

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФФУЗИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПЛАЗМУ, ОХЛАЖДАЕМУЮ ТВЕРДЫМИ СТЕНКАМИ

Э. Г. СИНАЙСКИЙ, Е. М. ШАХОВ

(Москва)

В течение ряда последних лет проводятся эксперименты с очень сильными ударными волнами ($M \approx 100$). Сущность эксперимента состоит в следующем (фиг. 1). В начальный момент времени в разрядной камере 1, заполненной исследуемым газом и сообщаемой с трубой 2, происходит разряд. Плазма разряда выбрасывается в трубку 2. В трубе образуется ударная волна, распространяющаяся по газу. За ударной волной движется ионизованный газ, который является объектом исследования.

Одним из методов исследования плазмы является метод вытесненного магнитного потока [1,2]. Суть этого метода состоит в следующем. Ударная волна, а вслед за ней и плазма перемещаются в продольном магнитном поле, создаваемом катушкой 3. Плазма обладает большой электропроводностью, поэтому при своем движении она вытесняет магнитное поле. Однако проводимость плазмы конечна, поэтому магнитное поле диффундирует в плазму, а магнитный поток, вытесняемый плазмой, со временем уменьшается. Скорость проникновения магнитного поля регистрируется измерительными витками 4, 5. По известной скорости диффузии магнитного поля можно судить о проводимости плазмы, а по ней, считая плазму полностью ионизованной, — и о температуре. Это и было в основном сделано в работах [1,2].

Настоящая работа выполнена с целью оценить роль теплопроводности в процессе диффузии магнитного поля в плазму.

Сначала решается линейная задача о диффузии магнитного поля в цилиндрический проводник без учета теплопроводности. Задача решается методом интегральных соотношений и методом разложения неизвестных функций в ряды, причем последний метод применен для оценки точности первого. В данном случае нет уверенности в равномерной сходимости метода разделения переменных, поскольку начальные условия не сопрягаются с граничными. Затем анализируется вопрос об остывании плазмы, движущейся в трубе. Оцениваются максимально допустимые времена процессов, при которых остывание еще не затрагивает плазму, движущуюся в центре трубы. Наконец, решается задача о диффузии магнитного поля в плазму, охлаждаемую стенками.

Все исследования проведены в предположении об одномерности процессов, т. е. диффузионный и тепловой слой предполагаются достаточно тонкими по сравнению с характерным линейным размером плазменного сгустка. Плазма рассматривается как твердый проводник с проводимостью σ и коэффициентом теплопроводности λ , вычисляемым по соответствующим формулам для полностью ионизованного газа.

В работе предложен метод интегральных соотношений для расчета скорости диффузии магнитного поля в плазму, охлаждаемую стенками. Строго говоря, метод справедлив только для тонких тепловых и диффузионных слоев. Оценивается максимально допустимое время, при котором плазма в центре трубы практически еще не подвержена охлаждающему действию стенок. Если время движения плазмы до измерительного витка больше или равно максимально допустимому времени, то описанный метод дает лишь качественный характер остывания плазмы с возрастанием скорости.

§ 1. Линейная задача о диффузии магнитного поля в плазму. Метод интегральных соотношений. Рассмотрим пространство между двумя коаксиальными цилиндрами R_1 и bR_1 ($b > 1$) и внутренность цилиндра R_1 . Пусть пространство $R_1 < R < bR_1$ заполнено в начальный момент однородным продольным магнитным полем с напряженностью $H_1(0)$, проводимость среды в промежутке $R_1 < R < bR_1$ равна нулю. Внутренность цилиндра R_1 представляет собою проводник с проводимостью σ . В начальный момент магнитное поле внутри проводника отсутствует. Цилиндр bR_1 представляет собою экран для магнитного поля. Для всех $t > 0$ магнитное поле диффундирует внутрь проводника.

Сформулированная задача моделирует процесс диффузии магнитного поля в проводник конечной длины, движущийся в магнитном поле, при условии, что время входа в однородное магнитное поле много меньше характерного времени процесса и что диффузионный слой достаточно тонок по сравнению с характерным линейным размером проводника.

