1 — параметр, определяемый в процессе решения; скорость перемещения скачка уплотнения N при этом будет

$$N = k_0 r \theta_s' (1 + O(S))$$

¹ При $M_*^2 = 2$ решение также регулярно. Для u_1 , например, оно имеет вид $u_1 = A_1 \sin 2\vartheta + B_1 - m \cos 2\vartheta (2\delta - p_k/\kappa)$.

Из законов сохранения на скачке уплотнения следуют соотношения

$$u_1(\theta_1) = -2k_1 \frac{\sin \theta_s}{\cos \theta_1}, \quad v_1(\theta_1) = 2k_1 h + \frac{k_0 h}{\cos \theta_1} \left(h = \frac{4 \cos \theta_1}{\kappa + 1} - \frac{\sin \theta_s}{\sin \theta_1} \right)$$

$$p_1(\theta_1) = \kappa M_*^2 \sin \theta_1 \left[v_1(\theta) + \frac{k_0 \sin \theta_s}{\sin \theta_1 \cos \theta_1} + \frac{2k_1 \sin \theta_s}{\sin \theta_1} \right]$$

$$\rho_1(\theta_1) = \frac{1}{\sin \theta_1} \left[v_1(\theta_1) + \frac{k_0 \sin \theta_s}{\sin \theta_1 \cos \theta_1} - 2k_1 \frac{\sin \theta_s}{\sin \theta_1} \right]$$

Подставляя в эту систему решения (2.7), получим 4 уравнения относительно 4 неизвестных A, C, D и k_1 .

Для величины p_1 на поверхности клина получаем выражение

$$p_1(\theta_s) = \frac{2\kappa M_*^2}{M_*^2 - 2} \left[C - m \left(\frac{p_k}{2\kappa} - \delta \right) \right] \quad (2.8)$$

где

$$C = \frac{Ql - Lq_2}{q_1 l - q_2}, \quad q_1 = 2 \operatorname{tg} \theta_1 \frac{M_*^2 - 1}{M_*^2 - 2}, \quad q_2 = 2 \left(h - \frac{\sin \theta_s \operatorname{tg} \theta_1}{\cos \theta_1} \right) \quad (2.9)$$

$$Q = m - k_0 h / \cos \theta_1 + \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \left(\frac{p_k}{\kappa} - M_*^2 \delta \right) / (M_*^2 - 2)$$

$$l = -4 \sin \theta_1 \frac{M_*^2 - 2}{\kappa + 1}, \quad L = \frac{m}{2} \left(\frac{p_k}{\kappa} - 2\delta \right) + \left(1 + \frac{2k_0}{\kappa + 1} \right) \frac{(M_*^2 - 2) \sin \theta_1}{\cos \theta_1}$$

В предельном случае $\theta_s \rightarrow 0, M_0 \theta_s \equiv K \rightarrow \infty$ из (2.8) и (2.9) можно получить простое выражение для p_1

$$p_1 = \frac{2(\kappa + 1)}{\theta_s(2\kappa - 1)} \quad (2.10)$$

Производная коэффициента момента аэродинамических сил m_z по безразмерной угловой скорости $\alpha' = \theta_s' L/V_0$, характеризующая демпфирование, определяется формулой

$$m_z^{\alpha'} = \frac{dm_z}{d\alpha'} = -\frac{4}{3(\kappa + 1) \cos^3 \theta_{s0}} [p_1(\theta_{s-}) \zeta(\theta_{s-}) + p_1(\theta_{s+}) \zeta(\theta_{s+})] \quad (2.11)$$

Здесь θ_{s0} — половина угла раствора клина, θ_{s-} и θ_{s+} — угол θ_s соответственно для верхней и нижней поверхностей клина,

$$\zeta(\theta_s) = \sin^2 \theta_1(\theta_s) - \frac{\kappa - 1}{2\kappa M_0^2}$$

$$m_z = \frac{M_z}{1/2 \rho_0 V_0^2 L^2}, \quad M_z = \int_0^{L'} [p(\theta_{s-}) - p(\theta_{s+})] r dr, \quad L' = \frac{L}{\cos \theta_{s0}}$$

Для малых амплитуд возмущенного движения формула (2.11) просто обобщается на случай колебаний относительно произвольной точки x_0 оси симметрии [5, 6].

