

НЕСТАЦИОНАРНОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ С ОТОШЕДШЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Г. Ф. ТЕЛЕНИН, Ю. М. ЛИПНИЦКИЙ

(Москва)

Численный метод расчета сверхзвукового пространственного обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной, изложенный в работах [1—3], применяется для случая нестационарного обтекания. Постановка нестационарной задачи аналогична работе [4], предполагающей малость нестационарных возмущений.

В работе приводятся некоторые результаты исследования нестационарного обтекания затупленных тел в широком диапазоне изменения числа $M_\infty = 1.50 - \infty$ и безразмерной частоты колебания $\omega L/V_\infty = 0 - 1.0$. Дано сравнение с результатами, полученными по теории Ньютона.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим сверхзвуковое обтекание затупленного тела произвольной формы, имеющего плоскость симметрии и совершающего в этой плоскости угловые колебания по закону

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t \quad (1.1.1)$$

Относительно среднего угла атаки β_0 , так что суммарный угол атаки

$$\beta = \beta_0 + \alpha_0 \cos \omega t \quad (1.1.2)$$

Центр колебаний расположен в плоскости симметрии произвольно; Если тело осесимметрично, то центр, в частности, может быть расположен на оси. В качестве неподвижной (абсолютной) системы координат выберем прямоугольную систему координат x', y', z' , в которой набегающий сверхзвуковой поток движется со скоростью V_∞ вдоль оси x' .

В задачах аэродинамики обычно с большой точностью выполняются условия

$$\alpha_0 \ll 1, \quad \alpha_0 \frac{\omega L}{V_\infty} \ll 1 \quad (1.2)$$

обеспечивающие малость скоростей перемещения точек поверхности тела в направлении нормали по сравнению со скоростью набегающего потока V_∞ . Если центр колебаний находится внутри тела, то L — характерный размер тела. В случае, когда центр колебаний вынесен далеко за пределы тела (например, линейные колебания в направлении вектора скорости V_∞), то L — характерное расстояние от центра до тела. Условия (1.2) необходимы для того, чтобы нестационарные возмущения, вызываемые колебанием тела, были малы.

Ограничиваясь линейным приближением по амплитуде колебаний, представим параметры газа: вектор абсолютной скорости V , давление p и плотность ρ в следующем виде:

$$V = V_0 + \alpha V_\alpha + \alpha' V_{\alpha'}, \quad P = P_0 + \alpha p_\alpha + \alpha' p_{\alpha'}, \quad \rho = \rho_0 + \alpha \rho_\alpha + \alpha' \rho_{\alpha'} \quad (1.3)$$

Параметры с индексом 0 описывают основное поле, возникающее при стационарном обтекании тела под углом атаки β_0 ; параметры с индексами α и α' описывают поля нестационарных возмущений, находящихся в фазе с углом атаки и угловой скоростью соответственно.

Постановка задачи стационарного обтекания тела с отошедшей ударной волной подробно рассмотрена в работе [2]. При рассмотрении постановки задачи нестационарного обтекания затупленного тела в рамках метода малых возмущений возникают два основных вопроса.

Во-первых, являются ли условия (1.2) достаточными для малости нестационарных возмущений. Во-вторых, имеет ли распространение малых возмущений в трансзвуковой области за отошедшей ударной волной линейный характер, описывается ли оно линейными уравнениями, получающимися линеаризацией полной нелинейной системы уравнений газовой динамики.

Кроме дифференциальных уравнений, величину и характер распространения нестационарных возмущений определяют два фактора: изменения в граничном условии на теле и изменение скорости распространения различных точек ударной волны относительно набегающего потока. Система линейных уравнений для нестационарных возмущений имеет те же свойства, что и для стационарных возмущений, так как они отличаются только правыми частями (см. [4] и ниже). Поэтому поставленные два вопроса можно рассмотреть, используя результаты расчетов стационарного обтекания затупленных тел. Отметим, что правые части зависят не только от функций с индексом 0, но и от их производных.

Анализ результатов систематических исследований стационарного обтекания [5—7] показывает, что малые изменения формы тела и угла атаки (возмущение граничного условия) и скорости набегающего потока (возмущение скорости распространения ударной волны относительно набегающего потока) вызывают малые возмущения поля во всей области между ударной волной и телом, за исключением двух случаев: обтекания тел при числах M_∞ , близких к единице, и обтекания тел с изломом образующей (или очень малым радиусом кривизны) в звуковой точке. В первом случае малые изменения скорости распространения ударной волны относительно набегающего потока вызывают большие изменения ее отхода. Более подробно о нелинейном характере нестационарных возмущений при числах M_∞ , близких к единице, будет сказано при анализе результатов в § 3. Во втором случае малые изменения в граничном условии в окрестности звуковой точки приводят к большим изменениям градиентов газодинамических параметров. В частности, при малом изменении угла атаки течение может перейти от гладкого к течению с особенностью в звуковой точке.

Для ответа на вопрос о нелинейности распространения малых возмущений в трансзвуковой области за отошедшей ударной волной были проведены специальные расчеты обтекания под небольшим углом атаки тел различной формы и при различных числах M_∞ при помощи пространственной разностной схемы [3,7] и по методу возмущений (система (1.5) при $\omega = 0$). Результаты расчетов показывают, что возмущения во всей области между ударной волной и телом (включая трансзвуковую область) хорошо описываются линейными уравнениями. Таким образом (за исключением двух указанных предельных случаев), если выполнены условия (1.2), параметры потока можно представить в виде (1.3) и метод малых возмущений должен давать хорошие результаты.

Отметим, что это положение может быть доказано строго для нестационарного обтекания сферы, совершающей медленные ($\omega L/V_\infty \ll 1$) колебания относительно смещенного центра. В этом случае точное решение систем уравнений для нестационарных возмущений явно выражается через производные от газодинамических величин стационарного обтекания [4].

