О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГАЗОВОГО ДАВЛЕНИЯ ВБЛИЗИ СКВАЖИНЫ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ГАЗОПРОНИЦАЕМОСТИ СРЕДЫ

С. Н. ОСИПОВ, Б. П. ПЯСЕЦКИЙ

(Донецк)

Изучение движения газа вблизи скважины при переменной газонепроницаемости среды (см., например, [1-3], пока не привело к решению удобному для инженерных расчетов.

В работе сделана попытка получить точное решение поставленной задачи при переменной газонепроницаемости среды классическим методом преобразования Лапласа, рассматривается решение частного случая (при $n = 2$), полученное через хорошо изученную функцию вероятности, и приближенные решения поставленной задачи.

Поставленная задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[rk(r) \frac{\partial p}{\partial r}\right], \quad \left[k(r) = \frac{1}{r^n}, \ n > 0\right] \tag{1}$$

при начальном и граничных условиях

$$p|_{t=0} = p|_{r\to\infty} = p_0; \quad p|_{r=r_0} = p_1$$

Здесь p_0 — квадрат природного газового давления в пласте, *ат*^{2}; p_1 — квадрат газового давления в скважине, *ат*^{2}; t — время, сутки; α — константа, зависящая от параметров среды; r_0 — радиус скважины, *м*; r — расстояние от центра скважины, *м*; $k(r)$ — функция, описывающая газопроницаемость среды.

Полагая $\alpha t = \tau$ и отыскивая решение задачи в виде

$$p(r, t) = U(r, \tau) + p_0 \tag{2}$$

для функции $U(r, \tau)$ получим

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[rk(r) \frac{\partial U}{\partial r}\right], \quad \begin{pmatrix} U|_{t=0} = U|_{r\to\infty} = 0 \\ U|_{r=r_0} = p_1 - p_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Введем преобразование Лапласа от функции

$$V(r, \lambda) = \int_0^\infty U(r, \tau) e^{-\lambda\tau} d\tau \tag{4}$$

где λ — комплексный параметр, $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Взяв преобразование Лапласа от обеих частей уравнения (3) и его условий для функции $V(r, \lambda)$, получаем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[rk(r) \frac{\partial V}{\partial r}\right] = \lambda V, \quad (V|_{r=r_0} = (p_1 - p_0)/\lambda, \quad V|_{r\to\infty} \to 0) \tag{5}$$

Уравнение (5) решается в цилиндрических функциях [4], и с учетом условий его решение будет

$$V(r, \lambda) = \frac{p_1 - p_0}{\lambda} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma-1} \frac{K_{1-S}(S\sqrt{\lambda} r^\gamma)}{K_{1-S}(S\sqrt{\lambda} r_0^\gamma)} \quad \left(S = \frac{2}{n+2}, \quad \gamma = \frac{1}{S}\right) \tag{6}$$

Здесь $K_\mu(z)$ — функция Макдональда.

При решении уравнения (5) принято, что $\sqrt{\lambda}$ фиксирован следующими требованиями: 1) $\sqrt{\lambda}$ — действительное положительное число при λ — действительном и положительном; 2) в плоскости λ сделан разрез вдоль действительной и отрицательной полуоси. Решение задачи (3) получается из (6) применением формулы обращения преобразования Лапласа

$$U(r, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-\lambda\tau} V(r, \lambda)\, d\lambda \tag{7}$$

где интегрирование идет по прямой, параллельной мнимой оси комплексной плоскости λ так, что прямая проходит правее всех особых точек подынтегральной функции.

В данном случае

$$U(r, \tau) = \frac{p_1 - p_0}{2\pi i} \int_C e^{-\lambda\tau} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma-1} F(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \left[F(\lambda) = \frac{K_{1-S}(S\sqrt{\lambda} r^\gamma)}{K_{1-S}(S\sqrt{\lambda} r_0^\gamma)}\right] \tag{8}$$

Для принятых значений n $(0 < n < \infty)$ $0 < S \leqslant 1$ функция $F(\lambda)$ будет аналитической функцией λ с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси.

