

О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ СИСТЕМ ТОНКИХ ПОДВОДНЫХ ПРОФИЛЕЙ

И. Т. ЕГОРОВ (Ленинград)

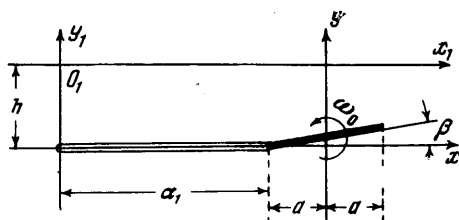
Исследование неустановившегося движения тонкого профиля вблизи невозмущенной поверхности воды, а также движения крыла вблизи твердой стенки может быть сведено к рассмотрению нестационарного движения системы профилей. Изучение нестационарного движения систем профилей представляет также и самостоятельный интерес в случаях рассмотрения неустановившегося движения биплана или же решетки профилей.

1. Рассмотрим неустановившееся движение тонкого профиля, погруженного под свободную поверхность жидкости на глубину h (фиг. 1). Будем считать, что профиль представляет плоскую пластину с хордой $(-a, a)$, наклоненную к потоку под малым углом атаки β . Профиль движется со скоростью u_0 в положительном направлении направленной оси, а также имеет вертикальные и вращательные возмущения с малыми скоростями y' и ω_0 соответственно.

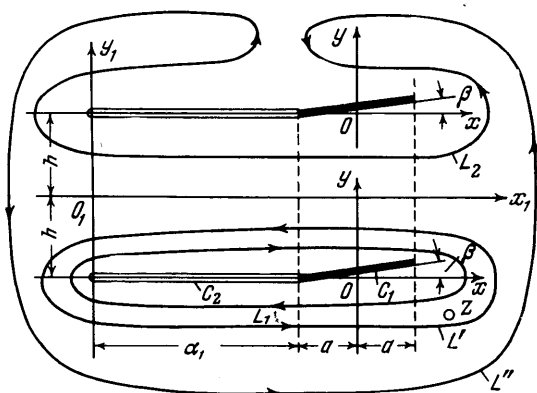
Полагая, что движение профиля началось из состояния покоя (в точке $x_1 = 0$) и пренебрегая в интеграле Лагранжа весомостью и квадратами абсолютных скоростей движения жидкости, получим для потенциала скорости φ на свободной поверхности следующее граничное условие:

$$\varphi = 0 \text{ при } y_1 = 0 \quad (-\infty \leq x \leq \infty) \quad (1.1)$$

Условие (1.1) позволяет воспользоваться принципом симметрии и аналитически продолжить течение жидкости в верхнюю полуплоскость.



Фиг. 1



Фиг. 2

В результате выполненного продолжения получим течение, эквивалентное возмущению жидкости неустановившимся движением биплана в безграничном потоке (фиг. 2). Последнее справедливо только при больших скоростях основного движения подводного профиля (число Фруда $Fr u_0 \rightarrow \infty$). Рассматривая задачу в данной постановке, заметим, что за каждым крылом биплана, непосредственно от задней кромки, простирается прямолинейный двубережный разрыв, эквивалентный разрыву горизонтальных скоростей или вихревому следу. Обозначим через L_1 контур, охватывающий разрезы C_1 и C_2 , соответственно заменяющие профиль и прямолинейный вихревой след,

распространяющийся за этим профилем. Выберем вне контура L_1 в плоскости течения некоторую точку z . Возьмем контур L' , охватывающий как область разрезов C_1 и C_2 , так и z . В соответствии с формулой Коши, между контурами L_1 и L' имеем

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \left(w(z) = \frac{d\omega}{dz} \right) \quad (1.2)$$

Здесь $w(z)$ — функция комплексной скорости, $\omega(z)$ — комплексный потенциал скорости.

Интеграл по контуру L' охватывает область, внутри которой находится точка z . Интеграл по контуру L_1 определяет две аналитические функции внутри L_1 и вне контура L_1 . Аналитическую функцию, выражающуюся интегралом по контуру L' , продолжим внутрь контура L_1 , при этом контур L_1 будем деформировать в разрез C_1, C_2 , а контур L' в контур L'' и L_2 .