Подставляя разложение (1.3) в систему уравнений газовой динамики, записанную для абсолютного движения в подвижной, жестко связанной с телом системе координат, для определения параметров с индексами 0, α и α' получим следующие уравнения в частных производных:

$$\text{для стационарного обтекания тела} \quad (1.4)$$

$$\text{grad } \frac{V_0^2}{2} - \mathbf{V}_0 \times \text{rot } \mathbf{V}_0 = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p_0, \quad \text{div } (\rho_0 \mathbf{V}_0) = 0, \quad \mathbf{V}_0 \text{ grad } \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = 0$$

$$\text{для возмущений в фазе с } \alpha \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathbf{V}_{\alpha'} + \text{grad } (\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_\alpha) - \mathbf{V}_0 \times \text{rot } \mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\alpha \times \text{rot } \mathbf{V}_0 &= \\ &= \frac{\rho_\alpha}{\rho_0^2} \text{grad } p_0 - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p_\alpha \end{aligned}$$

$$-\omega^2 \rho_{\alpha'} + \text{div } (\rho_0 \mathbf{V}_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{V}_0) = 0$$

$$-\omega^2 \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \left(\frac{\rho_{\alpha'}}{\rho_0} - \gamma \frac{\rho_\alpha}{\rho_0} \right) + \mathbf{V}_0 \text{ grad } \left[\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \left(\frac{p_\alpha}{p_0} - \gamma \frac{\rho_\alpha}{\rho_0} \right) \right] + \mathbf{V}_\alpha \text{ grad } \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = 0$$

для возмущений в фазе с α' (1.6)

$$\begin{aligned} V_\alpha + \text{grad} [V_0 (V_{\alpha'} - V_{e\alpha'})] - V_0 \times \text{rot} V_{\alpha'} - (V_{\alpha'} - V_{e\alpha'}) \times \text{rot} V_0 = \\ = \frac{\rho_{\alpha'}}{\rho_0^2} \text{grad} p_0 - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} p_{\alpha'}, \quad \left(V_{e\alpha'} = \frac{V_e}{\alpha} \right) \\ \rho_\alpha + \text{div} (\rho_{\alpha'} V_0 + \rho_0 V_{\alpha'}) - V_{e\alpha'} \cdot \text{grad} \rho_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \left(\frac{p_\alpha}{p_0} - \gamma \frac{\rho_\alpha}{\rho_0} \right) + V_0 \cdot \text{grad} \left[\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \left(\frac{p_{\alpha'}}{p_0} - \gamma \frac{\rho_{\alpha'}}{\rho_0} \right) \right] + (V_{\alpha'} - V_{e\alpha'}) \cdot \text{grad} \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) = 0$$

Здесь V_e — вектор переносной скорости,

В качестве подвижной системы координат будем рассматривать жестко связанные с телом прямоугольную систему координат x, y, z (с осями $\mathbf{i}, \mathbf{f}, \mathbf{k}$) и сферическую систему координат r, θ, ψ (с осями $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\psi$) (фиг.1), полюс которой располагается, исходя из удобства интегрирования нелинейной системы (1.4). Для определения решения имеем дополнительные условия.

Граничное условие, выражающее отсутствие протекания газа через поверхность твердого тела:

$$(V - V_e) \cdot \text{grad} r^{(1)} = 0 \quad (1.7)$$

Здесь $r = r^{(1)}(\theta; \psi)$ — уравнение поверхности тела в подвижной системе координат. После линеаризации условие (1.7) примет вид

$$\begin{aligned} V_0 \cdot \text{grad} r^{(1)} = 0, \quad V_\alpha \cdot \text{grad} r^{(1)} = 0 \\ (V_{\alpha'} - V_{e\alpha'}) \cdot \text{grad} r^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Условия перехода через подвижный скачок уплотнения

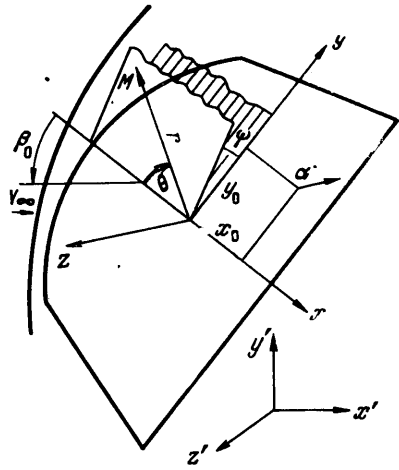
$$\begin{aligned} V_\infty t_1 = V t_1, \quad V_\infty t_2 = V t_2 \\ \rho_\infty (V_{\text{con}} - N - V_{en}) = \rho (V_n - N - V_{en}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \rho_\infty (V_{\text{con}} - N - V_{en})^2 + p_\infty = \rho (V_n - N - V_{en})^2 + p \\ \frac{(V_{\text{con}} - N - V_{en})^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} = \frac{(V_n - N - V_{en})^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \end{aligned}$$

где в двух первых равенствах t_1 и t_2 — два взаимно перпендикулярных вектора, лежащих в плоскости, касательной к поверхности скачка в данной точке, а N — относительная скорость перемещения точки поверхности скачка в направлении нормали.

Системы дифференциальных уравнений и дополнительные условия записаны в безразмерном виде, причем масштаб времени L/W_m (L — характерная длина, W_m — скорость истечения в вакуум), масштаб длины L , масштаб скорости W_m , масштабы давления $\rho_\infty W_m^2$ и плотности ρ_∞ .

Следует отметить, что характерной скоростью задачи является не W_m , а V_∞ . Чтобы выразить скорости V и p , отнесенные к V_∞ и $\rho_\infty V_\infty^2$, через



Фиг. 1

безразмерные величины, достаточно воспользоваться соотношением

$$\left(\frac{V_\infty}{W_m}\right)^2 = \frac{(\gamma - 1) M_\infty^2}{(\gamma - 1) M_\infty^2 + 2} \quad (1.10)$$

Запишем уравнение скачка уплотнения в подвижной системе координат $r = r^{(2)}(t; \theta; \psi)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi(t; r; \theta; \psi) = r - r^{(1)}(\theta; \psi) - \varepsilon_0(\theta; \psi) - \alpha \varepsilon_\alpha(\theta; \psi) - \alpha' \varepsilon_{\alpha'}(\theta; \psi) &= 0 \\ \varepsilon(t; \theta; \psi) = \varepsilon_0(\theta; \psi) + \alpha \varepsilon_\alpha(\theta; \psi) + \alpha' \varepsilon_{\alpha'}(\theta; \psi) & \quad (1.11) \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon(t; \theta; \psi)$ — отход скачка уплотнения от тела. Тогда

$$N = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (1.12)$$

Единичный вектор нормали к поверхности ударной волны может быть представлен в форме

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla \Phi|^2}} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\psi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right\} \quad (1.13)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= n_r \mathbf{e}_r + n_\theta \mathbf{e}_\theta + n_\psi \mathbf{e}_\psi \\ n_r &= n_{r0} + \alpha n_{r\alpha} + \alpha' n_{r\alpha'}, \quad n_\theta = n_{\theta0} + \alpha n_{\theta\alpha} + \alpha' n_{\theta\alpha'}, \\ n_\psi &= n_{\psi0} + \alpha n_{\psi\alpha} + \alpha' n_{\psi\alpha'} \end{aligned}$$

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\psi$ — орты сферической системы координат.

