О ВЫДАВЛИВАНИИ ВЯЗКОГО ВЕЩЕСТВА ЧЕРЕЗ КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СТЕНКЕ

Х. Х. РАХИМОВ *(Москва)*

Задача о выдавливании вязкого вещества через круглое отверстие в безграничной стенке имеет практическое значение. Важно установить зависимость объема выдавленного через отверстие материала за фиксированный момент времени с перепадом давлений, с коэффициентом вязкости и с линейным размером отверстия.

Известное решение [1] задачи об установившемся медленном радиальном сходящемся течении вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости имеет вид

$$V_R = -\frac{3A}{R^2}(\tau^2 - \tau_0^2), \qquad p = p_\infty + \frac{2\mu A}{R^3}(1 - 3\tau^2)$$

$$p_{R\theta} = \frac{12A}{R^3}\mu\tau\sqrt{1-\tau^2} \qquad A = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{1 - 3\tau_0^2 + 2\tau_0^2}$$

Здесь V_R — радиальная компонента скорости, p_∞ — давление на бесконечности p — давление в произвольной точке, τ_0 — косинус половины угла раствора конуса, τ — косинус текущего угла, отсчитываемого от оси симметрии, $p_{R\theta}$ — касательное напряжение, Q — полный расход жидкости. Если в этом решении перейти к случаю вырождения конуса в безграничную плоскость, т. е. положить $\tau_0 = 0$, то получим

$$A = \frac{Q}{2\pi}, \quad V_R = -\frac{3A\tau^2}{R^2}$$

$$p_{R\theta} = \frac{12}{R^3}A\mu\tau\sqrt{1-\tau^2}, \quad p = p_\infty + \frac{2\mu A(1-3\tau^2)}{R^3}$$

Отсюда следует, что условие прилипания жидкости к твердым стенкам в некоторых случаях можно совместить с условием обращения в нуль на стенках и скорости деформации сдвига. Иначе говоря, возможны случаи, в которых частицы среды, примыкающие к твердым стенкам, испытывают торможение не только по отношению к скорости поступательного перемещения, но и по отношению к скорости деформации сдвига, и только по отношению к ускорению деформации сдвига стенки не оказывают тормозящее влияние. В данном случае дополнительное тормозящее влияние стенок следует объяснить тем, что на всем протяжении стенок давление положительно и растет оно вместе с ростом модуля скорости с уменьшением величины сферического радиуса.

На оси симметрии ($\tau = 1$) касательное напряжение также обращается в нуль, а давление убывает

$$p_{R\theta} = 0, \; p = p_\infty - 4\mu A/R^3$$

Само собой разумеется, что полученные формулы не могут быть использованы для истечения под давлением жидкости через круглое отверстие в безграничной стенке. И это невозможно прежде всего по той причине, что начало сферического радиуса ($R = 0$) не будет в действительности представлять особенность течения, в которой скорость, давление и касательное напряжение обращались бы в бесконечность и притом — достаточно высокого порядка. В известной мере особенность течения может быть допущена на краю отверстия. Однако вдали от отверстия свойство течения не должно отличаться существенным образом от рассмотренного выше радиального течения, если исходные предпосылки остаются теми же самыми. В частности, можно допустить, что на стенке будет выполняться сильное условие торможения, о котором говорилось выше.

§ 1. Постановка задачи. Предположим, что вязкая среда занимает все пространство по одну сторону от безграничной стенки, имеющей круглое отверстие с радиусом $R = a$. Пусть с момента $t = 0$ на достаточном удалении от отверстия приложено давление p_∞, превышающее давление p_a снаружи отверстия. В первой фазе истечения жидкости через отверстие течение будет явно неустановившимся, но через некоторый интервал времени характеристики течения среды сравнительно мало будут меняться со временем. Будем рассматривать именно эту фазу почти установившегося течения вязкой среды и при этом сделаем следующие предположения.

1. Течение осесимметричное, т. е.

$$V_\varphi = 0, \qquad V_R = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \qquad V_\theta = -\frac{1}{R\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial\psi}{\partial R} \tag{1.1}$$

Здесь ψ — функция тока Стокса; V_φ, V_R, V_θ — компоненты скоростей; τ — косинус угла сферического радиуса, с началом в центре отверстия, с осью симметрии.