При больших значениях $|\lambda|$, введя обозначения $y_0 = Sr^{\gamma}{}_0$ и $y = Sr^{\gamma}{}_0$, справедливо асимптотическое представление

$$\Psi(\lambda) = \frac{K_\nu(y\sqrt{\lambda})}{K_\nu(y_0\sqrt{\lambda})} \approx \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1/2} \exp - \sqrt{\lambda}(y - y_0) \tag{9}$$

что обеспечивает справедливость представления решения задачи (3) в виде (8) в силу известных теорем операционного исчисления [5].

Учитывая оценку (9), поведение функции $\Psi(\lambda) = (y_0 / y)^\nu$ $\nu = 1-1/\gamma$ и при $\lambda \to 0$, известными приемами [4] получим

$$U(r, \tau) = (p_1 - p_0)\left\{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma-1} \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-\rho\tau}[(F(\lambda))_+ - (F(\lambda))_-]\frac{d\lambda}{\lambda}\right\} \tag{10}$$

где знак $(\quad)_+$ означает, что выражение берется по верхнему берегу разреза, знак $(\quad)_-$ — на нижнем берегу. Эти значения выражаются через функции Бесселя первого рода и после вычислений

$$U(r, \tau) = (p_1 - p_0)\left\{1 - \frac{1}{\pi}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma-1} \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^\infty \frac{J_{1-S}(y_0\sqrt{\rho})N_{1-S}(y\sqrt{\rho}) - J_{1-S}(y\sqrt{\rho})N_{1-S}(y_0\sqrt{\rho})}{J_{1-S}^2(y_0\sqrt{\rho}) + N_{1-S}^2(y_0\sqrt{\rho})} \frac{e^{-\rho\tau}}{\rho}d\rho\right\} \tag{11}$$

Произведя замену переменной $y_0\sqrt{\rho} = x$, вместо (11) получим

$$U(r, \tau) = (p_1 - p_0) \times \qquad k = (r / r_0)^\gamma \tag{12}$$

$$\times\left\{1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma-1}\int_0^\infty \frac{J_{1-S}(x)N_{1-S}(kx) - J_{1-S}(kx)N_{1-S}(x)}{J_{1-S}^2(x) + N_{1-S}^2(x)} \exp\left(\frac{-\tau}{y_0^2}x^2\right)\frac{dx}{x}\right\}$$

Полученное выражение (12) дает решение поставленной задачи.

Интеграл в выражении (12) в общем случае исследовать трудно, но при $S = 1/2$, что отвечает $n = 2$, он берется элементарно. В этом случае получаем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_{1/2}(x)N_{1/2}(kx) - J_{1/2}(kx)N_{1/2}(x)}{J_{1/2}^2(x) + N_{1/2}^2(x)} \exp\left(\frac{-\tau}{y_0^2}x^2\right)\frac{dx}{x} = \tag{13}$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{k}}\int_0^\infty \frac{\sin(k-1)x}{x}\exp\left(\frac{-\tau}{y_0^2}x^2\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{k}}\Phi\left(\frac{k-1}{2\sqrt{\tau}}y_0\right) \qquad \left(\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt\right)$$

Возвращаясь к прежним обозначениям

$$U(r, \tau) = (p_1 - p_0)\left[1 - \Phi\left(\frac{r^2 - r_0^2}{4\sqrt{\pi}}\right)\right] \tag{14}$$

С учетом (2)

$$p(r, t) = p_1 + (p_0 - p_1)\Phi\left(\frac{r^2 - r_0^2}{4\sqrt{\pi}}\right) \tag{15}$$

Это выражение дает решение задачи для случая $n = 2$.

