

## ЛИТЕРАТУРА

1. K r a s e W. H. Performance analysis of plug nozzles for turbojet and rocket exhausts. Paper Amer. Soc. Mech. Engrs. No 58—A—248
2. I l s e n V. Curved nozzles. Proceedings of the 6th Symposium on ballistic missiles and aerospace technology. 1961, vol. III, Academic Press.
3. К а ц к о в а О. Н. Расчет кольцевых сверхзвуковых сопел и диффузоров. Сб. «Вычислительная математика», № 3, Изд-во АН СССР, 1958.
4. П и р у м о в У. Г., Р у б ц о в В. А. Расчет осесимметричных сверхзвуковых кольцевых сопел. АН СССР, Механ. и машин., 1961, № 6.
5. H. C r e e r. Rapid Method for Plug Nozzle Design. ARS Journal, 1961, vol. 31, N 4.
6. G. A n g e l i n o. Approximate Method for Plug Nozzle Design. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No 10.
7. Г о г и ш Л. В., С т е п а н о в Г. Ю. Приближенный расчет двухмерных сверхзвуковых течений с характеристиками малой кривизны. II Всес. съезд по теоретической и прикладной механике, 1964.

### ОБМЕН КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ ВОЗДУХА ЗА ФРОНТОМ ПРЯМОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Л. И. ТУРЧАК (Москва)

Релаксация колебательной энергии частиц многокомпонентной смеси газов за фронтом ударной волны происходит при активном участии двух механизмов: 1 — перехода поступательной энергии сталкивающихся молекул в колебательную и 2 — обмена колебательной энергией между молекулами различных компоненты при их столкновении.

В однокомпонентных системах второй механизм несуществен, так как суммарная колебательная энергия системы в результате обмена не меняется. В многокомпонентной смеси двухатомных газов обменный процесс приводит к перераспределению колебательной энергии между отдельными компонентами, что может сопровождаться существенным изменением размера области релаксации для каждой компоненты.

Однако при решении многих газодинамических задач с учетом неравновесного возбуждения колебательных степеней свободы принимался во внимание только механизм 1, что в ряде случаев приводило к некоторым расхождениям между результатами численного расчета и экспериментом. Поэтому возникла необходимость построения модели для учета обмена колебательной энергией между молекулами и ее исследования.

Способ учета обменных процессов был предложен в работе [1], где на основе теории молекулярных соударений выводится система релаксационных уравнений для бинарной смеси газов в предположении одноквантовых переходов, а также проведено теоретическое исследование некоторых предельных случаев в зависимости от влияния разных механизмов на времена релаксации отдельных компонент. Изучение рассматриваемых процессов для воздуха проводится в работе [2], где выведены расчетные формулы и проведены некоторые расчеты, демонстрирующие влияние обмена колебательной энергией между компонентами.

Ниже изучается процесс обмена в воздухе в зависимости от скорости ударной волны. Исследуется критическая область (по числу Маха) для выявления момента, начиная с которого второй механизм становится меньше первого; для чисел Маха, меньших критического, изучается вопрос — в какой части области релаксации преобладает один из механизмов.

Расчеты проводились для широкого диапазона чисел Маха ( $M = 3-20$ ) как с учетом, так и без учета обмена колебательной энергией.

1. Рассмотрим одномерное течение газа (воздуха) за фронтом прямой ударной волны. Ось  $x$  совпадает с направлением движения, начало отсчета соответствует фронту волны. Воздух считаем смесью двух компонент: кислорода ( $O_2$ ) и азота ( $N_2$ ).

Распределение поступательной и вращательной энергии считаем равновесным и равным их классическим значениям ( $3/2RT$  и  $RT$  соответственно). Имеет место неравновесное распределение только колебательной энергии; процессами ионизации и диссоциации пренебрегаем.

Для параметров газа введем безразмерные величины по следующим формулам:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad u^* = \frac{u}{V}, \quad p^* = \frac{p}{\rho V^2}, \quad T^* = \frac{T}{T_\infty}, \quad e_i^* = \frac{e_i}{RT_\infty} \quad (i = 1, 2)$$

Здесь  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $T$  — плотность, скорость, давление и температура смеси за ударной волной;  $e_i$  — неравновесное значение колебательной энергии  $i$ -й компоненты, отнесенное к 1 молю (индексом 1 везде будем указывать величины, относящиеся к кислороду, индексом 2 — к азоту);  $L$  — характерный линейный размер;  $\rho_\infty$ ,  $P_\infty$ ,  $T_\infty$  — параметры невозмущенного потока газа (перед волной);  $V$  — скорость ударной волны;  $R$  — универсальная газовая постоянная.