Линеаризуя (1.13), получим выражения для n_{ij} , где $i = r, \theta, \psi$; $j = 0, \alpha, \alpha'$. В качестве \mathbf{t}_1 можно взять вектор

$$\mathbf{t}_1 = n_\theta \mathbf{e}_r + (-n_r) \mathbf{e}_\theta + 0 \cdot \mathbf{e}_\psi \quad (1.14)$$

так как этот вектор направлен по касательной к линии сечения поверхности скачка меридиональной плоскостью $\psi = \text{const}$, проходящей через данную точку этой поверхности. Вектор \mathbf{t}_2 можно представить в виде

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{n} \quad (1.15)$$

Величины t_{1ij} и t_{2ij} выражаются через n_{ij} . Если использовать разложения для $\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ и соотношение

$$\begin{aligned} f(t; r^{(2)}; \theta; \psi) = f_0(r_0^{(2)}; \theta; \psi) + \frac{\partial f_0(r; \theta; \psi)}{\partial r} \Big|_{r=r_0^{(2)}} (\alpha \varepsilon_\alpha + \alpha' \varepsilon_{\alpha'}) + \\ + \alpha f_\alpha(r_0^{(2)}; \theta; \psi) + \alpha' f_{\alpha'}(r_0^{(2)}; \theta; \psi) \end{aligned} \quad (1.16)$$

где f — любой газодинамический параметр и произвести линеаризацию системы (1.9), то получим соотношения для параметров с индексом 0, α, α' , которые должны удовлетворяться на поверхности невозмущенного скачка уплотнения при $r = r_0^{(2)}(\theta, \psi) = r^{(1)}(\theta; \psi) + \varepsilon_0(\theta; \psi)$.

Таким образом, решение общей нестационарной задачи сводится к интегрированию нелинейной системы дифференциальных уравнений стационарного обтекания тела и связанных между собой двух линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами для возмущений, находящихся в фазе с α и α' , при соответствующих граничных условиях на теле и соотношениях на скачке уплотнения. В общем случае все системы уравнений трехмерные.

Если рассматривать медленные колебания ($\omega L/V_\infty \ll 1$), так что величинами порядка $(\omega L/V_\infty)^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей, то системы уравнений (1.5), (1.6) для возмущений разделяются.

Следует заметить, что в работе [4] получено аналитическое решение для нестационарного обтекания сферы, совершающей медленные колеба-

ния ($\omega L/V_\infty \ll 1$) относительно смещенного центра. Решения систем уравнений для возмущений, находящихся в фазе с углом атаки (1.5) и угловой скоростью (1.6), в этом случае явно выражаются через производные от газодинамических величин стационарного обтекания тела

$$V_\alpha = \text{grad} (V_{e\alpha}^{**} V_0) - V_{e\alpha}^* \times \text{rot} V_0, \quad f_\alpha = V_{e\alpha}^{**} \text{grad} f_0 \quad (1.17)$$

$$V_\alpha - V_{e\alpha}^* = -\frac{x_0}{V_\infty} \left(V_\alpha \cos \beta_0 + M_\infty \frac{\partial V_0}{\partial M_\infty} \sin \beta_0 \right)$$

$$f_\alpha = -\frac{x_0}{V_\infty} \left(f_\alpha \cos \beta_0 + M_\infty \frac{\partial f_0}{\partial M_\infty} \sin \beta_0 \right)$$

где V_e^* — переносная скорость поступательного движения центра сферы, а V_e^{**} — переносная скорость вращательного движения относительно центра сферы

$$V_e = V_e^* + V_e^{**}, \quad V_{e\alpha}^* = \frac{V_e^*}{\alpha}, \quad V_{e\alpha}^{**} = \frac{V_e^{**}}{\alpha} \quad (1.18)$$

§ 2. Основные уравнения. Если записать уравнения (1.4) — (1.6) в сферической системе координат r, θ, ψ (проекции вектора скорости соответственно на орты u, v, w), ввести новую переменную

$$\xi = \frac{r - r^{(1)}(\theta; \psi)}{r^{(2)}(\theta; \psi) - r^{(1)}(\theta; \psi)}, \quad r^{(2)}(\theta; \psi) = r^{(1)}(\theta; \psi) + \varepsilon_0(\theta; \psi) \quad (2.1)$$

и разрешить полученные уравнения относительно производных газодинамических величин по ξ , то системы (1.4) — (1.6) примут вид:

для стационарного обтекания тела

$$\frac{\partial p_0}{\partial \xi} = \frac{1}{\Delta_0} [\gamma p_0 (R_{10} + B_\theta R_{20} + B_\psi R_{30} + A_0 R_{40}) + A_0 R_{50}]$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} = \frac{\rho_0}{\gamma p_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial \xi} + \frac{R_{50}}{A_0} \right), \quad \frac{\partial u_0}{\partial \xi} = \frac{1}{A_0} \left(R_{10} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial \xi} = \frac{1}{A_0} \left(\frac{B_\theta}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \xi} - R_{20} \right), \quad \frac{\partial w_0}{\partial \xi} = \frac{1}{A_0} \left(\frac{B_\psi}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \xi} - R_{30} \right) \quad (2.2)$$

$$\Delta_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} (1 + B_\theta^2 + B_\psi^2) - A_0^2, \quad A_0 = u_0 - B_\theta v_0 - B_\psi w_0$$

$$B_\theta = \frac{\partial r^{(1)}/\partial \theta + \xi \partial \varepsilon_0/\partial \theta}{r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi}, \quad B_\psi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial r^{(1)}/\partial \psi + \xi \partial \varepsilon_0/\partial \psi}{r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi}$$

$$R_{10} = a \left[\left(v_0 - \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) v_0 + \left(w_0 - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \psi} \right) w_0 \right]$$

$$R_{20} = a \left[\left(u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) v_0 + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \psi} - w_0 \text{ctg} \theta \right) w_0 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right]$$

$$R_{30} = a \left[\left(w_0 \text{ctg} \theta + \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) v_0 + \left(u_0 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \psi} \right) w_0 + \frac{1}{\rho_0 \sin \theta} \frac{\partial p_0}{\partial \psi} \right]$$

$$R_{40} = a \left[\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \psi} + \frac{v_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} + \frac{w_0}{\rho_0 \sin \theta} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} + 2u_0 + v_0 \text{ctg} \theta \right]$$

$$R_{50} = a \left[v_0 \left(\frac{\partial p_0}{\partial \theta} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} \right) + \frac{w_0}{\sin \theta} \left(\frac{\partial p_0}{\partial \psi} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} \right) \right], \quad a = \frac{\varepsilon_0}{r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi}$$