2. Течение достаточно медленное, что всеми слагаемыми от ускорения можно пренебречь.

3. Жидкость будем считать несжимаемой, а коэффициент ее вязкости постоянным. При этих предположениях дифференциальные уравнения течения имеют вид (1.2)

$$\frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{\mu}{R^2}\frac{\partial D\psi}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\mu}{1-\tau^2}\frac{\partial D\psi}{\partial R}, \qquad DD\psi = 0\left(D = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1-\tau^2}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right),$$

Здесь D — оператор Стокса, p — давление, μ — коэффициент вязкости. Для давления будет иметь место уравнение Лапласа

$$\Delta p = \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial p}{\partial R}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left[(1-\tau^2)\frac{\partial p}{\partial \tau}\right] = 0 \tag{1.3}$$

Единственная компонента вектора вихря будет представляться в виде

$$\omega_\varphi = \frac{1}{2R}\left[V_\theta + R\frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \sqrt{1-\tau^2}\,\frac{\partial V_R}{\partial \tau}\right] = -\frac{1}{2R\sqrt{1-\tau^2}}D\psi \tag{1.4}$$

Для скорости деформации сдвига будем иметь

$$\varepsilon_{R\theta} = -\frac{V_\theta}{2R} + \frac{1}{2}\frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{2R}\frac{\partial V_R}{\partial \tau} = -\omega_\varphi + \frac{\partial V_\theta}{\partial R} \tag{1.5}$$

Сформулируем граничные условия.

1. Условие симметрии

$$V_\theta = 0 \qquad (\tau = 1,\ 0 \leqslant R < \infty) \tag{1.6}$$

2. Условия на бесконечности

$$V_R \to 0,\ V_\theta \to 0,\ p \to p_\infty \qquad (R \to \infty,\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1) \tag{1.7}$$

3. Условие постоянства расхода

$$2\pi[\psi(R, 1) - \psi(R, 0)] = Q \tag{1.8}$$

4. Условие непроницаемости стенок

$$V_\theta = 0 \quad (\tau = 0,\ a < R \leqslant \infty) \tag{1.9}$$

5. Усиленное условие торможения на стенке

$$V_R = 0,\ \varepsilon_{R\theta} = 0 \ (\tau = 0,\ a < R < \infty) \tag{1.10}$$

6. Условие постоянства давления на площади выходного отверстия

$$p = p_a \ (\tau = 0,\ 0 \leqslant R < a) \tag{1.11}$$

7. Постоянство поперечной скорости на площади выходного отверстия

$$V_\theta = Q / \pi a^2 \qquad (\tau = 0,\ 0 \leqslant R \leqslant a) \tag{1.12}$$

8. Условие отсутствия радиальной скорости на площади отверстия

$$V_R = 0 \qquad (\tau = 0,\ 0 \leqslant R < a) \tag{1.13}$$

Первые четыре условия являются точными. Относительно пятого условия говорилось выше. Последние три условия являются приближенными и наиболее простыми.

§ 2. Решение уравнения для давления. Из условий (1.9) и (1.10) и равенств (1.5) и (1.4) получается, что вдоль всей стенки вихрь будет обращаться в нуль

$$\omega_\varphi = -\frac{1}{2R}\frac{D\psi}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0 \qquad (\tau = 0,\ a < R < \infty) \tag{2.1}$$

Так как это условие (2.1) будет выполняться при произвольном значении R в пределах от $R > a$ до $R = \infty$, то это условие можно продифференцировать по R; тогда получим

$$\frac{\partial D\psi}{\partial R} = 0 \qquad (\tau = 0,\ a < R < \infty)$$

Если учесть при этом уравнение (1.2), то будем иметь

$$\partial p / \partial \tau = 0 \ (\tau = 0,\ a < R < \infty) \tag{2.2}$$

Перейдем к цилиндрическим координатам r и z. В этих координатах уравнение (1.3) Лапласа для давления представится в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \tag{2.3}$$

