$4 — M = 5.5—6.25$, $5 — M = 7.5—8$). На этой же фигуре приведены экспериментальные данные Дрейка и Беккера [5] (точка $1 — M = 2.24 — 2.75$, $2 — M = 2.78 — 3.56$), Эберли (взяты из [6], фиг. 14, точка $6 — M = 4 — 6$), Тауэна и Дрейка [7] (нанесены в виде заштрихованной области, $M = 4—5$), а также значения $r$ при свободно-молекулярном режиме обтекания [8] (штрих-пунктирные линии). Наблюдается некоторая тенденция к расслоению опытных данных в зависимости от числа Маха $M$.

Исследования теплоотдачи проведены в диапазоне чисел $M = 6.2—6.35$, $R = 40—282$, $K = 0.033—0.24$, $t_w = 0.62—0.64$. Результаты исследований теплоотдачи представлены на фиг. 2 в виде зависимости числа Нуссельта $N_e = \alpha D/\lambda_e$ от числа Рейнольдса $R_s = u_s\rho_s D_s/\mu_s$, подсчитанного по диаметру шара и параметрам потока за нормальным скачком уплотнения ($u_s$, $\rho_s$, $\mu_s$ — скорость, плотность, коэффициент вязкости газа за скачком). На этой же фигуре приведены опытные данные Эберли (точка $2 — M = 4—6$), Дрейка и Беккера [5,6] (точка $3 — M = 2.78—3.56$, точка $4 — M = 2.24—2.75$). Следует отметить, что приведенные на фиг. 2б опытные данные практически не расслаиваются в зависимости от числа Маха. На фиг. 2б нанесена для сравнения зависимость $N$ от $R$, полученная при континуальном режиме обтекания, когда $M \to 0$ [9] (сплошная линия), а также зависимость $N_e = f(R_s)$ для режима свободно молекулярного обтекания (штрих-пунктирная линия) при условиях: $M \gg 1$, коэффициент аккомодации $\sigma = 1$, $(\mu_s\lambda/\mu\lambda_e) = 0.85$

Поступило 18 VII 1965

## ЛИТЕРАТУРА


1. Костерин С. И., Кошмаров Ю. А., Осипов Ю. В. Исследование течения и теплообмена разреженного газа в плоском сверхзвуковом сопле. Инж.-физ. ж., 1962, т. V, № 4.
2. Костерин С. И., Кошмаров Ю. А., Горская Н. М. Экспериментальное исследование теплообмена плоской пластины в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Инж. ж., 1962, т. 2, № 2.
3. Кошмаров Ю. А., Горская Н. М. Теплообмен пластины в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Инж. ж., 1965, т. 5, № 2.
4. Малков М. П., Павлов К. Ф. Справочник по глубокому охлаждению. Гостехиздат, 1950.
5. Дрейк Р., Беккер Д. Теплоотдача от шара к разреженному газу в сверхзвуковом потоке. Сб. «Вопросы ракетной техники», Изд. иностр. литер., 1953, № 2 (14).
6. Шааф С. А., Шамбре П. А. Течение разреженных газов. Сб. «Основы газовой динамики» (под ред. Эммонса). Изд. иностр. литер., 1963.
7. Touryan K. J., Drake R. M., Jr. Flow investigation in delaval supersonic nozzles at very low pressures. Rarefied Gas Dynamics, edit. by J. A. Laurmann, v. 2, p. 402—434, New York — London, 1963.
8. Оппенгейм А. К общей теории конвективного теплообмена в свободномолекулярном потоке. Сб. Механика. Изд. иностр. литер., 1953, № 5 (21).
9. Кацнельсон Б. Д., Тимофеева-Агафонова. Ф. А. Исследование коэффициента теплоотдачи частиц в потоке в нестационарных условиях. Изд. Котлотурбостроение, 1948, № 5.


---

# ОБ УСТАНОВЛЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО СМЕШЕНИЯ В СТРУЯХ


В. Т. КИРЕЕВ

*(Москва)*


На основе анализа автомодельных движений в нестационарном ламинарном пограничном слое [1] и при нестационарной свободной турбулентности [2] приводятся автомодельные режимы для плоской и осесимметричной струи (при ламинарном и турбулентном течениях). Приближенно определяется время установления стационарного смешения в различных поперечных сечениях этих струй.