для нестационарных возмущений в фазе с α

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial \xi} = \frac{1}{\Delta_\alpha} [\gamma p_\alpha (R_{1\alpha} + B_\theta R_{2\alpha} + B_\psi R_{3\alpha} + A_0 R_{4\alpha} + A_\alpha R_{4\alpha}) +$$

$$+ \gamma p_\alpha (R_{10} + B_\theta R_{20} + B_\psi R_{30} + A_0 R_{40}) + A_0 R_{5\alpha} + A_\alpha R_{50}] - \frac{\Delta_\alpha}{\Delta_0} \frac{\partial p_0}{\partial \xi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_\alpha}{\partial \xi} &= \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} \left[\frac{\partial p_\alpha}{\partial \xi} - \frac{R_{50}}{A_0} \frac{A_\alpha}{A_0} + \frac{R_{5\alpha}}{A_0} \right] - \left(\frac{p_\alpha}{\rho_0} - \frac{\rho_\alpha}{\rho_0} \right) \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi} &= \frac{1}{A_0} \left(R_{1\alpha} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_\alpha}{\partial \xi} + \frac{\rho_\alpha}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \right) - \frac{A_\alpha}{A_0} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial \xi} &= \frac{1}{A_0} \left(\frac{B_\theta}{\rho_0} \frac{\partial p_\alpha}{\partial \xi} - \frac{B_\theta \rho_\alpha}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} - R_{2\alpha} \right) - \frac{A_\alpha}{A_0} \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w_\alpha}{\partial \xi} &= \frac{1}{A_0} \left(\frac{B_\psi}{\rho_0} \frac{\partial p_\alpha}{\partial \xi} - \frac{B_\psi \rho_\alpha}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} - R_{3\alpha} \right) - \frac{A_\alpha}{A_0} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Delta_\alpha = \frac{\gamma \rho_0}{\rho_0} \left(\frac{p_\alpha}{\rho_0} - \frac{\rho_\alpha}{\rho_0} \right) (1 + B_\theta^2 + B_\psi^2) - 2A_0 A_\alpha, \quad A_\alpha = u_\alpha - B_\theta v_\alpha - B_\psi w_\alpha$$

$$R_{1\alpha} = a \left[\left(v_0 - \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) v_\alpha + \left(v_\alpha - \frac{\partial u_\alpha}{\partial \theta} \right) v_0 + \left(w_0 - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \psi} \right) w_\alpha + \right. \\ \left. + \left(w_\alpha - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \psi} \right) w_0 + (r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) \omega^2 u_\alpha \right]$$

$$R_{2\alpha} = a \left[\left(u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) v_\alpha + \left(u_\alpha + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \theta} \right) v_0 + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \psi} - w_0 \operatorname{ctg} \theta \right) w_\alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \psi} - w_\alpha \operatorname{ctg} \theta \right) w_0 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_\alpha}{\partial \theta} - \frac{\rho_\alpha}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} - (r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) \omega^2 v_\alpha \right]$$

$$R_{3\alpha} = a \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} + w_0 \operatorname{ctg} \theta \right) v_\alpha + \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial \theta} + w_\alpha \operatorname{ctg} \theta \right) v_0 + \left(u_0 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \psi} \right) w_\alpha + \right. \\ \left. + \left(u_\alpha + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_\alpha}{\partial \psi} \right) w_0 + \frac{1}{\rho_0 \sin \theta} \frac{\partial p_\alpha}{\partial \psi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\rho_\alpha}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} - (r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) \omega^2 w_\alpha \right]$$

$$R_{4\alpha} = a \left[\frac{\partial v_\alpha}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_\alpha}{\partial \psi} + \frac{v_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \theta} - \frac{\rho_\alpha}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\alpha}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{w_0}{\rho_0 \sin \theta} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \psi} - \frac{\rho_\alpha}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} \right) + \frac{w_\alpha}{\rho_0 \sin \theta} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} + 2u_\alpha + v_\alpha \operatorname{ctg} \theta - (r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) \omega^2 \frac{\rho_\alpha}{\rho_0} \right]$$

$$R_{5\alpha} = a \left\{ v_0 \left[\frac{\partial p_\alpha}{\partial \theta} - \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \theta} - \frac{\rho_\alpha}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} + \frac{p_\alpha}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} \right) \right] + v_\alpha \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} - \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{w_0}{\sin \theta} \left[\frac{\partial p_\alpha}{\partial \psi} - \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \psi} - \frac{\rho_\alpha}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} + \frac{p_\alpha}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{w_\alpha}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} - \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} \right) - \right. \\ \left. - (r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) \omega^2 \left(p_\alpha - \gamma \frac{\rho_0}{\rho_0} \rho_\alpha \right) \right\}$$

для нестационарных возмущений в фазе с α

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\alpha^*}}{\partial \xi} &= \frac{1}{\Delta_0} [\gamma \rho_0 (R_{1\alpha^*} + B_\theta R_{2\alpha^*} + B_\psi R_{3\alpha^*} + A_0 R_{4\alpha^*} + A_{\alpha^*} R_{40}) + \\ &+ \gamma p_{\alpha^*} (R_{10} + B_\theta R_{20} + B_\psi R_{30} + A_0 R_{40}) + A_0 R_{5\alpha^*} + A_{\alpha^*} R_{50}] - \frac{\Delta_{\alpha^*}}{\Delta_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p_{\alpha^*}}{\partial \xi} = \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} \left[\frac{\partial p_{\alpha^*}}{\partial \xi} - \frac{R_{50}}{A_0} \frac{A_{\alpha^*}}{A_0} + \frac{R_{5\alpha^*}}{A_0} \right] - \left(\frac{p_{\alpha^*}}{\rho_0} - \frac{\rho_{\alpha^*}}{\rho_0} \right) \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u_{\alpha^*}}{\partial \xi} = \frac{1}{A_0} \left[R_{1\alpha^*} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_{\alpha^*}}{\partial \xi} + \frac{\rho_{\alpha^*}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \right] - \frac{A_{\alpha^*}}{A_0} \frac{\partial u_0}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial v_{\alpha^*}}{\partial \xi} = \frac{1}{A_0} \left[\frac{B_\theta}{\rho_0} \frac{\partial p_{\alpha^*}}{\partial \xi} - \frac{B_\theta \rho_{\alpha^*}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} - R_{2\alpha^*} \right] - \frac{A_{\alpha^*}}{A_0} \frac{\partial v_0}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial w_{\alpha^*}}{\partial \xi} = \frac{1}{A_0} \left[\frac{B_\psi}{\rho_0} \frac{\partial p_{\alpha^*}}{\partial \xi} - \frac{B_\psi \rho_{\alpha^*}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} - R_{3\alpha^*} \right] - \frac{A_{\alpha^*}}{A_0} \frac{\partial w_0}{\partial \xi}$$