Для приближенного решения задачи при $n > 0$ положим

$$z = \frac{r^\gamma - r_0^\gamma}{2\sqrt{\tau}} \tag{16}$$

Подставив это выражение в уравнение (3), получим

$$U'' + 2zU' + \frac{2\sqrt{\tau}}{S}\frac{2S-1}{r^\gamma}U' = 0 \tag{17}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по z. Перепишем (17) в виде

$$U'' + 2zU' + \frac{2S-1}{z}U' = \left(\frac{r_0}{r}\right)^\gamma \frac{2S-1}{r^\gamma}U' \tag{18}$$

При $r \gg r_0$ правая часть уравнения мала по сравнению с третьим слагаемым левой части. Пренебрегая этим членом в уравнении получаем

$$U'' + 2zU' + \frac{2S-1}{z} U' = 0 \qquad (19)$$

Решение (19), удовлетворяющее условиям

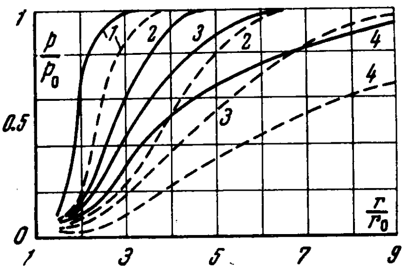
$$U|_{z=0} = p_1 - p_0,\ U|_{\infty z \to} = 0$$

будет (20)

$$U(r, \tau) = (p_1 - p_0)\left[1 - \frac{1}{\Gamma(1-S)}\right]\left[\int\limits_0^{z^2} e^{-\eta}\eta^{-S} d\eta\right]$$

Это выражение точно удовлетворяет граничным условиям и приближенно уравнению (3). С учетом (2) выражение (20) будет иметь вид (21)

$$p(r, t) = p_1 + (p_0 - p_1)\frac{1}{\Gamma(1-S)}\int\limits_0^{z^2} e^{-\eta}\eta^{-S} d\eta$$



Изменение относительного распределения газового давления в зависимости от относительного расстояния до скважины при различной газопроницаемости среды: *1*) $n = 6$, *2*) $n = 3$, *3*) $n = 2$, *4*) $n = 6/7$; сплошные линии $\sigma = 0.05$, пунктирные линии $\sigma = 0.02$.

Уравнение (10) является тем лучшим приближением уравнения (18), чем больше отношение r / r_0. Следует ожидать, что (21) является хорошим приближением при $r / r_0 \gg 1$. При $r / r_0 \approx 1$ уравнение (21) должно давать большие ошибки.

Однако в этом случае можно получить приближение непосредственно из точного решения (12), используя метод стационарной фазы.

Стационарной точкой является $x = 0$, поэтому, разлагая все подынтегральное выражение (кроме экспоненты) в ряд в окрестности $x = 0$ и удерживая только первые три члена, получим

$$U(r, \tau) = (p_1 - p_0)\left\{1 - \frac{k^{2(S-1)} - 1}{\Gamma(2-S)}\sigma^{2(1-S)} - \frac{2^{2(1-S)}\sqrt{\pi}\,\Gamma(S)}{\Gamma(S - 1/2)\,\Gamma^2(2-S)}[k^{2(1-S)} - 1]\,\sigma^{4(1-S)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(3/2 - S)}{\Gamma(1-S)\,\Gamma(3-S)}(k^{3-2S} - 1)\,\sigma^{2(1-S)+1} + \ldots\right\} \quad \left(\sigma = \frac{y_0}{2\sqrt{\tau}}\right) \qquad (22)$$

При больших значениях τ ($\sigma \ll 1$) в формуле (22) можно ограничиться только членом, содержащим $\sigma^{2(1-s)}$. При этом будем иметь

$$U(r, \tau) = (p_1 - p_0)\left[1 - \frac{k^{2(1-S)} - 1}{\Gamma(2-S)}\sigma^{2(1-S)}\right] \qquad (23)$$

С учетом (2)

$$U(r, t) = p_1 + (p_0 - p_1)\frac{k^{2(1-S)} - 1}{\Gamma(2-S)}\sigma^{2(1-S)} \qquad (24)$$

Как видно из приведенных на фигуре кривых, построенных по формуле (21) при $\sigma = 0.02$ и 0.05 с увеличением n, резко возрастает величина газового давления вблизи скважины.

Величину ошибки, возникающей при использовании формул (21) и (23) при различных значениях параметров, предполагаем оценить в следующей работе.

Поступило 20 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Подземная гидрогазодинамика. Собр. тр., т. II, Изд-во АН СССР, 1953.
2. Гусейнов Г. А. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Азерб. изд-во, 1961.
3. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
5. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Основы теории и таблицы формул. Гостехиздат, 1951.