Пусть из узкой щели или маленького круглого отверстия, начиная с момента времени $t = 0$, бьет струя жидкости в пространство, заполненное той же жидкостью, и импульс струи в сечении $x = 0$ остается постоянным

$$I_i = 2 \int_0^\infty (\pi y)^i \rho u^2 \, dy \tag{1}$$

При отсутствии продольного градиента давления это течение описывается уравнениями расхода и количества движения

$$\frac{\partial y^i u}{\partial x} + \frac{\partial y^i v}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{y^i}\frac{\partial y^i \tau}{\partial y} \tag{3}$$

с граничными условиями

$$v = 0, \quad \partial u/\partial y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{4}$$

$$u = 0, \quad \partial u/\partial y = 0 \quad \text{при} \quad y = y^*(x, t) \quad (y \to \infty) \tag{5}$$

Здесь величина $x$ — расстояние по оси струи, $\rho$ — плотность, $u$ и $v$ — составляющие скоростей по ортогональным осям $x$, $y$, для плоского течения $i = 0$, для осесимметричного $i = 1$; касательное напряжение

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \tau = \rho \varkappa y^* u_0 \frac{\partial u}{\partial y} \tag{6}$$

при ламинарном и турбулентном смешениях соответственно [3], где $\mu$ — вязкость, $y^*(x, t)$ — граница струи, $\varkappa$ — константа, определяемая из опыта, $u_0$ — скорость на оси струи. При этом будут иметь место автомодельные режимы

для ламинарного течения [1]

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = (J_1 \nu x)^{1/3}\Phi_1(\eta_1, \zeta_1), \quad \eta_1 = \frac{J_1^{1/3} y}{(\nu x)^{2/3}}, \quad \zeta_1 = \frac{\nu^{1/3} x^{4/3}}{J_1^{2/3} t} \quad (i = 0)\\
&\Psi_2 = \nu x \Phi_2(\eta_2, \zeta_2), \quad \eta_2 = \frac{J_2^{1/2} y}{\nu x}, \quad \zeta_2 = \frac{\nu x^2}{J_2 t} \quad (i = 1)
\end{aligned} \tag{7}$$

для турбулентного течения [2]

$$\begin{aligned}
&\Psi_3 = (J_3 x)^{1/2}\Phi_3(\eta_3, \zeta_3), \quad \eta_3 = \frac{y}{x}, \quad \zeta_3 = \frac{x^{3/2}}{J_3^{1/2} t} \quad (i = 0)\\
&\Psi_4 = J_4^{1/2}\Phi_4(\eta_4, \zeta_4), \quad \eta_4 = \frac{y}{x}, \quad \zeta_4 = \frac{x^2}{J_4^{1/2} t} \quad (i = 1)
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $J_j$ — постоянные величины (определяемые ниже), имеющие одинаковые с $I_i$ размерности; $\Psi_j$ — функция тока ($j = 1,2,3,4$)

$$u = \frac{1}{y^i}\frac{\partial \Psi_j}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{y^i}\frac{\partial \Psi_j}{\partial x}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{9}$$

Подставляя (7) и (8) в (3) с использованием (6), (9), получим

$$\begin{aligned}
&\zeta_j\left[\eta_j^{-i}\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \zeta_j \partial \eta_j}\left(m_j \eta_j^{-i}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_j} - \zeta_j\right) - m_j \eta_j^{-i}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \zeta_j}\frac{\partial}{\partial \eta_j}\left(\eta_j^{-i}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_j}\right)\right] + n_j\left(\eta_j^{-i}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_j}\right)^2 -\\
&\quad - [n_j + l_j(1+i)]\,\eta_j^{-i}\Phi_j\frac{\partial}{\partial \eta_j}\left(\eta_j^{-i}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_j}\right) =\\
&\quad = \left[\varkappa \eta_j^*\left(\eta_j^{-i}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_j}\right)_{\eta_j = 0}\right]^\alpha \eta_j^{-i}\frac{\partial}{\partial \eta_j}\left[\eta_j^i\frac{\partial}{\partial \eta_j}\left(\eta_j^{-i}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_j}\right)\right]
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$n_1 = -1/3, \; n_2 = n_4 = -1, \; n_3 = -1/2, \quad l_1 = 2/3, \; l_2 = l_3 = l_4 = 1, \quad m_j = 1 - n_j \tag{11}$$

$\alpha = 0$ для ламинарного и $\alpha = 1$ для турбулентного случаев. В дальнейшем для простоты обозначений индекс $j$ опустим.

При $\zeta \to 0$ ($t \to \infty$) уравнение (10) совпадает с соответствующими уравнениями, описывающими стационарное движение в плоских и осесимметричных ламинарных и турбулентных струях.