В сформулированной одномерной задаче процесс диффузии магнитного поля в проводник описывается уравнением диффузии

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nu \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial H}{\partial R}, \quad \nu = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad (0 < R < R_1) \quad (1.1)$$

В области между цилиндрами магнитное поле однородно, а напряженность его $H_1(t)$ определяется в процессе решения из условия постоянства потока напряженности магнитного поля через сечение цилиндра bR_1

$$\int_0^{bR_1} H(R, t) 2\pi R dR = H_1(0) (\pi b^2 R_1^2 - \pi R_1^2) \quad (1.2)$$

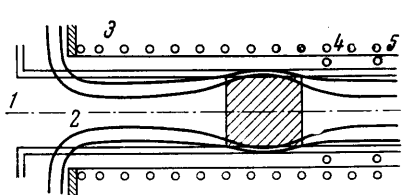
Так как $H(R, t) = H_1(t)$ для $R_1 < R < bR_1$, то условие (1.2) можно переписать в виде

$$H_1(0) - H_1(t) = \frac{2}{(b^2 - 1) R_1^2} \int_0^{R_1} H(R, t) R dR \quad (1.3)$$

Переходя к безразмерным переменным по формулам

$$r = \frac{R}{R_1}, \quad \tau = \frac{\nu}{R_1^2} t, \quad h = \frac{H(R, t)}{H_1(0)} \quad (1.4)$$

получим следующую окончательную формулировку задачи



Фиг. 1

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial h}{\partial r} \quad (\tau > 0, 0 < r < 1) \quad (1.5)$$

$$h(r, 0) = 0 \quad (0 < r < 1) \quad (1.6)$$

$$\beta \int_0^1 h r dr = 1 - h_1(\tau) \quad (1.7)$$

$$\beta = \frac{2}{b^2 - 1}$$

Вместо интегрального соотношения (1.7), которое служит для определения $h_1(\tau)$, можно записать дифференциальное

$$\frac{dh_1}{d\tau} = -\beta \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_{r=1} \quad (1.8)$$

Условие (1.8) есть следствие уравнения (1.5), проинтегрированного по r от 0 до 1, и интегрального соотношения (1.7).

В экспериментах измеряются интегральные характеристики, вытесненные магнитные потоки, поэтому целесообразно воспользоваться приближенным методом, который отражал бы правильно лишь изменение магнитного потока через цилиндр R_1 . Такой метод известен из теории пограничного слоя. Это — метод интегральных соотношений.

Будем считать, что диффузионный слой имеет толщину δ . Вне этого слоя, в окрестности оси цилиндров, напряженность магнитного поля равна нулю. Зададим профиль напряженности h в виде

$$h(r, \tau) = h_1(\tau) \left[1 - 2 \frac{1-r}{\delta} + \left(\frac{1-r}{\delta} \right)^2 \right] \quad (1.9)$$

Этот профиль удовлетворяет условиям

$$h = 0, \quad dh/dr = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 - \delta \quad h = h_1(\tau) \quad \text{при} \quad r = 1$$

Для определения $h_1(\tau)$ и $\delta(\tau)$ из (1.7) имеем

$$h_1(\tau) = \frac{12}{12 + \beta\delta(4 - \delta)}, \text{ или } \delta = 2 \left\{ 1 - \left[1 - \frac{3}{\beta} \left(\frac{1}{h_1} - 1 \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в (1.8), получаем уравнение для $h_1(\tau)$:

$$\frac{dh_1}{d\tau} = -\beta \frac{h_1}{1 - \sqrt{1 - 3(1/h_1 - 1)/\beta}} \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) интегрируется до конца. Его интеграл, удовлетворяющий нулевому начальному условию, имеет вид

$$\tau = -\beta \ln h_1 - \beta \sqrt{1 + 3/\beta} \ln \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - B}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_1 - B}} \frac{1 + \sqrt{1 - B}}{1 - \sqrt{1 - B}} + \\ + 2\beta B (\sqrt{1 - B} - \sqrt{1 - B/h_1}) \quad (B = 3/(3 + \beta)) \quad (1.12)$$

Интеграл (1.12) имеет довольно сложный вид, поэтому ниже будем пользоваться приближенным решением уравнений (1.10), (1.11)

Пренебрегая в (1.10) членом с δ^2 в знаменателе, получим

$$h_1(\tau) = \frac{3}{3 + \beta\delta} \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) и (1.11) и пренебрегая членами порядка δ^2 и выше, получим после интегрирования

$$\delta = \sqrt{12\tau} \quad (1.14)$$

Проведенные расчеты показали, что функция

$$h_1(\tau) = \frac{3}{3 + \beta \sqrt{12\tau}} \quad (1.15)$$

хорошо аппроксимирует функцию $h_1(\tau)$, определяемую интегралом (1.12).

