ОБ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В. Ф. БАКЛАНОВСКАЯ, А. Н. ГАИПОВА

(Москва)

При исследовании различных случаев фильтрации газа, встречающихся на практике, представляет интерес следующая постановка задачи (см. [1]). При нестационарной осесимметрической изотермической фильтрации газа в недеформируемой пористой среде давление газа удовлетворяет уравнению

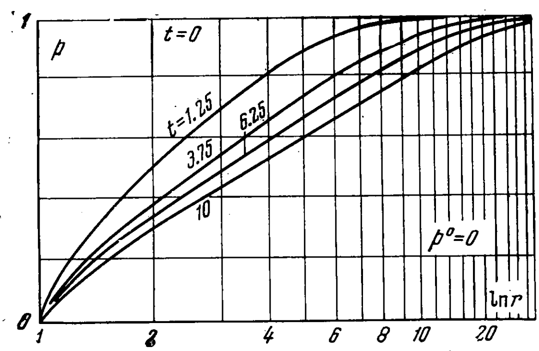
$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p^2}{\partial r}\right) \qquad \left(a = \frac{k}{2m\mu}\right) \tag{1}$$

Здесь k — проницаемость, m — пористость среды, μ — абсолютная вязкость фильтрующегося газа. Пласт предполагаем безграничным, давление газа в начальный момент постоянно и равно P. Предположим, что пласт вскрывается одиночной совершенной скважиной радиуса r_0. Через эту скважину в начальный момент времени $t = 0$ начинает закачиваться газ с переменным расходом $Q(t)$. Определение соответствующего распределения давления газа приводит к интегрированию уравнения (1) в области $r_0 \leqslant r < \infty$, $t \geqslant 0$ при условиях

$$p(r, 0) = P, \quad p(\infty, t) = P \tag{2}$$

и граничном условии на стенке скважины

$$\left(r\frac{\partial p^2}{\partial r}\right)_{r=r_0} = q(t) = -\frac{Q\mu\beta}{\pi k} \tag{3}$$



Фиг. 1

где β — константа. Ясно, что функция $q(t)$ не может быть задана произвольно: с увеличением $q(t)$ давление $p(r, t)$ (неотрицательная величина по смыслу задачи) около стенки скважины существенно падает. Представляет интерес найти функцию $q^*(t)$ такую, что при $q(t) > q^*(t)$ решение задачи (1) — (3) не существует.

Математически это соответствует решению краевой задачи для уравнения (1) при условиях (2) и граничном условии

$$p(r_0, t) = p_0 \quad (p_0, P = \text{const}) \tag{4}$$

Будем искать численные значения $p(r, t)$ и $q(t)$ при различных значениях p_0. Функция $q^*(t)$ соответствует значению $p_0 = 0$.

Краевая задача (1), (2), (4) содержит три числовых параметра r_0, p_0, P. Легко видеть, что число параметров может быть уменьшено до одного заменой переменных

$$r = r_0 r^*, \qquad t = \frac{t^*}{k} \qquad \left(k = \frac{P}{r_0^2}\right), \qquad p = P p^*$$

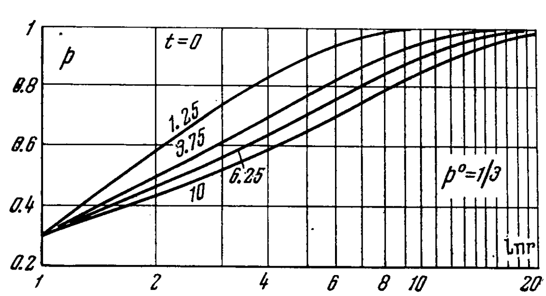
Получим задачу

$$\frac{\partial p^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 p^{*2}}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial p^{*2}}{\partial r^*} \tag{5}$$

с условиями

$$p^*(r^*, 0) = 1, \quad p^*(\infty, t^*) = 1$$

$$p^*(1, t^*) = \alpha \qquad \left(\alpha = \frac{p_0}{P} > 0\right) \tag{6}$$



Фиг. 2

Задачу (5), (6) решаем методом конечных разностей. Второе из условий (6) заменим приближенно условием

$$p^*(R, t^*) = 1 \qquad (R \gg 1)$$

Верхний индекс * у p, r, t в дальнейшем опускаем.