а условия (1.7), (1.11) и (2.2) примут вид

$$p \to p_\infty \qquad (z \to \infty,\ a < r < \infty) \tag{2.4}$$

$$p = p_a \qquad (z = 0,\ 0 \leqslant r < a), \qquad \partial p / \partial z = 0 \qquad (z = 0, \qquad a < r < \infty)$$

Проведем сопоставление задачи об определении давления по уравнению (2.3) при условиях (2.4) с задачей о движении диска радиуса a в безграничной идеальной жидкости при условии, что движение жидкости является потенциальным. Решение этой задачи о движении диска приводится в книге Ламба [2] в виде

$$\varphi = \frac{2U}{\pi} \int_0^\infty e^{-kz} J_0(kz)\, k \frac{d}{dk} \frac{\sin ka}{k}\, dk \tag{2.5}$$

где U есть скорость поступательного движения диска параллельно положительному направлению оси z. Производная потенциала скоростей $\partial\varphi/\partial z$ также будет удовлетворять уравнению Лапласа, а на границе $z = 0$, как известно, будем иметь

$$\partial\varphi/\partial z = U \qquad (z = 0,\ 0 \leqslant r < a)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{2U}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{r} - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right] \qquad (z = 0,\ a < r < \infty)$$

Следовательно, если искомое давление представить в виде

$$p = p_\infty + \frac{p_a - p_\infty}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = p_\infty + \frac{2}{\pi}(p_a - p_\infty)\left[-\int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr)\, k \frac{d}{dk}\frac{\sin ka}{k}\, dk\right] \tag{2.6}$$

то уравнение Лапласа будет удовлетворяться и будут удовлетворяться и условия на площади отверстия и условие на бесконечности. Остается проверить выполнение условия об обращении в нуль $\partial p/\partial z$ на всей стенке, кроме точки $r = a$, в которой заведомо и само давление и ее первые производные обращаются в бесконечность. Имеем

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_a - p_\infty}{U}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{p_\infty - p_a}{U}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right] \tag{2.7}$$

Приведенное выше выражение (2.5) в книге Ламба построено по условиям:

$$\varphi = \frac{2U}{\pi}\sqrt{a^2 - r^2} \qquad (z = 0,\ r < a), \qquad \varphi = 0 \qquad (z = 0,\ r > a)$$

Из последнего условия с помощью дифференцирования по r получим

$$\partial\varphi / \partial r = 0 \qquad (z = 0,\ r > a)$$

Это условие означает, что в плоскости движущегося диска в идеальной жидкости радиальная скорость r обращается в нуль всюду за пределами диска. С помощью повторного дифференцирования по r получим

$$\partial^2\varphi / \partial r^2 = 0 \qquad (z = 0,\ r > a)$$

А тогда в силу равенства (2.7) получим

$$\partial p / \partial z = 0 \qquad (z = 0,\ r > a)$$

Таким образом, решение (2.6) уравнению Лапласа и всем поставленным условиям для давления удовлетворяет. Если бы вместо потенциала скоростей течения идеальной жидкости, обусловленного движением диска, взять потенциал скоростей истечения идеальной жидкости через круглое отверстие, представляемый в виде

$$\varphi = \frac{c}{2\pi a}\int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr)\sin ka\, \frac{dk}{k}$$

и удовлетворяющий условиям

$$\varphi = \frac{c}{a} \qquad (z = 0,\ r < a), \qquad \varphi = \frac{c}{2\pi a}\arcsin\frac{a}{r} \qquad (z = 0,\ r > a)$$

то для искомого давления можно взять следующее выражение:

$$p = p_\infty + \frac{2}{\pi}(p_a - p_\infty)\int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr)\sin ka\,\frac{dk}{k} \tag{2.9}$$

Уравнению Лапласа и всем условиям (2.4) правая часть (2.9) будет удовлетворять. Последнее условие (2.4) будет выполняться благодаря тому, что потенциал скоростей удовлетворяет условию непроницаемости стенки, $V_z = \partial\varphi/\partial z$ при $z = 0$ и $r > a$).

Таким образом, для давления получены два выражения (2.6) и (2.9). Различие этих выражений для давления проявляется в различии поведения давления на стенке за пределами отверстия. Так как на стенке цилиндрический радиус r равен сферическому радиусу R, то давление на стенке будет представляться в двух видах.