$$\Delta_{\alpha^*} = \frac{\gamma \rho_0}{\rho_0} \left(\frac{p_{\alpha^*}}{\rho_0} - \frac{\rho_{\alpha^*}}{\rho_0} \right) (1 + B_\theta^2 + B_\psi^2) - 2A_0 A_{\alpha^*} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
A_{\alpha^*} &= (u_{\alpha^*} - u_{e\alpha^*}) - B_{\theta} (v_{\alpha^*} - v_{e\alpha^*}) - B_{\psi} (w_{\alpha^*} - w_{e\alpha^*}) \\
R_{1\alpha^*} &= a \left[\left(v_0 - \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) (v_{\alpha^*} - v_{e\alpha^*}) + \left(v_{\alpha^*} - \frac{\partial u_{\alpha^*}}{\partial \theta} \right) v_0 + \right. \\
&\quad \left. + \left(w_0 - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_0}{\partial \psi} \right) (w_{\alpha^*} - w_{e\alpha^*}) + \left(w_{\alpha^*} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_{\alpha^*}}{\partial \psi} \right) w_0 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a} \left(u_0 \frac{\partial u_{e\alpha^*}}{\partial \xi} + v_0 \frac{\partial v_{e\alpha^*}}{\partial \xi} + w_0 \frac{\partial w_{e\alpha^*}}{\partial \xi} \right) - (r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) u_{\alpha} \right] \\
R_{2\alpha^*} &= a \left[\frac{\partial v_0}{\partial \theta} (v_{\alpha^*} - v_{e\alpha^*}) + \frac{\partial v_{\alpha^*}}{\partial \theta} v_0 + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \psi} - w_0 \operatorname{ctg} \theta \right) (w_{\alpha^*} - w_{e\alpha^*}) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_{\alpha^*}}{\partial \psi} - w_{\alpha^*} \operatorname{ctg} \theta \right) w_0 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_{\alpha^*}}{\partial \theta} - \frac{\rho_{\alpha^*}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} + u_0 v_{\alpha^*} + (u_{\alpha^*} - u_{e\alpha^*}) v_0 - \right. \\
&\quad \left. - \left(u_0 \frac{\partial u_{e\alpha^*}}{\partial \theta} + v_0 \frac{\partial v_{e\alpha^*}}{\partial \theta} + w_0 \frac{\partial w_{e\alpha^*}}{\partial \theta} \right) + \frac{B_{\theta}}{a} \left(u_0 \frac{\partial u_{e\alpha^*}}{\partial \xi} + v_0 \frac{\partial v_{e\alpha^*}}{\partial \xi} + w_0 \frac{\partial w_{e\alpha^*}}{\partial \xi} \right) + \right. \\
&\quad \left. + (r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) v_{\alpha} \right] \\
R_{3\alpha^*} &= a \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} + w_0 \operatorname{ctg} \theta \right) (v_{\alpha^*} - v_{e\alpha^*}) + \left(\frac{\partial w_{\alpha^*}}{\partial \theta} + w_{\alpha^*} \operatorname{ctg} \theta \right) v_0 + \frac{w_0}{\sin \theta} \frac{\partial w_{\alpha^*}}{\partial \psi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{w_{\alpha^*} - w_{e\alpha^*}}{\sin \theta} \frac{\partial w_0}{\partial \psi} + u_0 w_{\alpha^*} + (u_{\alpha^*} - u_{e\alpha^*}) w_0 + \frac{1}{\rho_0 \sin \theta} \frac{\partial p_{\alpha^*}}{\partial \psi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\rho_{\alpha^*}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sin \theta} \left(u_0 \frac{\partial u_{e\alpha^*}}{\partial \psi} + v_0 \frac{\partial v_{e\alpha^*}}{\partial \psi} + w_0 \frac{\partial w_{e\alpha^*}}{\partial \psi} \right) + \frac{B_{\psi}}{a} \left(u_0 \frac{\partial u_{e\alpha^*}}{\partial \xi} + v_0 \frac{\partial v_{e\alpha^*}}{\partial \xi} + w_0 \frac{\partial w_{e\alpha^*}}{\partial \xi} \right) + \right. \\
&\quad \left. + (r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) w_{\alpha} \right] \\
R_{4\alpha^*} &= a \left[\frac{\partial v_{\alpha^*}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_{\alpha^*}}{\partial \psi} + \frac{v_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_{\alpha^*}}{\partial \theta} - \frac{\rho_{\alpha^*}}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} \right) + \frac{v_{\alpha^*} - v_{e\alpha^*}}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{w_0}{\rho_0 \sin \theta} \left(\frac{\partial \rho_{\alpha^*}}{\partial \psi} - \frac{\rho_{\alpha^*}}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} \right) + \frac{w_{\alpha^*} - w_{e\alpha^*}}{\rho_0 \sin \theta} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} + 2u_{\alpha^*} + v_{\alpha^*} \operatorname{ctg} \theta + \right. \\
&\quad \left. + (r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) \frac{\rho_{\alpha}}{\rho_0} \right] \\
R_{5\alpha^*} &= a \left\{ v_0 \left[\frac{\partial p_{\alpha^*}}{\partial \theta} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_{\alpha^*}}{\partial \theta} - \frac{\rho_{\alpha^*}}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} + \frac{p_{\alpha^*}}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + (v_{\alpha^*} - v_{e\alpha^*}) \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} \right) + \frac{w_0}{\sin \theta} \left[\frac{\partial p_{\alpha^*}}{\partial \psi} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_{\alpha^*}}{\partial \psi} - \frac{\rho_{\alpha^*}}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{p_{\alpha^*}}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{w_{\alpha^*} - w_{e\alpha^*}}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \psi} \right) + (r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) \left(p_{\alpha} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} p_{\alpha} \right) \left. \right\} \\
u_e &= u_{e\alpha^*} \alpha' = (y_0 \cos \theta + x_0 \cos \psi \sin \theta) \alpha' \\
v_e &= v_{e\alpha^*} \alpha' = [(r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) \cos \psi + x_0 \cos \psi \cos \theta - y_0 \sin \theta] \alpha' \\
w_e &= w_{e\alpha^*} \alpha' = - [(r^{(1)} + \varepsilon_0 \xi) \cos \theta + x_0] \sin \psi \alpha'
\end{aligned}$$

Здесь u_e , v_e , w_e — компоненты переносной скорости; x_0 , y_0 — координаты центра колебаний. Линеаризация системы (1.9) на поверхности невозмущенного скачка уплотнения $r = r_0^{(2)}$ (θ ; ψ) дает соотношения:

для стационарного обтекания тела (2.5)

$$\begin{aligned}
u_{\infty} n_{\theta 0} - v_{\infty} n_{r 0} &= u_0 n_{\theta 0} - v_0 n_{r 0} \\
- u_{\infty} n_{r 0} n_{\psi 0} - v_{\infty} n_{\theta 0} n_{\psi 0} + w_{\infty} (n_{\theta 0}^2 + n_{r 0}^2) &= \\
= - u_0 n_{r 0} n_{\psi 0} - v_0 n_{\theta 0} n_{\psi 0} + w_0 (n_{\theta 0}^2 + n_{r 0}^2) & \\
\rho_{\infty} V_{\infty n 0} = \rho_0 V_{n 0}, \quad \rho_{\infty} V_{\infty n 0}^2 + p_{\infty} = \rho_0 V_{n 0}^2 + p_0 & \\
\frac{V_{\infty n 0}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} = \frac{V_{n 0}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} &
\end{aligned}$$

для нестационарных возмущений в фазе с α (2.6)

$$\begin{aligned}
 & u_{\infty 0} n_{\theta \alpha} + u_{\infty \alpha} n_{\theta 0} - v_{\infty 0} n_{r \alpha} - v_{\infty \alpha} n_{r 0} = u_0 n_{\theta \alpha} + \\
 & \quad + \left(u_{\alpha} + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) n_{\theta 0} - v_0 n_{r \alpha} - \left(v_{\alpha} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) n_{r 0} \\
 & - u_{\infty 0} (n_{r 0} n_{\psi \alpha} + n_{r \alpha} n_{\psi 0}) - u_{\infty \alpha} n_{r 0} n_{\psi 0} - v_{\infty 0} (n_{\theta 0} n_{\psi \alpha} + n_{\theta \alpha} n_{\psi 0}) - \\
 & \quad - v_{\infty \alpha} n_{\theta 0} n_{\psi 0} + 2w_{\infty 0} (n_{\theta 0} n_{\theta \alpha} + n_{r 0} n_{r \alpha}) + w_{\infty \alpha} (n_{\theta 0}^2 + n_{r 0}^2) = \\
 & = -u_0 (n_{r 0} n_{\psi \alpha} + n_{r \alpha} n_{\psi 0}) - \left(u_{\alpha} + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) n_{r 0} n_{\psi 0} - v_0 (n_{\theta 0} n_{\psi \alpha} + n_{\theta \alpha} n_{\psi 0}) - \\
 & - \left(v_{\alpha} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) n_{\theta 0} n_{\psi 0} + 2w_0 (n_{\theta 0} n_{\theta \alpha} + n_{r 0} n_{r \alpha}) + \left(w_{\alpha} + \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) (n_{\theta 0}^2 + n_{r 0}^2) \\
 & \quad \rho_{\infty} (V_{\infty n \alpha} - N_{\alpha}) = \rho_0 (V_{n \alpha} - N_{\alpha}) + \left(\rho_{\alpha} + \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) V_{n 0} \\
 & \quad 2\rho_{\infty} V_{\infty n 0} V_{\infty n \alpha} = 2\rho_0 V_{n 0} V_{n \alpha} + \left(\rho_{\alpha} + \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) V_{n 0}^2 + p_{\alpha} + \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \\
 & V_{\infty n 0} (V_{\infty n \alpha} - N_{\alpha}) = V_{n 0} (V_{n \alpha} - N_{\alpha}) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\frac{1}{p_0} \left(p_{\alpha} + \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\rho_0} \left(\rho_{\alpha} + \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) \right] \\
 & V_{n \alpha} = u_0 n_{r \alpha} + \left(u_{\alpha} + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) n_{r 0} + v_0 n_{\theta \alpha} + \left(v_{\alpha} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) n_{\theta 0} + \\
 & \quad + w_0 n_{\psi \alpha} + \left(w_{\alpha} + \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_0} \right) n_{\psi 0}
 \end{aligned}$$

для нестационарных возмущений в фазе с α' (2.7)

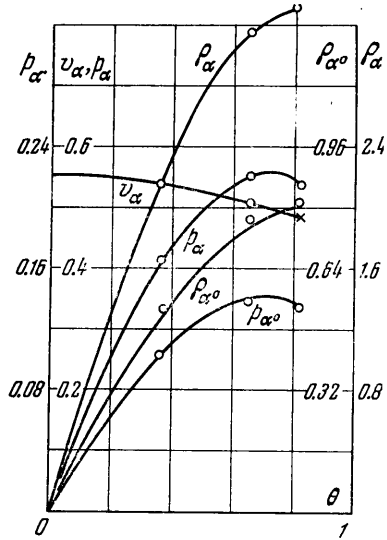
$$\begin{aligned}
 & u_{\infty 0} n_{\theta \alpha'} - v_{\infty 0} n_{r \alpha'} = u_0 n_{\theta \alpha'} + \left(u_{\alpha'} + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) n_{\theta 0} - v_0 n_{r \alpha'} - \left(v_{\alpha'} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) n_{r 0} \\
 & - u_{\infty 0} (n_{r 0} n_{\psi \alpha'} + n_{r \alpha'} n_{\psi 0}) - v_{\infty 0} (n_{\theta 0} n_{\psi \alpha'} + n_{\theta \alpha'} n_{\psi 0}) + 2w_{\infty 0} (n_{\theta 0} n_{\theta \alpha'} + n_{r 0} n_{r \alpha'}) = \\
 & = -u_0 (n_{r 0} n_{\psi \alpha'} + n_{r \alpha'} n_{\psi 0}) - \left(u_{\alpha'} + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) n_{r 0} n_{\psi 0} - v_0 (n_{\theta 0} n_{\psi \alpha'} + n_{\theta \alpha'} n_{\psi 0}) - \\
 & - \left(v_{\alpha'} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) n_{\theta 0} n_{\psi 0} + 2w_0 (n_{\theta 0} n_{\theta \alpha'} + n_{r 0} n_{r \alpha'}) + \left(w_{\alpha'} + \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) (n_{\theta 0}^2 + n_{r 0}^2) \\
 & \quad \rho_{\infty} (V_{\infty n \alpha'} - N_{\alpha'} - V_{e n \alpha'}) = \rho_0 (V_{n \alpha'} - N_{\alpha'} - V_{e n \alpha'}) + \left(\rho_{\alpha'} + \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) V_{n 0} \\
 & \quad 2\rho_{\infty} V_{\infty n 0} V_{\infty n \alpha'} = 2\rho_0 V_{n 0} V_{n \alpha'} + \left(\rho_{\alpha'} + \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) V_{n 0}^2 + p_{\alpha'} + \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \\
 & V_{\infty n 0} (V_{\infty n \alpha'} - N_{\alpha'} - V_{e n \alpha'}) = V_{n 0} (V_{n \alpha'} - N_{\alpha'} - V_{e n \alpha'}) + \\
 & \quad + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\frac{1}{p_0} \left(p_{\alpha'} + \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) - \frac{1}{\rho_0} \left(\rho_{\alpha'} + \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) \right] \\
 & V_{n \alpha'} = u_0 n_{r \alpha'} + \left(u_{\alpha'} + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) n_{r 0} + v_0 n_{\theta \alpha'} + \left(v_{\alpha'} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) n_{\theta 0} + \\
 & \quad + w_0 n_{\psi \alpha'} + \left(w_{\alpha'} + \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \frac{\varepsilon_{\alpha'}}{\varepsilon_0} \right) n_{\psi 0}
 \end{aligned}$$