Составим выражение для магнитного потока Φ , вытесняемого проводником. Обозначим через H_∞ напряженность невозмущенного магнитного поля впереди проводника, движущегося вдоль трубы. Поток напряженности через виток радиуса $R_1 r_1$ равен $\pi r_1^2 R_1^2 H_\infty$. В некоторый момент t в возмущенном магнитном поле поток через виток станет равным

$$2\pi \int_0^{R_1} H R dR + \frac{2\pi(r_1^2 - 1)}{2} R_1^2 H_1(t) \quad (1.16)$$

Изменение потока, зарегистрированное витком, равно

$$\Phi = \pi R_1^2 r_1^2 H_\infty - 2\pi \int_0^{R_1} H R dR - \pi R_1^2 (r_1^2 - 1) H_1(t)$$

Отсюда найдем безразмерный поток

$$f = \frac{\Phi}{\pi R_1^2 H_\infty} = (b^2 - r_1^2) \left[\frac{b^2}{b^2 - 1} h_1(\tau) - 1 \right] \quad (1.17)$$

Положим $\Delta f = f(\tau) - f(\tau + \Delta\tau)$ и составим отношение $\Delta f/f$, подставляя одновременно (1.15) вместо $h_1(\tau)$

$$\frac{\Delta f}{f} = (m - 1) \frac{b^2}{b^2 - 1} \frac{3\beta \sqrt{12\tau}}{[3/(b^2 - 1) - \beta \sqrt{12\tau}][3 + m\beta \sqrt{12\tau}]} \quad \left(m = \frac{t + \Delta t}{t} \right) \quad (1.18)$$

Здесь t — время прихода плазмы к первому витку, Δt — время прохождения плазмы между витками. Если скорость ударной волны постоянна, то $m = (l + \Delta l)/l$, где l — расстояние от начала трубы до первого витка, Δl — расстояние между витками. Предполагается, что труба целиком находится в продольном магнитном поле. Обычно m мало отличается от единицы, поэтому в знаменателе m можно заменить единицей.

Формула (1.18) связывает измеряемые величины, $f^{-1}\Delta f$ и скорость движения плазмы с интересующими нас величинами: проводимостью и температурой T_0 . По известной величине $f^{-1}\Delta f$ определяется τ , а затем σ и T_0 по формулам

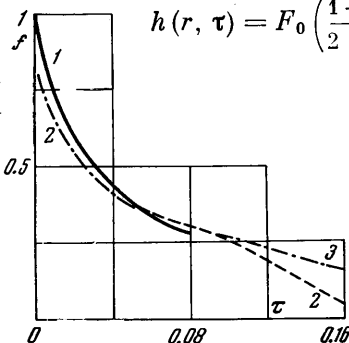
$$\sigma = \frac{c^2 I}{4\pi R_1^2 \tau V}, \quad T_0 = T_* \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{2/3}$$

Здесь T_* и σ_* — характерные значения температуры и электропроводности, V — скорость перемещения плазмы по трубе.

Таким образом, определяются осредненные по сечению, длине и времени σ и T_0 .

Для контроля точности полученного решения задача (1.5), (1.6), (1.8) была решена методом разложения в степенной ряд. Именно, решение отыскивалось в виде

$$h(r, \tau) = F_0 \left(\frac{1-r}{2\sqrt{\tau}} \right) + \sqrt{\tau} F_1 \left(\frac{1-r}{2\sqrt{\tau}} \right) + \tau F_2 \left(\frac{1-r}{2\sqrt{\tau}} \right) + \dots$$



Фиг. 2

На фиг. 2 нанесены результаты расчетов $f(\tau)$ методом интегральных соотношений (кривая 1) и методом 3 рядов (кривая 2); там же нанесена кривая, рассчитанная по методу разделения переменных. Последняя кривая несколько отличается от двух предыдущих, различие в области $\delta > 1$ ($\tau \geq 0.085$) обусловлено непригодностью метода рядов и метода интегральных соотношений. Наоборот в окрестности $\tau = 0$ метод разделения переменных дает не вполне правильные результаты (кривая $f(\tau)$ начинается не с единицы).