1. Согласно (2.6)

$$p = p_\infty + \frac{2}{\pi}(p_a - p_\infty)\left[\arcsin\frac{a}{R} - \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}\right] \qquad (z=0,\ R > a) \qquad (2.10)$$

2. Согласно (2.9)

$$p = p_\infty + \frac{2}{\pi}(p_a - p_\infty)\arcsin\frac{a}{R} \qquad (z=0,\ R > a) \qquad (2.11)$$

Если брать точки на стенке, достаточно удаленные от отверстия, то первые слагаемые разложения равенства (2.10) для больших значений R будут иметь вид

$$p = p_\infty + \frac{2}{\pi}(p_a - p_\infty)\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{R}\right)^3 - \frac{3}{10}\left(\frac{a}{R}\right)^5 - \ldots\right] \qquad (2.12)$$

а первые слагаемые разложения равенства (2.11) будут представляться в виде

$$p = p_\infty + \frac{2}{\pi}(p_a - p_\infty)\left[a/R + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{R}\right)^3 + \frac{3}{40}(a/R)^5 + \ldots\right] \qquad (2.13)$$

Сопоставляя равенства (2.12) и (2.1 с формулой для давления, приведенной выше для течения в конусе, можно утверждать, что изменение давления на стенке, представляемое формулой (2.12), по характеру своей зависимости от сферического радиуса ближе к зависимости давления для радиального течения в конусе, чем изменение давления , представляемое формулой (2.13). Кроме того, давление, представляемое формулой (2.12), увеличивается по мере приближения к отверстию, что и обеспечивает усиленное торможение движения прилегающих к стенке частиц, принимаемое условием (1.10). По формуле (2.13) давление непрерывно уменьшается при уменьшении сферического радиуса R, и это уменьшение не может находиться в согласии с условием (1.10). Таким образом, следует отдать предпочтение формуле для давления (2.6), а не формуле (2.9). Далее будет показано, что и кинематические условия (1.7) для скоростей могут быть выполнены только при давлении, представляемом формулой (2.6).

Если в (2.6) перейти к сферическим координатам, т. е. положить

$$z = R\cos\theta, \qquad r = R\sin\theta$$

то получим

$$p = p_\infty + \frac{2}{\pi}(p_a - p_\infty)\int\limits_0^\infty e^{-kR\cos\theta} J_0(kR\cos\theta)\left(\frac{\sin ka}{k} - a\cos ka\right)dk \qquad (2.14)$$

Интегралы в правой части (2.14) можно вычислить [3] (стр. 777), и тогда будем иметь

$$\frac{p - p_\infty}{p_a - p_\infty} = \frac{2}{\pi}\left\{\arcsin\left[\frac{2a}{\sqrt{R^2 + 2Ra\sin\theta + a^2} + \sqrt{R^2 - 2Ra\sin\theta + a^2}}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{R^4 - 2R^2a^2(1 - 2\cos^2\theta) + a^4} + R^2 - a^2}{R^4 - 2R^2a^2(1 - 2\cos^2\theta) + a^4}\right)^{1/2}\right\} \qquad (2.15)$$

Раскладывая в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки сначала выражение $\sqrt{R^2 \pm 2Ra\sin\theta + a^2}$, а затем первое и второе слагаемые формулы (2.15) и выписывая только слагаемые со степенью $(a/R)^7$, получим

$$p = p_\infty + \frac{2}{\pi}(p_a - p_\infty)\left[\frac{2}{3}\left(\frac{a}{R}\right)^3 P_2(\tau) - \frac{4}{5}\left(\frac{a}{R}\right)^5 P_4 + \frac{6}{7}\left(\frac{a}{R}\right)^7 P_6 - \ldots\right] \quad (2.16)$$

где $P_2(\tau)$, $P_4(\tau)$ и $P_6(\tau)$ — полиномы Лежандра.