$$m_z^{\alpha'}(x_0, x_*) = m_{z0}^{\alpha'} + x_* C_{y0}^{\alpha'} - x_0 m_z^{\alpha} - x_0 x_* C_y^{\alpha} \quad (2.12)$$

Здесь $m_z^{\alpha'}(x_0, x_*)$ — производная момента, подсчитанного относительно точки x_* при колебаниях клина относительно точки x_0

$$m_{z0}^{\alpha'} = -\frac{8}{3} \frac{p_1(\theta_{s0}) \zeta(\theta_{s0})}{(\kappa + 1) \cos^3 \theta_{s0}}, \quad C_{y0}^{\alpha'} = \frac{4}{\kappa + 1} \frac{p_1(\theta_{s0}) \zeta(\theta_{s0})}{\cos \theta_{s0}} \quad (2.13)$$

$$m_z^{\alpha} = -\frac{4}{\kappa + 1} \frac{p_k(\theta_{s0}) \zeta(\theta_{s0})}{\cos^2 \theta_{s0}}, \quad C_y^{\alpha} = \frac{8}{\kappa + 1} p_k(\theta_0) \zeta(\theta_{s0})$$

Получим асимптотическую формулу для $m_z^{\alpha^*}$ в предельном случае тонкого клина и очень больших гиперзвуковых скоростей, $\theta_s \ll 1$, $K \gg 1$. В этом случае выражения для p_* , p_k , p_1 и ζ принимают вид

$$p_* = \frac{\kappa+1}{2} \rho_0 V_0^2 \theta_{s0}^2, \quad p_k = \frac{2}{\theta_{s0}}, \quad p_1 = \frac{2}{\theta_{s0}} \frac{\kappa+1}{2\kappa-1}, \quad \zeta = \left(\frac{\kappa+1}{2} \theta_{s0}\right)^2$$

Подставляя эти выражения в (2.13), получаем

$$m_{z0}^{\alpha^*} = -\frac{4}{3} \frac{(\kappa+1)^2}{(2\kappa-1)} \theta_{s0}, \quad C_{y0}^{\alpha^*} = \frac{2(\kappa+1)^2}{(2\kappa-1)} \theta_{s0} \quad (2.14)$$

$$m_z^{\alpha^*} = 2(\kappa+1) \theta_{s0} \quad C_{y1}^{\alpha^*} = 4(\kappa+1) \theta_{s0}$$

Теперь, если момент аэродинамических сил подсчитывать относительно точки $x_* = x_0$, выражение для вращательной производной $m_z^{\alpha^*}$ (2.12) принимает вид

$$m_z^{\alpha^*} = -\theta_{s0} \mu_{\infty}(\kappa, x_0), \quad \mu_{\infty} = 2(\kappa+1) \left[\frac{2}{3} \frac{\kappa+1}{2\kappa-1} - x_0 \frac{3\kappa}{2\kappa-1} + 2x_0^2 \right] \quad (2.15)$$

На фиг. 1 в качестве примера приведена зависимость $m_z^{\alpha^*}$ при $\alpha \rightarrow 0$ от M_0 , полученная согласно формуле (2.13) при $\kappa = 1.4$, $\theta_{s0} = 10^\circ$, 5° и 0 . Для $\theta_{s0} = 0$ расчет проводился по формуле

$$m_z^{\alpha^*} = -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^3} \right), \quad \beta = (M_0^2 - 1)^{1/2}$$

следующей из линейной теории.

Штриховой линией на фиг. 1 нанесены асимптотические значения $m_z^{\alpha^*}$ при $M_0 \rightarrow \infty$.

3. Обычно при изучении возмущенного движения тел используют величину $m_z^{\alpha^*}(\theta_{s0})$, вычисленную в предположении малой амплитуды колебаний ($\alpha \rightarrow 0$). Интересно оценить возникающую при этом погрешность, которую можно характеризовать величиной $\eta - 1$, где η равно отношению энергии E ,

диссипированной при движении тела за некоторое время t' и вычисленной с учетом точной зависимости $m_z^{\alpha^*}$ от угла атаки (2.11), к энергии E_0 , которая была бы диссипирована за это же время t' при такой же кинематике движения, но в предположении, что $m_z^{\alpha^*} = \text{const} = m_z^{\alpha^*}(\theta_{s0})$.