Для расчета принимаем  $L = 1$  см,  $P_\infty = 10^{-3}$  атм,  $T_\infty = 250^\circ$  К.

Уравнения, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии, а также уравнение состояния в безразмерных переменных имеют вид (звездочки опускаем)

$$\begin{aligned} \rho u &= 1, & p + \rho u^2 &= p + \frac{1}{\lambda}, & p &= \frac{\rho T}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} T + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \right) + \frac{u^2}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)\lambda} \\ \left( \lambda = \gamma M^2, \gamma = 1.4, \alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{\rho_1/m_1}{\rho/m} + \frac{\rho_2/m_2}{\rho/m} = 1, m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\alpha_i$ ,  $\rho_i$ ,  $m_i$  ( $i = 1, 2$ ) — концентрация, плотность и молекулярный вес  $i$ -й компоненты;  $m$  — молекулярный вес смеси. Для воздуха имеем:  $\alpha_1 = 0.21$ ,  $\alpha_2 = 0.79$ ,  $m_1 = 32$  г/моль,  $m_2 = 28$  г/моль,  $m = 28.82$  г/моль.

Преобразуя уравнения для колебательных квантов  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  [2], получим следующие релаксационные уравнения для колебательных энергий кислорода и азота:

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dx} &= A(f_{11} - f_{12}), & \frac{de_2}{dx} &= A(f_{22} + f_{21}) & \left( A = \frac{L\rho_\infty C T_\infty^{1/2}}{V} \frac{\gamma_1}{m_{12}} \right) & (1.2) \\ f_{11} &= \rho^2 T^{1/3} \frac{2}{\vartheta_1} \operatorname{sh} \frac{\vartheta_1}{2T} (e_{1e} - e_1) \left\{ \frac{m_{12}}{m_{11}} A_{11}^{7/6} \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{A_{11}}{T} \right)^{1/3} \right] + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A_{12}^{7/6} \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{A_{12}}{T} \right)^{1/3} \right] \right\} \\ f_{12} &= \rho^2 T^{1/3} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \vartheta_1 \frac{\pi^2}{\vartheta_{\Delta 12}^2} \frac{A_{\Delta 12}^{13/6}}{A_{12} A_{21}} \left[ e_1 (e_2 + \vartheta_2) \exp \frac{\vartheta_{\Delta 12}}{2T} - \right. \\ &\quad \left. - e_2 (e_1 + \vartheta_1) \exp \left( -\frac{\vartheta_{\Delta 12}}{2T} \right) \right] \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{A_{\Delta 12}}{T} \right)^{1/3} \right] \\ f_{22} &= \rho^2 T^{1/3} \frac{2}{\vartheta_2} \operatorname{sh} \frac{\vartheta_2}{2T} (e_{2e} - e_2) \left\{ A_{21}^{7/6} \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{A_{21}}{T} \right)^{1/3} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_{12}}{m_{22}} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A_{22}^{7/6} \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{A_{22}}{T} \right)^{1/3} \right] \right\} \\ f_{21} &= \frac{\gamma_1/\gamma_2}{\vartheta_1/\vartheta_2} f_{12}, & e_{ie} &= \frac{\vartheta_i}{\exp(\vartheta_i/T) - 1}, & \vartheta_{\Delta 12} &= \vartheta_1 - \vartheta_2 \\ m_{ij} &= \sqrt{\mu_{ij}}, & \mu_{ij} &= \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, & \vartheta_i &= \frac{h\nu_i}{kT_\infty} \\ \gamma_i &= \frac{\alpha_i}{m} \quad (i, j = 1, 2; \vartheta_1 = \frac{2240^\circ}{T_\infty}, \vartheta_2 = \frac{3354^\circ}{T_\infty}) \end{aligned}$$

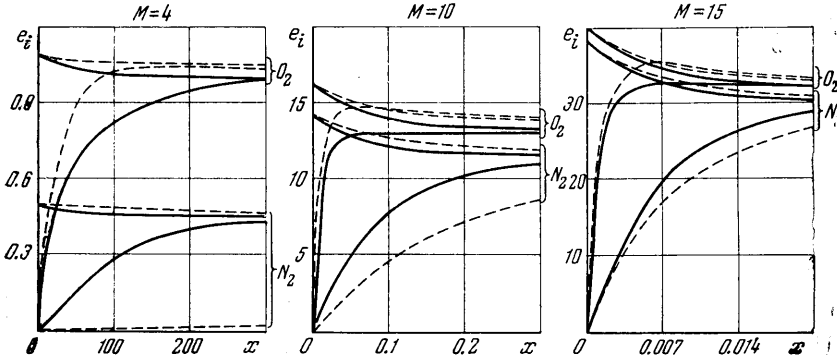
Здесь  $e_{ie}$ ,  $\vartheta_i$ ,  $\nu_i$  — равновесное значение колебательной энергии, безразмерная характеристическая колебательная температура и собственная частота колебаний молекул (моделью молекулы служит гармонический осциллятор)  $i$ -й компоненты;  $\mu_{ij}$  — приведенная масса пары сталкивающихся частиц  $i - j$ ;  $h$  — постоянная Планка;  $k$  — постоянная Больцмана;  $C$ ,  $A_{ij}$ ,  $A_{\Delta 12}$  — некоторые физические константы [2].