Проведем теперь разложение правой части (2.15) в окрестности начала координат ($R = 0$). Разложение второго слагаемого (2.15) будет представляться в виде

$$f(R, \theta) = \frac{R}{a}P_1(\tau) - \left(\frac{R}{a}\right)^3 P_3 + \left(\frac{R}{a}\right)^5 P_5 - \left(\frac{R}{a}\right)^7 P_7 + \ldots \qquad (2.17)$$

Проведем разложение второго слагаемого

$$q(R, \theta) = \int_0^\infty \exp(-kR\cos\theta) J_0(kR\sin\theta) \frac{\sin ka}{k} dk$$

Если использовать известные ряды для e^x и $J_0(x)$ и провести перемножение этих рядов, а затем почленное интегрирование в правой части (2.17), то получим

$$q(R, \theta) = 1 - \frac{2}{\pi}\left[\frac{R}{a} P_1 - \frac{1}{3}\left(\frac{R}{a}\right)^3 P_3 + \frac{1}{5}\left(\frac{R}{a}\right)^5 - \ldots\right] \qquad (2.18)$$

Складывая разложения (2.17) и (2.18), получим

$$\frac{p - p_\infty}{p_a - p_\infty} = 1 - \frac{2}{\pi}\left[2\frac{R}{a} P_1 - \frac{4}{3}\left(\frac{R}{a}\right)^3 P_3 + \frac{6}{5}\left(\frac{R}{a}\right)^5 P_5 - \ldots\right] \qquad (2.19)$$

Таким образом, получены разложения давления как в окрестности бесконечно удаленной точки, так и в окрестности начала координат.

§ 3. Определение поля скоростей в окрестности бесконечно удаленной точки. Давление можно представить в виде ряда по отрицательным степеням сферического радиуса, R,

$$p = p_\infty + \sum_{i=1}^\infty \frac{\varphi_i(\tau)}{R^i}$$

Тогда после подстановки этого ряда в уравнение (1.4) для определения функции φ_i получим уравнение Лежандра. Так как функции Лежандра второго рода будут обращаться на оси симмётрии ($\tau = 1$) в бесконечность, то для функции φ_i могут быть взяты только полиномы Лежандра $P_{i-1}(\tau)$. Тогда для давления будем иметь следующий ряд:

$$p = p_\infty + \sum_{i=1}^\infty \frac{E_i}{R^i} P_{i-1}(\tau) \qquad (3.1)$$

Таким образом, индекс полинома Лежандра на единицу меньше показателя степени сферического радиуса в знаменателе. Если этот ряд отождествить либо с рядом (2.12), либо с рядом (2.13), то входящие в (3.1) постоянные множители будут определены. Пока не будем предрешать, с каким из этих рядов необходимо отождествлять ряд (3.1), но будем считать все коэффициенты E_i известными.

Представим и функцию тока в виде ряда по отрицательным степеням R

$$\psi = R\chi(\tau) + \sum_{i=1}^\infty \frac{f_i(\tau)}{R^{i-1}} \qquad (3.2)$$

Воздействуя на обе части этого равенства оператором Стокса, получим

$$D\psi = \frac{1-\tau^2}{R}\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + \sum_{i=1}^\infty \frac{i(i-1) f_i + (1-\tau^2) f_i''}{R^{i+1}} \qquad (3.3)$$

Если взять одно из дифференциальных уравнений (1.2), подставить в него ряды (3.1) и (3.3) и отождествить коэффициенты при одинаковых степенях R, то для определения коэффициентов ряда (3.2) получим следующие дифференциальные уравнения

$$E_1 = 0, \qquad \mu\frac{d}{d\tau}\left[(1-\tau^2)\frac{d^2\chi}{d\tau^2}\right] = 2E_2 P_1$$
$$\mu\frac{d}{d\tau}\left[i(i-1) f_i + (1-\tau^2) f_i''\right] = (i+2) E_{i+2} P_{i+1}(\tau) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \qquad (3.4)$$

Первое равенство (3.4) означает, что ряд (3.1) для давления не может содержать слагаемого с первой отрицательной степенью R. А тогда нет возможности отождествить ряд (3.1) с рядом (2.13), т. е. решение (2.9) для давления должно быть исключено из рассмотрения. Обращение коэффициента E_1 в нуль случилось потому, что для функции тока взят ряд (3.2), содержащий R только в первой положительной степени. Этот коэффициент E_1 оказался бы отличным от нуля, если бы в ряд (3.2) было бы включено и слагаемое со второй степенью R, но этого сделать было нельзя, так как компонента скорости V_θ, представляемая через функцию тока в виде

$$V_\theta = -\frac{1}{R\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial\psi}{\partial R}$$

имела бы слагаемое с множителем R в первой положительной степени, а это обстоятельство не позволило бы удовлетворить условию (1.7) на бесконечности.