В результате формула (1.2) может быть записана в виде

$$w(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{w(\zeta) d\zeta}{z - \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{w(\zeta) d\zeta}{z - \zeta} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{L''} \frac{w(\zeta) d\zeta}{z - \zeta} \quad (1.3)$$

На контуре L_2 аргумент ζ принимает значение $\zeta_z = \zeta + i(2h)$. Поэтому

$$\int_{L_2} \frac{w(\zeta) d\zeta}{z - \zeta} d\zeta = \int_{L_1} \frac{w(\zeta) d\zeta}{z - \zeta - i(2h)} \quad (1.4)$$

С учетом (1.4) формулу (1.3) перепишем в виде

$$w(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L''} \frac{w(\zeta)}{z - \zeta} \left[1 + \frac{(z - \zeta)}{z - \zeta - i(2h)} \right] d\zeta = - \frac{1}{2\pi i} \int_{L''} \frac{w(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta \quad (1.5)$$

Интеграл по контуру L'' представляет аналитическую функцию, конечную на всей плоскости. По теореме Лувивилля, такая функция равна постоянной. При $L'' \rightarrow \infty$ и возникновении движения профили из состояния покоя эта постоянная стремится к нулю. Тогда

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[1 + \frac{(z - \zeta)}{z - \zeta - i(2h)} \right] \frac{w(\zeta) d\zeta}{z - \zeta} \quad (1.6)$$

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{d\omega}{d\zeta} \left[1 + \frac{(z - \zeta)}{z - \zeta - i(2h)} \right] \frac{d\zeta}{z - \zeta} \quad (1.7)$$

Представим функцию $d\omega/dz$ в виде произведения двух функций [1]

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{df}{dz} g(z), \quad g(z) = \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^{1/2} \left(\begin{array}{l} g(x+i0) = -g(x-i0), \quad -a < x < a \\ \operatorname{Im} g(z) = 0, \quad |x| > a \end{array} \right) \quad (1.8)$$

Здесь $g(z)$ — функция, характерная следующими значениями на вещественной оси: на отрезке $(-a, a)$ $g(x+i0) = -g(x-i0)$, на остальной же части оси $\operatorname{Im} g(z) = 0$. Учитывая в подынтегральном выражении формулы (1.7) зависимость (1.8), получим

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{1/2} \left\{ \int_L \frac{d\omega/d\zeta}{(z-\zeta)} \left[1 + \frac{z-\zeta}{z-\zeta-i(2h)} \right] \left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a} \right)^{1/2} d\zeta \right\} \quad (1.9)$$

Стягивая контур L к разрезам C_1, C_2 и обозначая через $u_1 - iv_1$ и $u_2 - iv_2$ значения $d\omega/d\zeta$ при подходе к разрезу соответственно снизу и сверху, а также имея в виду, что $u_2 = -u_1$ и $v_2 = v_1 = -v_n$, получим

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{1/2} \left\{ \int_0^{\alpha_1} u_2(\alpha) \left[1 + \frac{(\xi-x)^2}{(2h)^2 + (\xi-x)^2} \right] \left(\frac{\xi-a}{\xi+a} \right)^{1/2} d\alpha + \int_{-a}^a v_n \left(\frac{\xi-a}{\xi+a} \right)^{1/2} \frac{d\xi}{z-\xi} \right\}$$

Сопоставляя выражение (1.10) с разложением функции $d\omega/dz$ вблизи бесконечно удаленной точки, получим для случая возникновения неустановившегося движения подводного крыла из состояния покоя следующее интегральное уравнение:

$$\int_0^{\alpha_1} u_2(\alpha) \left[1 + \frac{(\xi-x)^2}{(2h)^2 + (\xi-x)^2} \right] \left(\frac{\xi-a}{\xi+a} \right)^{1/2} d\alpha = -a\pi v_2(\alpha_1) \quad (1.11)$$

$$(v_2(\alpha_1) = y' - u_0\beta + 1/2 a\omega_0)$$

Уравнение (1.11) будет исходным для определения функции разрыва скоростей $u_2(\alpha)$ или интенсивности вихревой пелены $\gamma(\alpha) = 2u_2(\alpha)$, сбегаящей за нестационарно движущимися крыльями биплана в безграничной жидкости или за подводным крылом, движущимся вблизи поверхности воды.