При помощи разностных отношений

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p_{i,\,k+1} - p_{i,\,k}}{\tau}, \qquad \frac{\partial p^2}{\partial r} = \frac{p^2_{i+1,\,k} - p^2_{i,\,k}}{h}, \qquad \frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} = \frac{p^2_{i+1,\,k} - 2p^2_{i,\,k} + p^2_{i-1,\,k}}{h^2}$$

заменим уравнение (1) конечно-разностным уравнением

$$p_{i,k+1} = p_{i,\,k} + \frac{\tau}{h^2}(p^2_{i+1,\,k} - 2p^2_{i,\,k} + p^2_{i-1,\,k}) + \frac{1}{r}\frac{\tau}{h}(p^2_{i+1,\,k} - p^2_{i,\,k}) \tag{7}$$

Здесь $\tau \ll 1$, $h \ll 1$ — шаги по t и r; $p_{i,\,k} = p\,(r_i,\,t_k)$, $k = 0,1,2,\ldots$; $i = 1,2,\ldots,N-1$; $r_i = r_0 + ih$; $t_k = k\tau$. По условиям задачи

$$p_{i,\,0} = 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,\,N)$$

$$p_{0,\,k} = \alpha \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$$p_{N,k} = 1$$

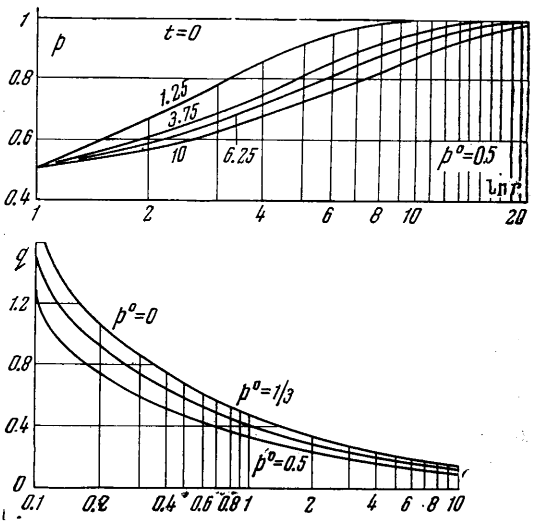
Зная значения функции $p\,(r,\,t)$ в точках k-го слоя ($t = k\tau$), вычисляем значения $p\,(r,\,t)$ в точках следующего ($k + 1$)-го слоя

$$(t = (k + 1)\,\tau)$$

по формуле (7).

Значения производной при $r = r_0$ на границе при $t = k\tau$ определялись через три соседние точки по конечно-разностной формуле (см. [2])

$$r\frac{\partial p^2}{\partial r} = \frac{r_0}{2h}\,[-3p^2_{0,k} + 4p^2_{1,k} - p^2_{2,k}]$$



Фиг. 3

Расчеты производились на ЭВМ при следующих значениях параметров: $R = 26$; $\alpha = 0$, $^1/_3$, 0.5. Графики функций $p\,(r,\,t)$ для $t = 0$, 1.25, 3.75, 6.25, 10 и $\alpha = 0$, $^1/_3$, 0.5 даны на фиг. 1, 2, 3 (вверху). Зависимость производной

$$q\,(t) = \left(r\,\frac{\partial p^2}{\partial r}\right)_{r=r_0}.$$

приведена на фиг. 3 (внизу). Перепишем формулу (7) в виде

$$p_{i,\,k+1} = p_{i,\,k}\left(1 - \frac{\tau}{h^2}2p_{i,\,k} - \frac{\tau}{rh}p_{i,\,k}\right) + p_{i+1,\,k}\left(\frac{\tau}{h^2}p_{i+1,\,k} + \frac{\tau}{rh}p_{i+1,\,k}\right) +$$
$$+ p_{i-1,\,k}\,\frac{\tau}{h^2}\,p_{i-1,\,k} \tag{8}$$

Докажем, что

$$0 \leqslant p_{i,\,k} \leqslant \max\{1,\ \alpha\}$$

Действительно, при $k = 0$ это неравенство справедливо. Предположим, что оно имеет место при некотором k. Тогда, если выполнено условие

$$1 - \frac{\tau}{h^2}2p_{i,\,k} - \frac{\tau}{rh}p_{i,\,k} \geqslant 0 \quad \text{или} \quad \tau \leqslant \frac{h^2}{(2 + h)\max(1,\alpha)} \tag{9}$$

