Условие (9) достаточно для устойчивого счета по конечноразностной схеме (7). При $h \to 0$ полученное разностное решение сходится к точному решению задачи. Доказательство этого факта приведено в [3] для более общей задачи. Оно, в частности, справедливо и для задачи (1), (2), (4).

Поступило 20 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

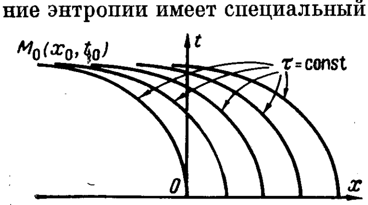
1. Баренблатт Г. И., Трифонов Н. П. О некоторых осесимметричных задачах неустановившейся фильтрации жидкости и газа в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 1956.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Физматгиз, 1962.
3. Баклановская В. Ф. Исследование метода сеток решения уравнения типа нестационарной фильтрации (двумерный случай). Дополнение к журналу вычисл. матем. и матем. физ., т. 4, № 4, Сб. «Численные методы решения дифф. уравнений и кубатурные формулы». 1964.

К ТЕОРИИ ОДНОМЕРНОГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

М. Д. УСТИНОВ

(Калинин)

Уравнения одномерного адиабатического движения идеального (т. е. лишенного вязкости и теплопроводности) газа в общем случае не допускают линеаризацию. Для совершенного газа линеаризация уравнений оказывается возможной, если распределение энтропии имеет специальный вид [1]. Рассмотрим идеальный газ, термодинамические параметры которого определим следующим образом:



Фиг. 1

$$T = \Phi(w+v) + \frac{f(w)}{F'(w+v)}, \quad p = f(w), \quad \rho = \frac{1}{v}$$

$$U = \int\limits_{\tau_0}^{\tau=w+v} \Phi(\tau) F'(\tau)\, d\tau + \int\limits_{w_0}^{w} f(w)\, dw \qquad (1)$$

$$S = F(w+v)$$

Здесь T — абсолютная температура; p — давление; ρ — плотность; U — внутренняя энергия газа, отнесенная к единице массы; S — энтропия; Φ, F, f — произвольные функции своих аргументов; τ_0, w_0 — произвольные константы.

Покажем, что уравнения адиабатического движения газа (1) допускают линеаризацию.

Упомянутые уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \qquad w + v = \varphi(\psi) \quad (2)$$

Фиг. 2

Здесь u — скорость газа, t — время, x — геометрическая координата, ψ — функция тока и φ — произвольная функция, определяемая из граничных условий.

Последнее уравнение выражает тот факт, что энтропия, определяемая из (1), остается неизменной для каждой частицы.

Уравнение (2) позволяет ввести две новые функции ψ и ξ такие, что

$$d\xi = u\,d\psi - p\,dt, \qquad dx = 1/\rho\, d\psi + u\,dt \qquad (3)$$

Примем скорость газа u и давление p за новые независимые переменные. Исключая ξ и x, найдем

$$\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{\partial \psi}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho}\right)_p' - \frac{\partial \psi}{\partial p}\left(\frac{1}{\rho}\right)_u' = \frac{\partial t}{\partial p} \qquad (4)$$

Из последнего уравнения (2) получим, учитывая, что $v = 1 / \rho$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_p' = \varphi'(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial p} - w_p', \qquad \left(\frac{1}{\rho}\right)_u' = \varphi'(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial u} \tag{5}$$

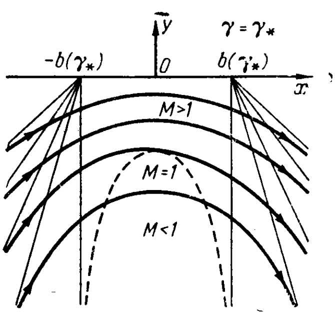
Используя (5), приведем уравнения (4) к следующей форме:

$$\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{\partial \psi}{\partial p}, \qquad \frac{\partial t}{\partial p} = -w_p'\frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad p = f(w) \tag{6}$$

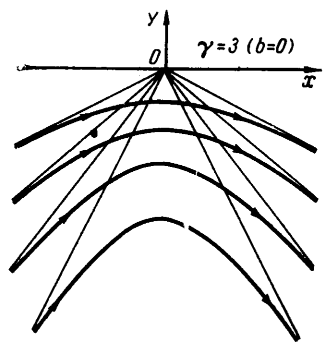
Следовательно, функции t и ψ удовлетворяют линейным однородным уравнениям

$$\frac{\partial^2 t}{\partial w^2} = f'(w)\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} = w_p'\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}, \qquad p = f(w) \tag{7}$$

Таким образом, независимо от того, является ли течение газа (1) адиабатическим или изоэнтропическим, сетка характеристик на плоскости (u, w) (или (u, p)) является одной и той же. Форма этой сетки не зависит от начальных и граничных условий той или иной задачи, а зависит лишь от функции $p = f(w)$. Подбирая должным образом эту функцию, можно получить общие решения (7) в замкнутом виде [2,3]. Например, для газа Чаплыгина $p = Aw$, где $A = \text{const}$, уравнения (7) являются волновыми.



Фиг. 3



Фиг. 4

Если якобиан преобразования $I = \partial(p, u) / \partial(x, t)$ обращается в нуль в некоторой области, то течение в ней является простой волной [2,4]. Таким образом, уравнения (7) описывают все адиабатические течения газа (1), кроме простых волн.

Рассматривая задачу о двумерном гиперзвуковом течении идеального газа (1) около плоского тонкого тела, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -w_p'\frac{\partial \eta}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial \eta}{\partial p}, \qquad p = f(w), \ d\eta = \rho u dy - \rho v dx \tag{8}$$

Здесь p — давление, ρ — плотность газа, u и v — проекции вектора скорости газа на оси x и y соответственно (невозмущенное движение газа происходит вдоль оси x). Уравнения (8) получаются из точных уравнений плоского установившегося адиабатического движения идеального газа в предположении, что число M течения велико по сравнению с единицей и что угол наклона вектора скорости газа к оси x мал по сравнению с единицей. Уравнения (8) можно получить также из (6), используя закон плоских сечений.

Поступило 2.XI.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Общие решения уравнений газовой динамики для одноразмерных движений для некоторого заданного уравнения состояния или процесса. Докл. АН СССР, 1954, т. 96, № 3.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Москва, 1955.
3. Домбровский Г. А. Приближенное интегрирование уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 6.
4. Naylor D. Unsteady Rectilinear das Flow. J. Math. and Mech., 1960, vol. 9, No 1.