2. Аналогично, интенсивность вихревой пелены, сбегаящей за верхним крылом подводного биплана, погруженного под воду на глубину h и имеющего расстояние между крыльями, равное H (фиг. 3), определит интегральное уравнение:

$$\int_0^{\alpha_1} u_2(\alpha) \left[1 + \frac{(\xi-x)^2}{(2h)^2 + (\xi-x)^2} + \frac{(\xi-x)^2}{H^2 + (\xi-x)^2} + \frac{(\xi-x)^2}{(2h+H)^2 + (\xi-x)^2} \right] \left(\frac{\xi-a}{\xi+a} \right)^{1/2} d\alpha = -a\pi v_2(\alpha_1) \quad (2.1)$$

В случае неустановившегося движения бесконечной решетки профилей с шагом $2h$ интегральное уравнение для определения интенсивности вихревой пелены запишется в виде [6]

$$\int_0^{\alpha_1} u_2(\alpha) \left[\frac{\pi}{2h} (\xi - x) \operatorname{cth} \frac{\pi}{2h} (\xi - x) \right] \left(\frac{\xi - a}{\xi + a} \right)^{1/2} d\xi = -\alpha \pi v_2(\alpha_1) \quad (2.2)$$

Если же неустановившееся движения тонкого профиля происходит на расстоянии h от твердой стенки (фиг. 4), то в этом случае интенсивность вихревой пелены определяется следующим интегральное уравнение:

$$\int_0^{\alpha_1} u_2(\alpha) \left[1 - \frac{(\xi - x)^2}{(2h)^2 + (\xi - x)^2} \right] \left(\frac{\xi - a}{\xi + a} \right)^{1/2} d\alpha = -\alpha \pi v_2(\alpha_1) \quad (2.3)$$

3. Общее решение уравнений (1.11), (2.1)–(2.3) может быть получено при помощи несимметричных формул Фурье [2]. В общем виде эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\int_0^s u_2(x) K(s-x) dx = -\pi v_2(s), \quad s = \frac{\alpha_1}{a}, \quad x = \frac{\alpha}{a}, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \quad (3.1)$$

Здесь $K(s-x)$ — соответственно ядра приведенных интегральных уравнений. Умножая уравнение (3.1) на $\exp i\omega s$, интегрируя результат от 0 до ∞ и меняя порядок интегрирования при помощи формулы Дирихле, получим уравнение

$$\left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} u_2(x) dx \int_0^{\infty} K(s-x) e^{i\omega s} ds = -\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} v_2(s) e^{i\omega s} ds \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) путем замены переменной $s-x=t$ можно преобразовать к виду

$$U(\omega) = -\sqrt{2\pi} \frac{G(\omega)}{K(\omega)}, \quad U(\omega) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} u_2(x) e^{i\omega x} dx \quad (3.3)$$

$$K(\omega) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} K(t) e^{i\omega t} dt, \quad G(\omega) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} v_2(s) e^{i\omega s} ds$$

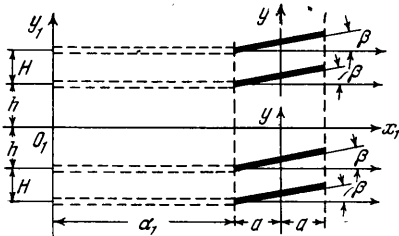
Выполняя обращение второй формулы (3.3), получим для искомой функции

$$u_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\alpha_0+0}^{i\alpha_0+\infty} U(\omega) e^{-i\omega s} d\omega \quad (3.4)$$

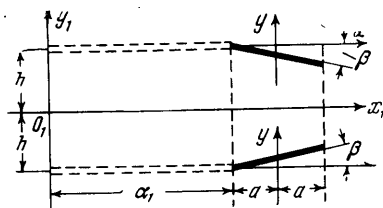
Здесь α_0 — некоторое положительное число в области $x > 0$. Принимая во внимание первую формулу (3.3), запишем (3.4) в виде

$$u_2(s) = - \int_{i\alpha_0+0}^{i\alpha_0+\infty} \frac{G(\omega)}{K(\omega)} e^{-i\omega s} ds \quad (3.5)$$

Формула (3.5) дает общее решение интегрального уравнения (3.1) и может быть использована для вычисления интенсивности вихревой пелены при произвольных,



Фиг. 3



Фиг. 4

определяемых формулой (1.11), неустановившихся движениях рассматриваемых систем крыльев.