Для гармонического закона колебаний $\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \gamma)$ при условии, что $\theta_s = \theta_{s0} + \alpha$, $\alpha_0 < \theta_{s0}$ и $t' = T = 2\pi/\omega$ и учитывая, что

$$E = \int_0^T \int_0^{L'} pr \theta_s' dr dt$$

получаем

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (m_z^{\alpha^*}(t))_1 \cos^2 t dt, \quad (m_z^{\alpha^*}(t))_1 = \frac{m_z^{\alpha^*}(\theta_{s0} + \alpha_0 \sin t)}{m_z^{\alpha^*}(\theta_{s0})} \quad (3.1)$$

Если представить $(m_z^{\alpha^*})_1$ в виде

$$(m_z^{\alpha^*})_1 = 1 + \sum_{i=1}^N A_i \alpha^i \quad (3.2)$$

то получаем

$$\eta = 1 + \sum_{i=1}^{N'} A_{2i} \alpha_0^{2i} I_{2i}, \quad I_{2i} = \frac{(2i-1)!}{2^{2i-1} (i+1)! (i-1)!} \quad (3.3)$$

где

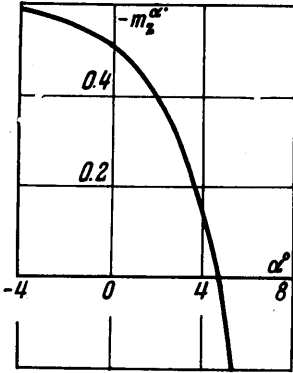
$$N' = \begin{cases} 1/2 N & \text{при } N = 2n \\ 1/2 (N - 1) & \text{при } N = 2n + 1 \end{cases}$$

Коэффициенты J_2, J_4, J_6 и J_8 соответственно равны $1/4, 1/8, 5/64, 7/128$. Очевидно, что если $(m_z^\alpha)_1 - 1$ нечетная функция α , то $\eta = 1$. Вообще в диапазоне изменения углов атаки $\alpha_0 < \theta_{s0}$, где нет резко выраженного антидемпфирования, величина η близка к 1.

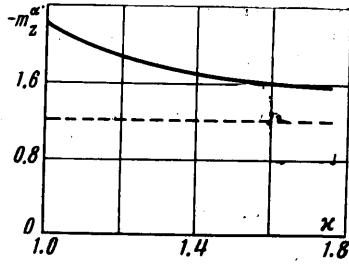
Для зависимости m_z^α от α , изображенной на фиг. 2 (рассчитана по формуле (2.11) для $M_0 = 2, \kappa = 1,4$ и $\theta_{s0} = 10^\circ$) при $\alpha_0 = 5^\circ$ величина $\eta \approx 0.85$, а для зависимости m_z^α от θ_s близкой к синусоидальной (что типично для гиперзвуковых скоростей) даже при больших амплитудных колебаний отличие величины η от 1 составляет всего несколько процентов.

4. Для расчета характеристик демпфирования тел, движущихся с гиперзвуковыми скоростями, часто применяется формула Ньютона и различные ее модификации. Однако результаты, полученные по формуле Ньютона и по формуле Ньютона с учетом центробежных сил (формула Буземана), могут заметно отличаться друг от друга, а также от точных результатов, полученных при $\kappa = 1,4$. Рассмотрим клин, колеблющийся относительно передней кромки. Из формулы Ньютона $p = \rho_0 V_{0n}^2$, где V_{0n} — нормальная к поверхности клина составляющая вектора скорости V_0 , $V_{0n} = V_0 \sin \theta_s + \theta_r$ следует, что

$$dp/d\alpha = 2\rho_0 V_0^2 \sin \theta_s r/L \quad (4.1)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Добавочное давление Δp , обусловленное искривлением траекторий частиц газа, движущихся вдоль поверхности клина, определяется так:

$$\Delta p = m(r) V_s^2/R$$

где $m(r)$ — масса газа, участвующая в движении, V_s — скорость частиц газа вдоль траектории движения, R — радиус кривизны траектории.