Граничные условия на теле для стационарного обтекания, а также для возмущений в фазе с α и α' соответственно примут вид

$$\begin{aligned}
 & u_0 - \frac{v_0}{r^{(1)}} \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{w_0}{r^{(1)} \sin \theta} \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \psi} = 0, \quad u_{\alpha} - \frac{v_{\alpha}}{r^{(1)}} \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{w_{\alpha}}{r^{(1)} \sin \theta} \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \psi} = 0 \quad (2.8) \\
 & (u_{\alpha'} - u_{e \alpha'}) - \frac{v_{\alpha'} - v_{e \alpha'}}{r^{(1)}} \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{w_{\alpha'} - w_{e \alpha'}}{r^{(1)} \sin \theta} \frac{\partial r^{(1)}}{\partial \psi} = 0
 \end{aligned}$$

Для получения стационарного решения был использован метод расчета пространственного сверхзвукового обтекания затупленных тел, предложенный в работах [3, 7].

Проведем $4k + 4$ меридиональных полуплоскостей $\psi = \pm \psi_0, \dots, \pm \psi_k, \pm \pi \mp \psi_k, \dots, \pm \pi \mp \psi_0$ и n конических поверхностей $\theta = \theta_1; \theta_2, \dots, \theta_n$. Их пересечения образуют $n(4k + 4) + 1$ лучей, исходящих из начала координат (включая ось $\theta = 0$). Для фиксированного значения ξ все газодинамические параметры могут быть аппроксимированы по значениям в $n(4k + 4) + 1$ точках пересечения лучей с поверхностью $\xi = \text{const}$. В каждой меридиональной плоскости $\psi = \psi_i (-\pi + \psi_i)$ параметры аппроксимируются полиномами Лагранжа по $2n + 1$ точкам. Учитывая периодичность всех параметров по ψ , при фиксированных значениях θ они аппроксимируются тригонометрическими интерполяционными полиномами по значениям в $4k + 4$ точках. Наличие плоскости симметрии позволяет все аппроксимации выразить через значения параметров на $n(2k + 2) + 1$ лучах, расположенных в полупространстве $0 \leq \psi \leq \pi$. При этом четные по ψ функции аппроксимируются полиномами по конусам, а нечетные — по синусам.

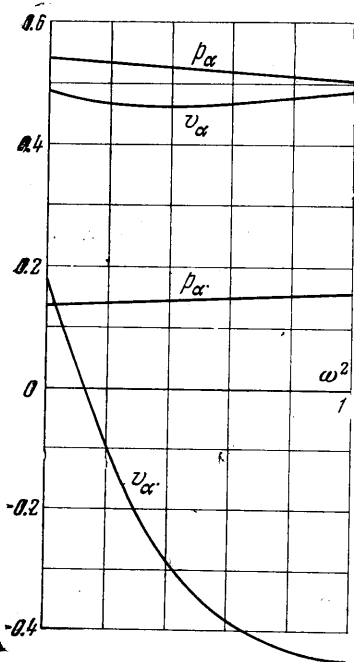


Фиг. 2

Вычисляя производные по θ и ψ при помощи аппроксимаций, подставим их в систему уравнений газовой динамики и потребуем, чтобы получающиеся выражения тождественно удовлетворялись на всех $n(2k + 2) + 1$ лучах.

Получим аппроксимирующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно значений параметров на этих лучах. Искомая поверхность скачка уплотнения ($\xi = 1$) аппроксимируется по той же схеме и содержит $3[n(2k + 2) + 1]$ произвольных параметров (констант). Для того чтобы в узлах удовлетворялось граничное условие на поверхности тела ($\xi = 0$), для аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений приходится решать краевую задачу, подбирая соответствующие значения $3[n(2k + 2) + 1]$ параметров в уравнении скачка.

Следует отметить, что необходимые для решения стационарной задачи $n(2k + 2) + 1$ параметры находятся предварительно. Таким образом, для решения α -задачи и α' -задачи необходимо определить $2[n(2k + 2) + 1]$ параметров. Подбор этих неизвестных параметров может быть осуществлен при помощи метода Ньютона. Причем, поскольку



Фиг. 3

система дифференциальных уравнений и граничных условий для коэффи-

циентов при α и α' является линейной, метод Ньютона уже после первой пристрелки дает возможность получить удовлетворение граничных условий на теле с требуемой точностью.

Разностная схема и расположение узлов аппроксимацией на поверхностях $\xi = \text{const}$ при решении α -задачи и α' -задачи были взяты в том же виде, что и для стационарной задачи. В программе, составленной для счета на ЭВМЦ, параметры разностной сетки следующие $k = 1$; $n = 3$.

Таким образом, при решении стационарной задачи подбирались 13 параметров, при решении нестационарной задачи — 26.

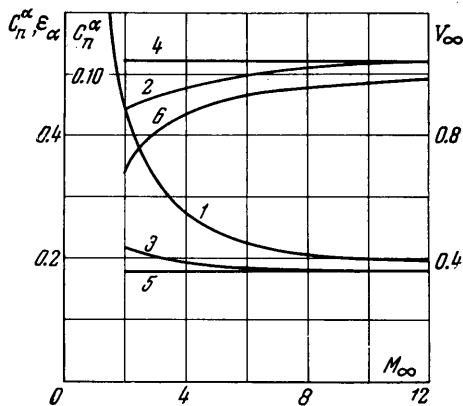
§ 3. Примеры расчетов. По предложенной методике были проведены расчеты нестационарного сверхзвукового обтекания сферы и эллипсоидов в диапазоне чисел $M_\infty = 1.5 - \infty$ и углах атаки $\beta_0 = 0 - 10^\circ$.