Интегрируя один раз уравнение для χ, получим

$$\mu(1-\tau^2)\frac{d^2\chi}{d\tau^2}=E_2(\tau^2+C_1)$$

Соответственные компоненты вектора скорости будут представляться в виде

$$V_R=-\frac{1}{R}\frac{d\chi}{d\tau}, \qquad V_\theta=-\frac{\chi}{R\sqrt{1-\tau^2}}$$

В выражениях (1.5) и (1.4) входит произведение вида

$$\sqrt{1-\tau^2}\frac{\partial V_R}{\partial\tau}=-\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\mu R}\frac{E_2(\tau^2+C_1)}{1-\tau^2}$$

Следовательно, если дополнительно потребовать ограниченность вихря и скорости деформации сдвига на оси симметрии ($\tau=1$), то в последнем равенстве необходимо положить $C_1=-1$ и, кроме того, считать, что на оси симметрии обращаются в нуль вторые производные $f_i''(\tau)$. При этом условии функция χ будет представляться в виде

$$\chi(\tau)=-\frac{1}{2\mu}E_2\tau^2+C_2\tau+C_3$$

Если для определения постоянных использовать условия (1.6), (1.9) и первое условие (1.10), то получим три однородных уравнения, из которых будет следовать, что все постоянные C_2, C_3 и E_2 будут обращаться в нуль. Таким образом, в ряде (3.1) для давления не будет слагаемого и со второй отрицательной степенью R. Обозначим

$$\int_1^\tau P_{i-1}(\tau)\,d\tau=I_i(\tau)=\frac{1}{2i-1}[P_i-P_{i-2}] \tag{3.5}$$

то все остальные уравнения (3.4) представятся в виде

$$(1-\tau^2)f_1''=\frac{3E_3}{\mu}I_3,\ \ldots,\ (1-\tau^2)f_n''+n(n-1)f_n=\frac{n+2}{\mu}E_{n+2}I_{n+2} \tag{3.6}$$

Решения этих уравнений, регулярные на оси симметрии ($\tau=1$), имеют вид

$$f_1=A+B\tau-\frac{E_3}{2\mu}I_3,\ \ldots,\ f_n=C_nI_n-\frac{n+2}{2(2n+1)\mu}E_{n+2}I_{n+2} \tag{3.7}$$

Принимая функцию тока на оси симметрии равной нулю и используя условие (1.8), получим $A=-B=-Q/2\pi$, Функции f_1 отвечает чисто радиальное течение, скорость которого на основании (1.1), (3.7) и (3.5) будет представляться в виде

$$V_{1R}=-\frac{Q}{2\pi R^2}+\frac{E_3}{2\mu R^2} \qquad P_2=-\frac{Q}{2\pi R^2}+\frac{E_3}{4\mu R^2}(3\tau^2-1) \tag{3.8}$$

Отсюда видно, что скорость деформации сдвига, представляемая (1.5), будет обращаться в нуль на стенке ($\tau=0$), независимо от того, как будет представляться разложение давления в окрестности бесконечно удаленной точки и какое условие будет накладываться на саму скорость V_{1R} на стенке. Подчиняя V_{1R} условию прилипания (1.10), получим $Q=-E_3\pi/2\mu$. Если использовать разложение (2.12), то получим следующую формулу для зависимости расхода от разности давлений, коэффициента вязкости и радиуса отверстия

$$Q=\frac{2}{3\mu}a^3(p_\infty-p_a)$$

При течении вязкой жидкости в цилиндрической трубе потеря давления происходит благодаря действию вязкого трения на стенках. В случае выдавливания вязкого вещества через круглое отверстие в безграничной стенке потеря давления происходит, как следует из (1.2) и (1.4), на образование завихренности движения во всем объеме.