В рассматриваемом случае

$$m(r) = \rho_0 r \operatorname{tg} \theta_s, \quad R = V_0 \cos \theta_s / 2\theta_s', \quad V_s = V_0 \cos \theta_s$$

Таким образом, с учетом центробежных сил $dp/d\alpha = 4\rho_0 V_0^2 \sin^2 \theta_s r/L$. Эта величина в точности равна значению $dp/d\alpha$, следующему из формулы (2.9) при $\kappa \rightarrow 1$ и $M \rightarrow \infty$ и в 2 раза превышает значение (4.1), следующее

из формулы Ньютона. Для производных $m_z^{\alpha'}$ при $\alpha \rightarrow 0$, рассчитанных по формуле Ньютона и по формуле Ньютона с учетом центробежных сил, соответственно получаем

$$m_z^{\alpha'} = -\frac{8}{3} \frac{\sin \theta_{s0}}{\cos^3 \theta_{s0}}, \quad m_z^{\alpha'} = -\frac{16}{3} \frac{\sin \theta_{s0}}{\cos^3 \theta_{s0}} \quad (4.2)$$

Выражение (2.12) при использовании формулы Ньютона в случае $\theta_{s0} \rightarrow 0$ принимает вид

$$m_z^{\alpha'} = -8\theta_{s0} [1/3 - x_0 + x_0^2]$$

Естественно, это выражение не следует из формулы (2.15) при $\kappa \rightarrow 1$, поскольку предельной формой выражения (2.15) при $\kappa \rightarrow 1$ является не формула Ньютона, а формула Буземана.

На фиг. 3 приведена зависимость $m_z^{\alpha'}$ от κ , рассчитанная по формуле (2.11) при $M_0 = \infty$, $\theta_{s0} = 20^\circ$ и $\alpha \rightarrow 0$. Штриховой линией нанесено соответствующее значение $m_z^{\alpha'}$ по формуле Ньютона.

5. Представляет также интерес проверка гиперзвукового закона подобия при обтекании тонких тел [7], согласно которому давление p и производную $(m_z^{\alpha'})_{\alpha \rightarrow 0}$ можно представить в виде

$$p = \rho_0 V_0^2 \theta_s^2 P \left(\frac{r}{L}, K, \frac{\theta' L}{\theta_s V_0}, x_0, \kappa \right) \\ m_z^{\alpha'} = \theta_{s0} \mu (K, x_0, \kappa) \quad (5.1)$$

где $K = \mu_0 \theta_s$ — гиперзвуковой параметр подобия, P и μ — безразмерные функции.

На фиг. 4 построены графики функции $\mu_1 = m_z^{\alpha'}/\theta_{s0}$ в зависимости от K для $\kappa = 1,4$, $\theta_{s0} = 5^\circ$ и 10° и $x_0 = 0$ формула (2.12). Штрих-пунктирной линией обозначены асимптотические значения μ_1 при $K \rightarrow \infty$ (формула 2.15). Штриховой линией нанесены значения μ_1 по формуле

$$\mu_1 = -\frac{2}{3} \left[\frac{2}{K} + \kappa + 1 + \frac{1}{2}(\kappa + 1)K \right]$$

следующей из метода Лайтхилла [8] (поршневая аналогия) и применимой при $M_0 \gg 1$, $K < 1$.

Поступила 1 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Carrier G. F. The Oscillating Wedge in a Supersonic Stream, JAS, 1949, vol. 16 No 3.
2. Van Dyke M. D. On Supersonic Flow past an Oscillating Wedge, Quart. Appl. Math., 1953, vol. 11, No 3.
3. East R. A. A Theoretical and Experimental Study of Oscillating Wedge Shaped Aerofoils in Hypersonic Flow., Univ. of Southampton, Rep AASU-228, 1962.
4. Appleton J. P. Aerodynamic Pitching Derivatives of a Wedge in Hypersonic Flow, AIAA Journal, 1964, vol. 2, No 11.
5. Белоцерковский С. М. Представление нестационарных аэродинамических моментов и сил при помощи коэффициентов вращательных производных. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 7.
6. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. К определению коэффициентов вращательных производных в аэродинамических трубах. Изв. АН СССР, сер. механ. и машиностр., 1964, № 3.
7. Теленин Г. Ф. Законы подобия при больших сверхзвуковых скоростях. Оборонгиз, 1956.
8. Lighthill M. Oscillating Airfoils at High Mach Number, JAS, 1953, vol. 20. No 6.