Ввиду сложности уравнения (10) его решение весьма затруднительно, поэтому для нахождения времени установления стационарного течения в различных поперечных сечениях струи используем метод интегральных соотношений.

Так же как в задаче о формировании пограничного слоя за ударной волной на полубесконечной пластине [4], методом интегральных соотношений определим размеры области в плоскости $\zeta$, $\eta$, в которой течение будет стационарным. Для этого с учетом (4) запишем уравнение (3) на оси струи

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{y^i}\,\frac{\partial y^i\tau}{\partial y^i}\qquad (y=0) \tag{12}$$

и интегральное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{y^*} y^i u\,dy+\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^{y^*} y^i u^2\,dy=0 \tag{13}$$

поставив граничные условия (5) при $y = y^*(x, t)$. Из (13) в частности, следует, что (1) имеет место, если, начиная с $t = 0$, параметры потока в сечении $x = 0$ не зависят от времени.

Представим отношение продольной составляющей скорости к скорости на оси струи в виде

$$u / u_0 = f(y / y^*),\qquad n_0 = Ux^n\varphi(\zeta)\quad \varphi(\xi)=\partial\Phi/\partial\eta\quad (\eta=0) \tag{14}$$

где $f$ удовлетворяет (4), (5), а $U$ — размерная постоянная, определяемая из (7), (8).

Подставляя (14) в (12) и (13) с использованием (6) — (9), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для определения функций $\eta^*=\delta$ и $\varphi$

$$\delta=E\varphi^{\frac{1+\alpha}{2-\alpha}}\left[n\varphi^2+\zeta(m\varphi-\zeta)\frac{d\varphi}{d\zeta}\right]^{\frac{1}{\alpha-2}}\qquad (mA_i\varphi-\zeta)\frac{d}{d\zeta}(\varphi\delta^{1+i})+mA_i\varphi\delta^{1+i}\frac{d\varphi}{d\zeta}=0$$

$$\left(E=\left[\varkappa^\alpha\frac{(r^if')'}{r^i}\right]^{\frac{1}{2-\alpha}}\quad \text{при } r=0,\ r=\frac{y}{y^*},\quad A_i=\int\limits_0^1 r^if^2\,dr\left[\int\limits_0^1 r^if\,dr\right]^{-1}\right) \tag{15}$$

Исключая из (15) величину $\delta$, имеем

$$\frac{i+1}{\alpha-2}\zeta\varphi(mA_i\varphi-\zeta)(m\varphi-\zeta)\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}+\zeta\left[\omega_1(mA_i\varphi-\zeta)(m\omega_2\varphi-\zeta)+(m\varphi-\zeta)mA_i\varphi\right]\times$$

$$\times\left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)^2+\varphi\left[\frac{2(i+1)}{\alpha-2}(mA_i\varphi-\zeta)(m\omega_3\varphi-\zeta)+mnA_i\varphi^2\right]\frac{d\varphi}{d\zeta}=0 \tag{16}$$

$$\left(\omega_1=1+\frac{(1+i)(1+\alpha)}{2-\alpha},\quad \omega_2=\frac{2+i\alpha}{3+i(1+\alpha)},\quad \omega_3=\frac{\alpha-2}{2m(1+i)}\left[n\omega_1+\frac{i+1}{\alpha-2}(2n+m)\right]\right)$$

При этом из (1) следует

$$\varphi=\text{const}=D_0\ \text{при}\ \zeta=0 \tag{17}$$

Если взять $f(r)$ в виде полинома [5]

$$f(r)=1-r^2(6-8r+3r^2)$$

$$A_0={}^5/_7\ (i=0),\quad A_1={}^{11}/_{21}\ (i=1) \tag{18}$$

Полагая в (17) $D_0 = 1$, из (1) и (14) получим

$$J=\frac{I_i}{\rho\pi^i}\left(n^{\frac{1}{\alpha-2}}E\right)^{-1-i}\left(2\int\limits_0^1 r^if^2\,dr\right)^{-1} \tag{19}$$

Запишем уравнение (16) в окрестности особой точки $\zeta = 0$, $\varphi = 1$.

$$\zeta\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}+F_0\zeta\left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)^2+F_1\frac{d\varphi}{d\zeta}=0\qquad \left(F_0=\frac{\alpha-2}{1+i}(1+\omega_1\omega_2),\ F_1=2\omega_3+\frac{n}{m}\,\frac{\alpha-2}{1+i}\right) \tag{20}$$

Оно имеет решение

$$\varphi=D_1+\ln\left[1+D_2\frac{F_0}{1-F_1}\zeta^{1-F_1}\right]^{1/F_0} \tag{21}$$

Так как для всех рассматриваемых случаев ($j = 1,2,3,4$) $F_1 > 1$, то значения произвольных постоянных $D_1$ и $D_2$ в (21) с учетом (17) будут равны $D_1 = D_0 = 1$, $D_2 = 0$.