коэффициенты при $p_{i,\,k}$, $p_{i+1,\,k}$, $p_{i-1,\,k}$ неотрицательны. Поэтому при условии (9)

$$p_{i,\,k+1} \leqslant \max\{p_{i,\,k};\ p_{i+1,\,k};\ p_{i-1,\,k}\}\,\sigma, \qquad p_{i,\,k+1} \geqslant \min\{p_{i,\,k};\ p_{i+1,\,k}\,p_{i-1,\,k}\}\,\sigma$$

где σ — сумма коэффициентов при $p_{i,\,k}$, $p_{i+1,\,k}\,p_{i-1,\,k}$. Нетрудно видеть, что $\sigma = 1$. Поэтому

$$0 \leqslant \min\{1,\ \alpha\} \leqslant \max p_{i,\,k+1} \leqslant \max\{1,\ \alpha\}$$

Условие (9) достаточно для устойчивого счета по конечноразностной схеме (7). При $h \to 0$ полученное разностное решение сходится к точному решению задачи. Доказательство этого факта приведено в [3] для более общей задачи. Оно, в частности, справедливо и для задачи (1), (2), (4).

Поступило 20 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

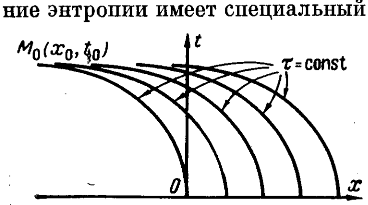
1. Баренблатт Г. И., Трифонов Н. П. О некоторых осесимметричных задачах неустановившейся фильтрации жидкости и газа в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 1956.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Физматгиз, 1962.
3. Баклановская В. Ф. Исследование метода сеток решения уравнения типа нестационарной фильтрации (двумерный случай). Дополнение к журналу вычисл. матем. и матем. физ., т. 4, № 4, Сб. «Численные методы решения дифф. уравнений и кубатурные формулы». 1964.

К ТЕОРИИ ОДНОМЕРНОГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

М. Д. УСТИНОВ

(Калинин)

Уравнения одномерного адиабатического движения идеального (т. е. лишенного вязкости и теплопроводности) газа в общем случае не допускают линеаризацию. Для совершенного газа линеаризация уравнений оказывается возможной, если распределение энтропии имеет специальный вид [1]. Рассмотрим идеальный газ, термодинамические параметры которого определим следующим образом:



Фиг. 1

$$T = \Phi(w+v) + \frac{f(w)}{F'(w+v)}, \quad p = f(w), \quad \rho = \frac{1}{v}$$

$$U = \int\limits_{\tau_0}^{\tau=w+v} \Phi(\tau) F'(\tau)\, d\tau + \int\limits_{w_0}^{w} f(w)\, dw \qquad (1)$$

$$S = F(w+v)$$

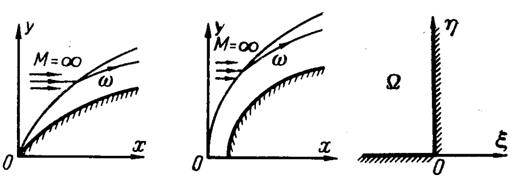
Здесь T — абсолютная температура; p — давление; ρ — плотность; U — внутренняя энергия газа, отнесенная к единице массы; S — энтропия; Φ, F, f — произвольные функции своих аргументов; τ_0, w_0 — произвольные константы.

Покажем, что уравнения адиабатического движения газа (1) допускают линеаризацию.

Упомянутые уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad w + v = \varphi(\psi) \quad (2)$$



Фиг. 2

Здесь u — скорость газа, t — время, x — геометрическая координата, ψ — функция тока и φ — произвольная функция, определяемая из граничных условий.

Последнее уравнение выражает тот факт, что энтропия, определяемая из (1), остается неизменной для каждой частицы.

Уравнение (2) позволяет ввести две новые функции ψ и ξ такие, что

$$d\xi = u\,d\psi - p\,dt, \qquad dx = 1/\rho\, d\psi + u\,dt \qquad (3)$$

Примем скорость газа u и давление p за новые независимые переменные. Исключая ξ и x, найдем

$$\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho}\right)_p' - \frac{\partial \psi}{\partial p}\left(\frac{1}{\rho}\right)_u' = \frac{\partial t}{\partial p} \qquad (4)$$