§ 2. Охлаждение плазмы стенками трубы. Рассмотрим сначала процесс остывания плазмы в случае, когда тепловой слой достаточно тонкий, и оценим время, при котором температуру плазмы в центре трубы можно считать равной начальной температуре.

Будем считать, что температура стенки равна нулю. Коэффициент теплопроводности примем зависящим от температуры по тому же закону, что и для полностью ионизованного газа

$$\lambda = \lambda_* (T/T_*)^{5/2}$$

Здесь T_* , λ_* — характерные значения температуры и теплопроводности. Одномерная постановка задачи об остывании плазмы следующая (в безразмерных переменных):

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \alpha r \theta^{5/2} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (2.1)$$

$$\theta = 1 \text{ при } \tau = 0, \quad \theta = 0 \text{ при } r = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0 \quad (2.2)$$

Здесь $\theta = T/T_0$, T_0 — температура в начальный момент, а

$$\alpha = \frac{a_0^2}{v_0} = \frac{4\pi\lambda_*\sigma_*}{c^2 c_p \rho_*} \left(\frac{T_0}{T_*} \right)^4 \frac{1}{\rho} = \alpha_* \frac{1}{\rho} \left(\frac{T_0}{T_*} \right)^4$$

В качестве характерной температуры удобно взять $T_* = 10^5$ К, а в качестве ρ_* — плотность плазмы при давлении перед ударной волной в 1 мм рт. ст. и $T_\infty = 288^\circ\text{К}$. Тогда, например, для водородной плазмы $\alpha = 1.35 (T_0^4 \cdot 10^{-20})/\rho$; здесь ρ — безразмерная плотность перед ударной волной.

Задачу (2.1), (2.2) будем решать методом интегральных соотношений. Предполагая, что Δ — толщина теплового слоя, зададим профиль температуры в виде

$$\theta = \frac{8}{7} \left(\frac{1-r}{\Delta} \right)^{3/2} - \frac{1}{7} \left(\frac{1-r}{\Delta} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

Этот профиль удовлетворяет условиям

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \theta^{3/2} \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1; \quad \theta = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1 - \Delta$$

Толщина слоя Δ определяется из интегрального соотношения

$$\int_{1-\Delta}^1 \frac{\partial}{\partial r} (r\theta) dr = \alpha \left(\theta^{3/2} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=1} \quad (2.4)$$

Подставляя выражение (2.3) в (2.4) и производя интегрирование, получим $0.17 \Delta^2 - 0.049 \Delta^3 = \alpha \tau$. Или приближенно

$$\Delta = 2.43 \sqrt{\alpha \tau} \quad (2.5)$$

Сравним толщины теплового и диффузионного слоев

$$\Delta/\delta = 0.7 \sqrt{\alpha}$$

Для водородной плазмы при давлении 1 мм рт. ст. перед ударной волной

$$\Delta = 0.813 (10^{-5} \cdot T_0)^2 \delta$$

Отметим, что $\Delta \approx \delta$ при $T_0 \approx 10^5$ К.

Оценим то время, при котором толщина теплового слоя становится равной единице, т. е. тепловые возмущения достигают центра трубы

$$\Delta = 1 \quad \text{при } \alpha \tau = 0.12 \quad t_* = \alpha \tau \frac{4\pi R_1^2 \epsilon_0}{\alpha c^2} = \text{const } T_0^{-5/2}$$

Например, для водородной плазмы при диаметре трубки $R_1 = 1.9$ см

$$t_* = 1.27 \rho (10^{-5} T_0)^{-5/2}, \quad [t_*] = \text{мксек}$$

Таким образом, плазму на оси трубы можно считать не остывшей, если время движения до измерительного витка меньше t_* .

§ 3. Диффузия магнитного поля в плазму, охлаждаемую твердыми стенками. В настоящем параграфе попытаемся оценить влияние охлаждения плазмы от стенок трубы на скорость диффузии магнитного поля для достаточно малых времен процесса.