Обращаемся теперь к остальным слагаемым (3.7) ряда (3.2) для функции тока. Этим слагаемым будут отвечать обе составляющие V_{nR} и $V_{n\theta}$, представляемые в виде

$$V_{nR}=-\frac{1}{R^{n+1}}\left[C_nP_{n-1}(\tau)-\frac{n+2}{2(2n+1)\mu}E_{n+2}P_{n+1}(\tau)\right]$$

$$V_{n\theta}=\frac{(n-1)}{\sqrt{1-\tau^2}R^{n+1}}\left[C_nI_n-\frac{n+2}{2(2n+1)\mu}E_{n+2}I_{n+2}\right]$$

Так как имеем

$$I_n(\pm 1) = 0 \qquad \text{для } n \geqslant 2$$

$$I_{2n+1}(0) = 0, \quad I_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!}$$

то условие (1.6) будет выполняться для всех n, а условие (1.9)— для всех нечетных n; для выполнения условия (1.9) для четных n должно выполняться следующее соотношение между постоянными:

$$C_{2n} = -\frac{2n-1}{2\mu(4n+1)} E_{2n+2} \tag{3.9}$$

При выполнении условия обращения радиальной скорости в нуль на стенке получим следующие равенства для постоянных с нечетным индексом n:

$$C_{2n+1} = -\frac{(2n+3)(2n+1)}{4\mu(n+1)(4n+3)} E_{2n+3} \tag{3.10}$$

Таким образом, все постоянные, входящие в ряд (3.2) для функции тока, будут определены, если будут известны все коэффициенты ряда (3.1) для давления. При этом не потребовалось условия обращения скорости сдвига в нуль на стенке. Однако выполнение условий прилипания к стенкам, на бесконечности и ограниченности скорости деформации на оси симметрии оказалось возможным лишь при условии, что ряд (3.1) не будет содержать слагаемых с $1/R$ и $1/R^2$. Этому условию удовлетворяет одно из двух построенных решений в § 2 для давления, но при этом было использовано дополнительное условие обращения в нуль на стенке и скорости деформации сдвига; при его выполнении получим

$$C_{2n} = E_{2n+2} = 0$$

§. **4. Определение поля скоростей в окрестности начала координат.** В окрестности начала координат представим давление и функцию тока в виде рядов по положительным степеням R

$$p = p_a + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \psi_n(\tau), \qquad \psi = \sum_{n=2}^{\infty} R^n F_n(\tau) \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в уравнение (1.4), получим

$$\psi_k(\tau) = D_k P_k(\tau) \tag{4.2}$$

где P_k — полиномы Лежандра, а D_n — произвольные постоянные. При воздействии на функцию тока ψ (4.1) оператором Стокса получим

$$D\psi = \sum_{n=2}^{\infty} R^{n-2} [n(n-1) F_n + (1-\tau^2) F_n''] \tag{4.3}$$

Подставляя (4.2) и (4.3) во второе уравнение (1.2), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях R и разрешая полученные обыкновенные дифференциальные уравнения для F_k при требовании ограниченности V_R и V_0 на оси симметрии (при $\tau = 1$), получим

$$F_2 = A_2 I_2, \qquad F_k = A_k I_k - \frac{(k-3) D_{k-3}}{2(2k-3)\mu} I_{k-2} \qquad (k = 3, \ldots) \tag{4.4}$$

При выполнении условий (1.12) и (1.13) получим выражения для постоянных:

$$A_2 = Q / \pi a^2, \qquad A_{2k} = -\frac{k}{\mu(4k-3)} D_{2k-3} \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{4.5}$$

$$A_{2k+1} = -\frac{2k(k-1)}{\mu(2k-1)(4k-1)} D_{2k-1} \qquad (k = 1, \ldots)$$

Таким образом, если коэффициенты разложения (4.2) давления в окрестности начала координат известны, то равенствами (4.5) будут определяться все коэффициенты разложения (4.1) функции тока в той же окрестности. В частности, при использовании для давления разложения (2.19) будем иметь $(k = 1, 2, \ldots)$

$$D_{2k} = 0, \quad A_{2k+1} = 0, \quad A_{2k} = (-1)^k \frac{2}{\pi} (p_a - p_\infty) \frac{k(2k-2)}{\mu(4k-3) a^{2k-3}} \frac{1}{2k-3}$$