4. Наиболее простые решения уравнения (3.4) могут быть легко получены при условии справедливости допущения Вагнера [3], т. е. $(s - x) \ll 1$. В этом случае решение (3.5) принимает вид

$$u_2(s) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{[f_i(h_0) v_2(\eta)]}{\sqrt{s-\eta}} d\eta \quad (4.1)$$

Для вычисления подъемной силы на входящем в систему профиле воспользуемся известным выражением подъемной силы [1]

$$Y = -2\rho_0 u_0 \int_{-a}^a v_n(\xi, t) \left(\frac{a-\xi}{a+\xi} \right)^{1/2} d\xi - 2\rho_0 \frac{d}{dt} \int_{-a}^a r_n(\xi, t) \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi - \\ - 2\rho_0 a \left(u_0 + \frac{da}{dt} \right) \int_0^{\alpha_1} \frac{u_2(\alpha) d\alpha}{\sqrt{|\xi^2 - a^2|}} \quad (4.2)$$

Здесь ρ_0 — плотность жидкости.

Подставляя в эту формулу значения нормальных скоростей $v_n(\xi, t)$ с учетом функций $f_i(h_0)$, для подъемной силы на профиле найдем следующую формулу:

$$Y = -f_i(h_0) \frac{d}{dt} (\rho_0 \pi a^2 V_1) - 2\pi \rho_0 a u_0 f_i(h_0) \left(V_1 - \frac{a}{2} \omega_0 \right) - \\ - 2\rho_0 a \left(u_0 + \frac{da}{dt} \right) f_i(h_0) \int_0^{\alpha_1} \frac{u_2(\alpha) d\alpha}{\sqrt{|\xi^2 - a^2|}} \quad \left(V_1 = y' - u_0 \beta, h_0 = \frac{h}{a} \right) \quad (4.3)$$

Функция $u_2(\alpha)$ находится из интегрального уравнения, выведенного для изолированного профиля, движущегося в безграничной жидкости, решения которого для произвольного движения крыла содержатся в работе [4]. Функции $f_j(h_0)$ для рассмотренных выше систем профилей в предположении справедливости гипотезы Прандтля имеют следующие значения.

В рассматриваемом случае неустановившегося подводного крыла или же биплана в безграничной жидкости

$$f_1(h_0) = \frac{1 + (2h_0)^2}{2 + (2h_0)^2} \quad \left(\frac{1}{2} \leq f_1(h_0) < 1 \text{ при } 0 \leq h_0 \leq \infty \right) \quad (4.4)$$

На фиг. 5 приводятся значения функции $f_1(h_0)$. Там же приводятся экспериментальные значения этой функции, полученные автором в результате опытов, в процессе которых определялось значение подъемной силы на нестационарно движущихся тонких подводных крыльях в опытовом бассейне.

При неустановившемся движении биплана вблизи поверхности воды функции $f_i(h_0)$ для верхнего профиля биплана при $H = 2h$ принимает следующее значение:

$$f_2(h_0) = \left[\frac{1 + 20h_0^2 + 64h_0^4}{4 + 52h_0^2 + 64h_0^4} \right] \quad (4.5)$$

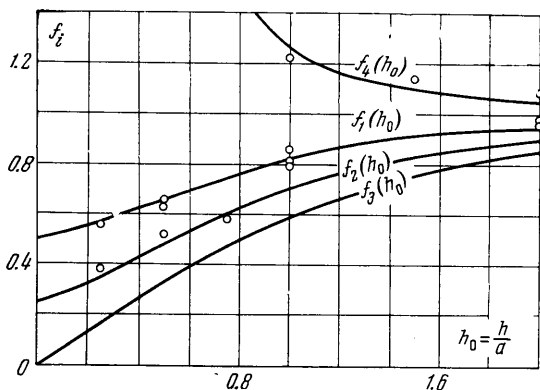
На фиг. 5 приводятся рассчитанные по формуле (4.5) и найденные экспериментально значения функции $f_2(h_0)$.

В случае неустановившегося движения бесконечной решетки тонких профилей функция $f_i(h_0)$ равна

$$f_3(h_0) = \frac{2h_0}{\pi} \operatorname{th} \frac{\pi}{2h_0} \quad (4.6)$$

Функция $f_3(h_0)$ есть известная поправка на влияние решетки [5]. При неустановившемся движении тонкого профиля вблизи твердой стенки функция $f_i(h_0)$ принимает значения

$$f_4(h_0) = \left[1 + \frac{1}{(2h_0)^2} \right] \quad (4.7)$$



Фиг. 5

На фиг. 5 приводятся также и значения функции $f_4(h_0)$. Там же приведены результаты расчетов этой функции по графическим данным М. Д. Поталасова, Я. Е. Полонского, Г. А. Яковлева, экспериментально подтвержденным В. Г. Табачниковым.