Исходными для рассматриваемого случая интегральными соотношениями в переменных

$$\tau = \frac{v_0 t}{R_1^2}, \quad r = \frac{R}{R_1}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad h = \frac{H}{H_1(0)} \quad (3.1)$$

будут следующие:

$$\beta \int_{1-\delta}^1 h r dr = 1 - h_1(\tau), \quad \frac{dh_1}{d\tau} = -\beta \left(\theta^{-3/2} \frac{\partial h}{\partial r} \right)_{r=1} \quad (3.2)$$

Здесь δ_1 — толщина диффузионного слоя с учетом теплопроводности. Профиль h выбираем в виде

$$h = h_1(\tau) \left[1 - \frac{17}{7} \left(\frac{1-r}{\delta_1} \right)^{10/7} + \frac{10}{7} \left(\frac{1-r}{\delta_1} \right)^{17/7} \right] \quad (3.3)$$

Этот профиль удовлетворяет условиям

$$h = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1 - \delta_1$$

Подставляя (3.3) в первую зависимость (3.2) и производя интегрирование, получим соотношение между h_1 и δ_1

$$h_1(\tau) = \frac{1}{1 + 0.4168\delta_1 - 0.115\beta\delta_1^2} \quad (3.4)$$

Подстановка (3.4) в (3.2), а также $\theta^{-3/2} (\partial h / \partial r)_{r-1}$ приводит к уравнению, связывающему δ_1 и τ или δ_1 с Δ . Оставляя только главные члены в этом уравнении и интегрируя, получим

$$\delta_1 = \left(\frac{2.32}{\alpha}\right)^{1/3} \Delta \quad (3.5)$$

Используя для Δ выражение (2.5), найдем

$$\delta_1(\tau) = 3.4 \alpha^{0.088} \sqrt{\tau} \quad (3.6)$$

Составим отношение толщин δ_1 и δ

$$\frac{\delta_1}{\delta} \approx \alpha^{0.088} \sim (10^{-5} T_0)^{0.35} \quad (3.7)$$

Таким образом, толщина диффузионного слоя при учете теплопроводности увеличивается, если температура достаточно высока. Для водородной плазмы, например,

$$\delta_1 = 1.02 \rho^{-0.088} (10^{-5} T_0)^{0.35} \delta$$

При $T_0 = 10^5$ °К и $\rho = 1$ имеем $\delta_1 \approx \delta$. Далее

$$h_1(\tau) = \frac{1}{1 + 1.43 \alpha^{0.088} \beta \sqrt{\tau}} \quad (3.8)$$

Теперь вычислим поток f , вытесняемый плазмой, и относительную разность $\Delta f / f$. Для этого достаточно подставить (3.8) в формулу (1.17)

$$f = \frac{b^2 - r_1^2}{b^2 - 1} \left[1 - b^2 \frac{1.43 \beta \alpha^{0.088} \sqrt{\tau}}{1 + 1.43 \beta \alpha^{0.088} \sqrt{\tau}} \right]$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{b^2}{b^2 - 1} (m - 1) \frac{1.43 \beta \alpha^{0.088} \sqrt{\tau}}{(1 + 1.43 \beta \alpha^{0.088} \sqrt{\tau}) [(b^2 - 1)^{-1} - 1.43 \beta \alpha^{0.088} \sqrt{\tau}]} \quad (3.9)$$

Формулы (3.9) и (1.18) совпадают по виду и могут быть объединены одной записью

$$\frac{\Delta f}{f} = (m - 1) \frac{b^2}{b^2 - 1} \frac{\xi}{(1 + m\xi)[(b^2 - 1)^{-1} - \xi]} \quad (3.10)$$

Здесь $\xi = 1/3 \beta \sqrt{12 \tau}$ — для случая постоянной проводимости; при учете теплопроводности $\xi = 1.43 \beta \alpha^{0.088} \sqrt{\tau}$ —.

По известным из эксперимента отношению $f^{-1} \Delta f$ и скорости определяются ξ и рассчитывается температура в середине плазменного сгустка. Так, для водородной плазмы при $R_1 = 1.9$ см

$$10^{-5} T_0 = \frac{0.092}{\rho^{0.22}} \left(\frac{\beta}{\xi}\right)^{5/2} (10^6 t)^{5/4} \quad (3.11)$$

Соответствующая формула без учета теплопроводности имеет вид

$$10^{-5} T_0 = 0.205 \left(\frac{\beta}{\xi}\right)^{4/3} (10^6 t)^{2/3} \quad (3.12)$$

Поступило 10 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппова Т. И., Филиппов Н. В., Журин В. В., Виноградов В. П. Измерение электронной температуры плазмы в мощной ударной волне. «Nuclear Fusion», 1961; vol. I, No 3.
2. Журин В. В., Суляев В. А. Исследование структуры сильных ударных волн в водороде и гелии. Изд-во «Наука». Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 4.