В уравнениях (1.2) первые члены в правых частях ( $f_{ii}$ ) характеризуют скорость релаксационного процесса вследствие механизма  $I$ , вторые члены ( $f_{ik}$ ) описывают обмен колебательной энергией между частицами различных компонент.

Таким образом, имеем систему шести уравнений (1.1), (1.2), первые четыре из которых — алгебраические и два последние — дифференциальные. Решая систему, получим распределение параметров газа за фронтом прямой ударной волны.

2. Уравнения (1.2) с учетом соотношений (1.1) решались методом Рунге — Кутты на электронной вычислительной машине. Непосредственно за фронтом ударной волны колебательные энергии кислорода и азота не возбуждены, т. е. в качестве начальных условий для релаксационных уравнений принимаем  $e_1 = e_2 = 0$  при  $x = 0$ .

На фиг. 1 показано распределение колебательной энергии кислорода и азота в области релаксации для некоторых чисел Маха (сплошные линии — с учетом механизма 2, пунктирные — без учета). Кривые, исходящие из начала координат, соответствуют неравновесной колебательной энергии. Верхние кривые представляют распределение равновесной колебательной энергии, вычисленной при локальной температуре. По мере увеличения  $x$  первые кривые стремятся к последним.



Фиг. 1

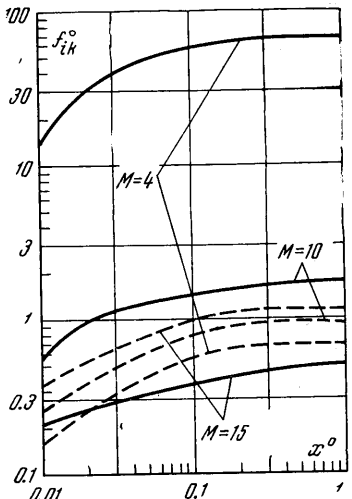
Для  $M = 4$  колебательная энергия азота без учета обмена ничтожно мала по сравнению с энергией при его учете. Зона релаксации в первом случае очень большая, а с учетом обмена она существенно укорачивается. Колебательная энергия кислорода быстро приближается к своему равновесному значению в случае отсутствия механизма 2, при его учете процесс релаксации замедляется, зона релаксации увеличивается примерно в три раза. Таким образом, происходит выравнивание зон релаксации кислорода и азота, связанное с перетеканием колебательной энергии от первого к последнему.

Физически этот результат можно объяснить следующим образом. При небольших числах Маха возбуждение колебаний молекул азота механизмом 1 фактически не происходит, колебательная энергия молекул кислорода при этом возбуждается, часть ее в результате столкновений передается молекулам азота, и таким образом, возбуждает их. Следовательно, возбуждение колебательной энергии азота для небольших чисел Маха происходит в основном за счет механизма 2, поэтому при расчетах во втором уравнении (1.2) можно лишь ограничиваться членом  $f_{21}$ . Для кислорода необходимо учитывать оба механизма.

На фиг. 2 построена зависимость  $f_{ik}^{\circ} = f_{ik}/f_{ii}$  от  $x^{\circ} = x/l_2$  сплошными линиями для азота, штриховыми для кислорода. Из фигуры следует, что при  $M=4$  скорость возбуждения колебательных степеней свободы молекул азота посредством механизма 2 (величина  $f_{21} \sim f_{12}$ ) сравнима со скоростью возбуждения колебаний кислорода посредством механизма 1, а отношение  $f_{21}/f_{22}$  очень велико за счет малости знаменателя  $f_{22}$ .

При увеличении числа Маха (фиг. 1,  $M = 10, 15$ ) колебания молекул азота начинают заметно возбуждаться посредством механизма 1; распределения неравновесной колебательной энергии азота с учетом и без учета обмена близки друг к другу. Как видно из фиг. 2, с увеличением  $M$  доля обменного члена в скорости релаксации азота уменьшается, и, наконец ( $M = 15$ ) решающая роль переходит к механизму 1.