Для выяснения точности определения параметров были проведены систематические расчеты нестационарного обтекания сферы. Результаты проверки выполнения равенств (1.19) для варианта $M = 3$; $\beta_0 = 0$; $x_0 = -0.2$ приведены на фиг. 2. Кружками обозначены точные значения искомых функций. Систематические расчеты при $\beta_0 = 0$ и $M_\infty = 2.5 - \infty$ показали, что ошибка в определении величин f_α не превышает 1% (p_α определяется с точностью не хуже 0.5%), а величин $f_{\alpha'}$ — 2% ($p_{\alpha'}$ — 1%).

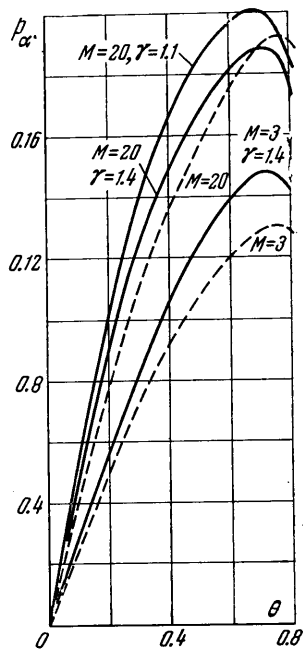
При числе $M = 3$; $\beta_0 = 0$; $\delta = 1$ были получены решения в широком диапазоне частот колебаний ($\omega^2 = 0, 0.01, 0.1, 0.5, 1$).

Зависимость возмущений различных газодинамических параметров в полуплоскости $\psi = \pi$ на поверхности сферы при $\theta = 0.8125$ приведены на фиг. 3

Видно, что p_α и $p_{\alpha'}$ слабо зависят от частоты при $x_0 = -0.20$. Сильная зависимость от частоты проявляется только у v_α .



Фиг. 4



Фиг. 5

Результаты сравнения p_α для сферы, получаемого по теории Ньютона, с точным решением, показывают, что ньютоновская теория дает для тел, близких по форме к сфере при $M_\infty \geq 6$ хорошие результаты. При меньших числах M_∞ данные ньютоновской теории оказываются сильно заниженными. Так, например, при $M = 2.5$ различие составляет более 25%. Результаты сравнения при $\gamma = 1.4$; $x_0 = -0.07$ приведены на фиг. 4. На фиг. 4 кривыми 2 и 3 изображено изменение полученных при помощи изложенного метода C_n^α и $C_n^{\alpha'}$ для 46-градусного сегмента при числах $M_\infty = 2 - 12$, а кривыми 4 и 5 — значения C_n^α и $C_n^{\alpha'}$, определенные по теории Ньютона. Кривая 1 соответствует изменению ϵ_α в плоскости $\psi = \pi$ на луче $\theta = 0.8125$; резко возрастание этой кривой при числе M_∞ , стремящемся к единице, свидетельствует о нелинейном характере возмущений при числах M_∞ , близких к единице; кривая 6 — изменение V_∞/W_m по числу M_∞ .

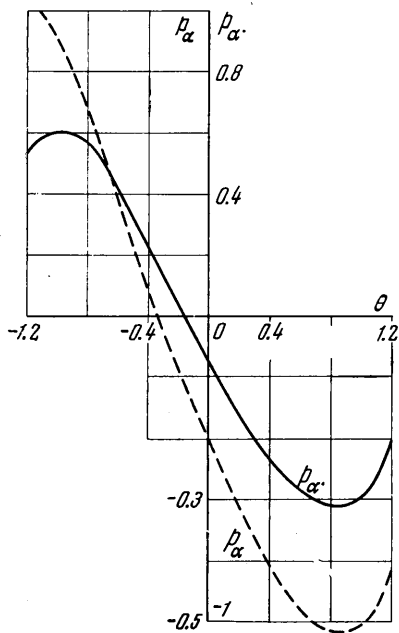
На основании систематических расчетов стационарного обтекания при больших числах M_∞ можно сделать вывод, что влияние равновесной диссоциации воздуха на газодинамические параметры достаточно хорошо можно учесть изменением γ . Расчеты, проведенные для сферы при $M = 20$; $\gamma = 1.4$ и $\gamma = 1.1$; $x_0 = -0.2$, показывают, что с уменьшением γ значительно возрастает p_α . (фиг. 5). Пунктиром приведены результаты ньютоновской теории.

На фиг. 6 показано распределение p_α и $p_{\alpha'}$ на поверхности эллипсоида с соотношением осей $\delta = 1.5$ в плоскости $\psi = 0, \pi$ при $M_\infty = 3$; $\beta_0 = 10^\circ$. Центр колебаний и начало сферической системы координат лежат на пересечении осей эллипсоида.

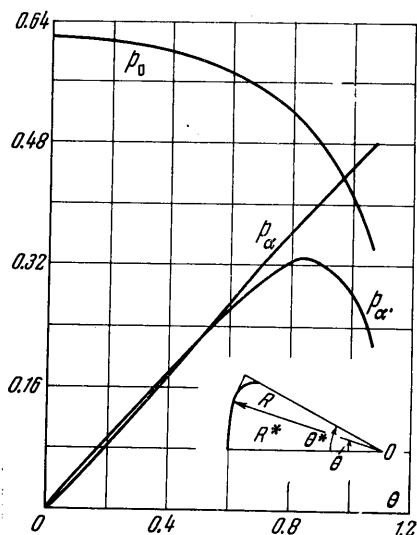
Результаты расчета по данной методике сегментального тела со скруглением при числе $M_\infty = 3$; $\beta_0 = 0$ приведены на фиг. 7.

Уравнение контура тела имеет вид

$$\left(\frac{R}{R^*}\right)^n + \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^m = 1$$



Фиг. 6



Фиг. 7

В приведенном варианте $m = n = 20$; $\theta^* = \frac{1}{6}\pi$; $R^* = 1$. Результаты представлены в сферической системе координат, сдвинутой вперед на $0.65 R^*$ относительно точки O (см. фиг. 7), центр колебаний находится в начале системы координат.

Поступило 21 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Росляков Г. С., Теленин Г. Ф. Обзор работ по расчету стационарных осесимметричных течений газа, выполненных в ВЦ МГУ. Сб. «Численные методы в газовой динамике». Изд. МГУ, 1963, т. 2.
2. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
3. Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета пространственного обтекания тел с отошедшей ударной волной. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 5.
4. Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Нестационарное сверхзвуковое обтекание конуса с округленной вершиной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
5. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф. Сверхзвуковое обтекание тел различной формы с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
6. Гилинский С. М., Лебедев М. Г. Исследование обтекания плоских и осесимметричных тел с отошедшей ударной волной потоком с малой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1965, № 1.
7. Тиняков Г. П. Исследование трехмерного сверхзвукового обтекания эллипсоидов вращения. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1965, № 6.