$$\psi = \frac{Q}{\pi a^2} R^2 I_2 + \frac{4a^3}{\mu\pi}(p_\infty - p_a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)(2n-3)}{(2n-3)(4n-3)} \left(\frac{R}{a}\right)^{2n} \left[nI_{2n} + \frac{2n-3}{2} I_{2n-2}\right]$$

$$V_R = -\frac{Q}{\pi a^2}\tau + \frac{4a(p_\infty - p_a)}{\mu\pi\sqrt{1-\tau^2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{(2n-3)(4n-3)} \left(\frac{R}{a}\right)^{2n-2} \times$$
$$\times \left[nP_{2n-1} + \frac{2n-3}{2} P_{2n-3}\right]$$

$$V_\theta = \frac{Q}{\pi a^2}\sqrt{1-\tau^2} - \frac{4a(p_\infty - p_a)}{\mu\pi\sqrt{1-\tau^2}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n(n-1)}{(2n-3)(4n-3)} \left(\frac{R}{a}\right)^{2n-2} \times$$
$$\times \left[nI_{2n} + \frac{2n-3}{2} I_{2n-2}\right]$$

Рассматриваемая задача о выдавливании вязкого вещества через круглое отверстие в безграничной стенке решена в том смысле, что получено замкнутое выражение для давления, справедливое для всей области, расположенной выше стенки, получены разложения для компонент скоростей как в окрестности бесконечно удаленной точки, так и в окрестности начала координат, и получена конкретная формула для зависимости расхода от конечного перепада давления. Так как все коэффициенты разложений для скоростей определены, то нет необходимости исследовать вопрос о сопряжении полученных разложений для каких-то промежуточных значений сферического радиуса. Из сопоставления разложений (2.16) и (2.19) видно что эти два разложения для давления не могут быть отождествлены на полусфере с радиусом $R = a$ в том смысле, что при $R = a$ коэффициенты при полиномах Лежандра с одинаковым индексом могут быть приравнены друг другу; в одном разложении индексы являются нечетными, а в другом — четными. Следовательно, нельзя ставить вопрос об отождествлении в указанном смысле и разложений для скоростей V_θ и V_R на полусфере с радиусом $R = a$.

Для давления линия отверстия в стенке является особой линией, и по этой причине разложения (2.16) и (2.19) могут иметь место при значениях R, отличных от a. Идея использования «внутренних разложений» и «внешних разложений» искомых функций применялась ранее, например, в задаче об асимптотическом пограничном слое. В этом частном случае смыкание внешнего и внутреннего разложений искомой функции оказалось возможным для промежуточного, заранее неизвестного значения независимого переменного по той причине, что для всех промежуточных значений искомая функция была непрерывной. В рассматриваемом случае вопрос о смыкании «внешнего» и «внутреннего» разложений функции тока осложнен не только тем, что это смыкание должно проводиться не в точке, а на некоторой поверхности, но и тем, что линеаризированная постановка задачи не позволяет избежать появления точек разрыва производных искомой функции.

Поступило 4.I.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Движение вязкой жидкости в конусе и между двумя конусами. Матем. сб., 1935, т. 42, № 1.
2. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ТИКСОТРОПНЫХ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

М. Х. АГАЕВ, А. Х. МИРЗАДЖАН-ЗАДЕ, М. К. СЕИД-РЗА, Н. М. ШЕРСТНЕВ

(Баку)

Одной из особенностей целого ряда вязко-пластичных жидкостей (например, глинистого раствора, применяющегося в качестве промывочной жидкости при бурении скважины) является способность их со временем изменять структурно-механические свойства. Отмеченное явление, в частности, в значительной степени влияет на гидродинамические условия проводки скважины и требует определенных исследований.

С этой целью была проведена серия экспериментальных работ, начатых в АзНИИ-бурнефть еще в 1961 г. В начале опыты проводились на установке, схема которой приведена на фиг. 1, *а*. Эта установка состояла из колонны *1*, которая была собрана из втулок известняка апшеронских отложений внутренним диаметром 0.085 *м*, длиной 0.2—0.25 *м*. Общая длина колонны составила 16 *м*. К нижнему концу колонны для измере-