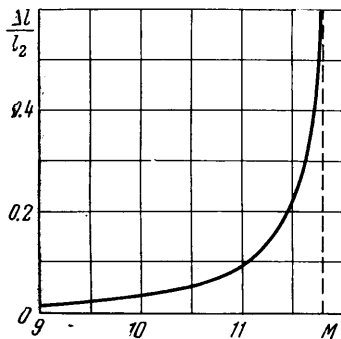
Процесс релаксации колебательной энергии кислорода при больших  $M$  носит ярко выраженный неравномерный характер. Зону релаксации можно условно разделить на две области. В первой — происходит быстрое приближение колебательной энергии кислорода к ее равновесному значению, при этом кривые с учетом и без учета обмена почти совпадают (фиг. 1). Из фиг. 2 также следует, что в этой области механизм 2 слабо влияет на процесс релаксации. Вторая область характеризуется резким замедлением процесса релаксации. Очевидно, это связано с влиянием механизма обмена, так как в решении без учета этого механизма последняя область отсутствует. Поскольку величина запаздывания возбуждения колебаний кислорода во второй области очень мала,



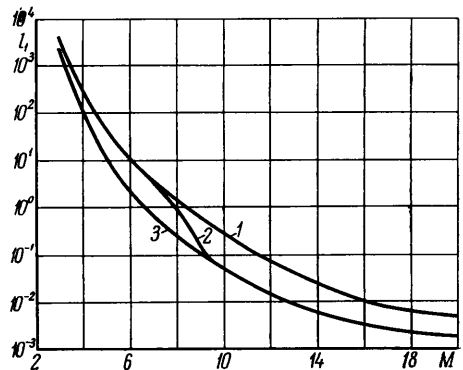
Фиг. 2

этой области в оценках неравновесной зоны можно пренебречь. Таким образом, влияние механизма 2 на релаксацию кислорода, так же как и азота, для больших  $M$  невелико.

На фиг. 3 представлена зависимость  $\Delta l / l_2$  для азота от числа  $M$ , где  $\Delta l$  — расстояние от фронта ударной волны до точки, в которой скорости релаксации, связанные с механизмами 1 и 2, равны между собой ( $f_{21} / f_{22} = 1$ ), а  $l_2$  — длина зоны релаксации азота. Эта кривая дает возможность проследить роль разных механизмов на различных участках зоны релаксации при изменении скорости ударной волны. Для чисел Маха до девяти механизм 1 превалирует лишь на участке, примыкающем к фронту ударной волны и составляющем меньше 2% от всей длины релаксации. На участке  $11 < M < 12$  происходит резкий переход, и при  $M \geq 12$  механизм 1 определяет скорость релаксации азота во всей области.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 представлены длины зон релаксации кислорода для различных чисел Маха как с учетом механизма 2, так и без его учета (кривые 1 и 3 соответственно). Эти длины определены из условия малой разности между равновесным и неравновесным значениями колебательной энергии. Как указывалось выше, при больших  $M$  зону релаксации кислорода в случае учета обмена можно разделить на две области: короткую область сильной неравновесности и более длинную околоравновесную область. При этом процесс колебательной релаксации  $O_2$  естественно характеризовать размерами первой области, считая процесс во второй области равновесным. Размеры первой области приведены на фиг. 4 (кривая 2). Как видно из графика, для небольших чисел Маха эта область совпадает со всей зоной релаксации кислорода при учете обмена; с увеличением  $M$  кривая 2 приближается к кривой 3 и затем они совпадают, т. е. процесс обмена практически не влияет на размер неравновесной зоны.

Заметим, что процесс обмена становится несущественным для кислорода при меньших числах Маха ( $M \sim 10$ ), чем для азота ( $M \sim 12$ ).

Проведенный анализ показывает, что при расчете колебательной релаксации в воздухе за ударными волнами необходимо учитывать различные механизмы в зависимости от числа  $M$  набегающего потока. При  $M \leq 10$  релаксация колебательной энергии кислорода определяется обоими механизмами, в то время как колебания азота возбуждаются только за счет передачи колебательной энергии кислорода (механизм 2). При  $M \geq 12$  механизм обмена практически не влияет на процесс колебательной релаксации компонент и размеры неравновесной зоны.

Автор благодарит канд. физ.-мат. наук В. П. Стулова, много содействовавшего решению настоящей задачи, и профессора Г. Ф. Теленина за обсуждение полученных результатов.

Московский гос. университет  
(НИИ механики)

Поступило 6 I 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

- О с и п о в А. И. Релаксация колебательной энергии в бинарной смеси двухатомных газов. ПМТФ, 1964, № 1.
- Г е н е р а л о в Н. А., Л о с е в С. А., О с и п о в А. И. Релаксация колебательной энергии молекул воздуха за фронтом прямой ударной волны. Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 5.