Из фиг. 5 следует весьма хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями функций $f_i(h_0)$, полученными в результате опытов, в процессе которых определялось значение подъемной силы на нестационарно движущихся тонких профилях.

ЛИТЕРАТУРА

Поступило 27 II 1966

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Гостехиздат, 1950.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.
3. Wagner H. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebs von Tragflügeln. Z. angew. Math und Mech., 1925, B. 5, Hf. 1.
4. Jegorow I. T. Hydrodynamische Kräfte am Tragflügel bei instationärer Bewegung. Schiffbautechnik. Juni, 1959.
5. Кочин Н. Е. Гидродинамическая теория решеток. Гостехиздат, 1949.
6. Смойлович Г. С. Неуставившийся вихревой поток вокруг решетки тонких вибрирующих профилей. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Ю. А. ПАНОВ

(Москва)

При обтекании сверхзвуковым потоком различных препятствий происходит взаимодействие скачков уплотнения с пограничным слоем. Это явление в случае двумерного потока довольно хорошо изучено, получен большой экспериментальный материал, имеются теоретические методы расчета давления в области отрыва пограничного слоя, вызванного скачком уплотнения. Напротив, обтекание трехмерных препятствий изучено мало. Однако этот вопрос несомненно представляет большой научный и практический интерес. В работе [1] приводятся экспериментальные данные обтекания сверхзвуковым потоком с числом Маха 2.5 цилиндра, укрепленного на пластине. При помощи метода визуализации исследованы форма линии отрыва пограничного слоя перед цилиндрами различного диаметра с условно бесконечной высотой, структура течения вблизи поверхности в области отрывного течения и получено распределение давления на пластине вдоль линии симметрии.

В данной работе приводятся результаты исследования взаимодействия пространственного скачка уплотнения с турбулентным слоем на пластине. Эксперименты проводились при числе Маха набегающего потока $M_1 = 3.11$. Инициаторами скачков уплотнения были цилиндры различных диаметров и высот, которые крепились на заостренной дренированной пластине. Расстояние оси цилиндров от передней кромки пластины $l_0 = 140$ мм. Число Рейнольдса $R = u_1 l_0 / \nu_1 = 1.87 \cdot 10^7$, где u_1 и ν_1 — скорость и кинематическая вязкость в набегающем потоке. Подробно методика проведения экспериментов изложена в работе [1], там же приведены фотографии распределения визуализирующего состава по поверхности пластины перед цилиндром и теневые фотографии обтекания модели. При числе $M_1 = 3.11$ качественно стороны явления будут аналогичны.

Механизм возникновения отрыва пограничного слоя в трехмерном случае в общих чертах тот же, что и в двумерном случае. Однако в последнем случае на отрыв влияют дополнительные факторы. Прежде всего — это наличие в окрестности отрыва градиентов давления вдоль поверхности не только в направлении набегающего потока, но и в перпендикулярном направлении. Это приводит к возникновению внутри пограничного слоя вторичного течения, скорость которого направлена под некоторым углом к линиям тока внешнего течения. Линии тока вблизи поверхности перед линией отрыва искривляются. Это искривление хорошо заметно на фотографиях распределения визуализирующего состава [1].

Уменьшение кривизны линий тока соответствует уменьшению градиента давления в направлении вогнутости. Так как градиенты давления перед отрывом поперек пограничного слоя меньше, чем в боковом и продольном направлениях, то в первом приближении статическое давление поперек слоя можно считать постоянным. Вследствие того, что скорости внутри пограничного слоя меньше, линии тока прогнуты больше, чем линии тока вблизи внешней границы слоя. Следовательно, дополнительные составляющие скорости, возникающие в пограничном слое, нормальны линиям тока внешнего течения. Векторы скорости внутри пограничного слоя на разных расстояниях от пластины не параллельны друг другу, профиль скорости, перпендикулярный стенке, искривляется, приобретая пространственный характер. Такой пограничный слой на-