Поэтому из точки $\zeta = 0$, $\varphi = 1$ выходит единственная интегральная кривая $\varphi = 1$ уравнения (16), соответствующая стационарному режиму течения.

Как видно из (18), $A_i < 1$, поэтому эта интегральная кривая имеет особую точку

$$\zeta = \zeta_* = mA_i, \qquad \varphi = 1$$

в окрестности которой

$$\varphi = 1 + D_3 (mA_i - \zeta)^{F_3} \qquad \left(F_3 = 1 - \frac{n}{1-n} \frac{2-\alpha}{A_i(1+i)}, \; F_3 > 0\right)$$

где произвольная постоянная $D_3 = 0$ при $\zeta \leqslant \zeta_*$, и $D_3$ может быть не равно нулю при $\zeta \geqslant \zeta_*$ в зависимости от характера течения при $\zeta \geqslant \zeta_*$. При этом, как и в [4], размеры области в плоскости $\zeta$, $\eta$, в которой будет стационарное течение, не зависят от характера течения при $\zeta \geqslant \zeta_*$.

При указанном выше приближенном расчете стационарное течение будет иметь место от $\zeta = 0$ и, по крайней мере, до $\zeta = \zeta_*$.

Таким образом, если, начиная с $t = 0$, из линейного или точечного источника истекает струя и параметры потока в сечении $x = 0$ не зависят от времени, то вслед за возмущениями, которые распространяются по покоящейся среде перед источником (здесь не рассматриваемыми), движется «волна», оставляющая за собой стационарную струю. Движение этой «волны» определяется как $\zeta \geqslant \zeta_* = mA_i$, где, в зависимости от вида струи, в качестве $\zeta$, $m$, $A_i$ нужно взять соответствующие выражения из (7), (8), (11), (18) и (19).

Приведенный анализ легко распространяется для плоской ламинарной струи на течение с учетом сжимаемости газа.

Действительно, пусть из узкой щели, начиная с $t = 0$, бьет струя газа в пространство, заполненное тем же газом, причем

$$I_0 = 2 \int_0^\infty \rho u^2 \, dy = \text{const} \qquad (x = 0) \tag{22}$$

$$Q_0 = 2 \int_0^\infty \rho u H \, dy = \text{const} \qquad \left(H = i - i^\circ + \frac{u^2}{2}\right) \tag{23}$$

и в дополнение к (4), (5)

$$i = i^\circ, \; \partial T / \partial y = 0 \quad \text{при } y = y^* (x, t) \; (y \to \infty) \tag{24}$$

где $i$ — энтальпия, $T$ — температура.

Тогда уравнения расхода и количества движения сжимаемого пограничного слоя в переменных [4]

$$t, \qquad x, \qquad Y = \int_0^y \frac{\rho}{\rho^\circ} \, dy$$

при введении новой функции

$$V = \frac{\rho}{\rho^\circ} v + \frac{\partial Y}{\partial t} + u \frac{\partial Y}{\partial x}$$

для $\mu\rho = \text{const}$ совпадают с уравнениями (1), (2), если $y$ и $v$ заменить на $Y$ и $V$ соответственно. Вместе с тем, уравнение энергии для числа Прандтля, равного единице, имеет интеграл Крокко, который с учетом (23) и (24) дает

$$H = Q_0 u \,/\, I_0$$

Поступило 21 VII 1965

## ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов Ю. А. Об одном классе нестационарных автомодельных движений газа в ламинарном пограничном слое. Научн. докл. высш. школы, Физ.-матем. науки, 1958, № 5.
2. Демьянов Ю. А., Киреев В. Т. Применение уравнений нестационарного смещения к некоторым задачам аэродинамики. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. Иностр. лит., 1955.
4. Демьянов Ю. А. Формирование пограничного слоя на пластине с движущимся скачком уплотнения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
5. Гиневский А. С. Турбулентные неизотермические струйные течения сжимаемого газа. Промышл. аэродинамика, Оборонгиз, 1962, вып. 3.