

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТОВ, РАЗДЕЛЕННЫХ СЛАБОПРОНИЦАЕМЫМИ ПЛАСТАМИ

С. Т. РЫБАКОВА (Новосибирск)

Рассмотрим схему, представленную на фиг. 1. Два водоносных пласта чередуются с тремя слабопроницаемыми пластами. Будем считать напоры H_0 и H_3 постоянными, причем $H_3 > H_0$, а H_1 и H_2 — переменными. Для их определения имеем систему [1]

$$k_1 m_1 \Delta H_1 - \frac{\kappa_0}{\lambda_0} (H_1 - H_0) - \frac{\kappa_1}{\lambda_1} (H_1 - H_2) = 0 \quad (1)$$

$$k_2 m_2 \Delta H_2 - \frac{\kappa_1}{\lambda_1} (H_2 - H_1) - \frac{\kappa_2}{\lambda_2} (H_2 - H_3) = 0$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$$

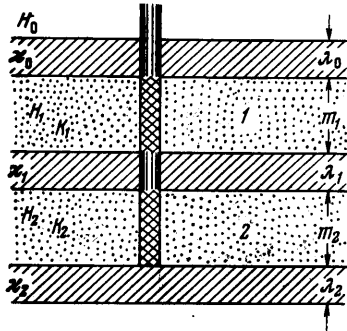
где $k_1, k_2, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$ — коэффициенты фильтрации пластов, $m_1, m_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — их мощности.

Введем безразмерные переменные

$$r = l\xi, \quad h_i = H_i / H_3 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (2)$$

причем выбираем l таким, чтобы

$$\frac{\kappa_1 l^2}{\lambda_1 k_1 m_1} = 1 \quad \text{или} \quad l = \left(\frac{\lambda_1 k_1 m_1}{\kappa_1} \right)^{1/2} \quad (3)$$



Фиг. 1

Используя (2) и (3) и перенося постоянные слагаемые в правые части, перепишем систему (1) следующим образом:

$$\Delta h_1 - (\varepsilon_0 + 1) h_1 + h_2 = -\varepsilon_0 h_0, \quad \Delta h_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h_2 + \varepsilon_1 h_1 = -\varepsilon_2$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\kappa_0 \lambda_1}{\lambda_0 \kappa_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{k_1 m_1}{k_2 m_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\kappa_2 \lambda_1 k_1 m_1}{\lambda_2 \kappa_1 k_2 m_2} \quad (4)$$

Система (4) имеет частные решения

$$h_{01} = \frac{\varepsilon_0 h_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2}, \quad h_{02} = \frac{\varepsilon_2 (\varepsilon_0 + 1) + \varepsilon_0 \varepsilon_1 h_0}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2}$$

Для получения общего решения системы (4) нужно к найденному частному добавить общее решение однородной системы. Если сделать предположение, что напоры h_1 и h_2 ограничены на бесконечности, то решение системы (4) запишется так:

$$h_1 = h_{01} + C_1 K_0(\omega_1 \xi) + C_2 K_0(\omega_2 \xi)$$

$$h_2 = h_{02} + C_1 A_1 K_0(\omega_1 \xi) + C_2 A_2 K_0(\omega_2 \xi) \quad (5)$$

Здесь $K_0(x)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента нулевого порядка второго рода.

$$\omega_{1,2} = 1/2 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) \pm \sqrt{1/4 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1)^2 - [\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2]}$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega_1^2}, \quad A_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \omega_2^2}$$

Для определения констант C_1 и C_2 зададим расходы (6)

$$q_1 = \left(\xi \frac{dh_1}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_c}, \quad q_2 = \left(\xi \frac{dh_2}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_c}, \quad \xi_c = \frac{r_c}{l}, \quad q_1 = \frac{Q_1}{2\pi k_1 m_1 H_3}, \quad q_2 = \frac{Q_2}{2\pi k_2 m_2 H_3}$$

Здесь r_c — радиус скважины, Q_1 и Q_2 — дебиты скважины в первом и во втором пластах соответственно. Определив C_1 и C_2 при помощи (6) и вводя новые переменные

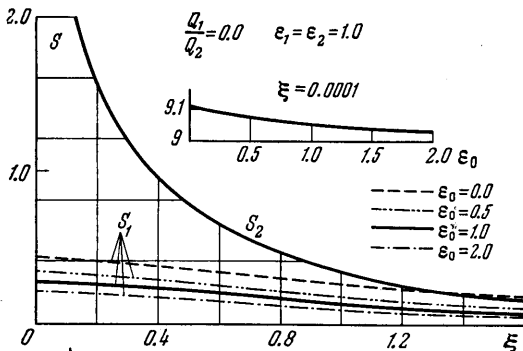
$$S_1 = \frac{h_{01} - h_2}{q_2}, \quad S_2 = \frac{h_{02} - h_2}{q_2} \quad (7)$$

можно (5) представить в виде

$$S_1 = \frac{1}{A_1 - A_2} \left\{ [K_0(\omega_1 \xi) - K_0(\omega_2 \xi)] + \frac{Q_1}{Q_2 \varepsilon_1} [A_1 K_0(\omega_2 \xi) - A_2 K_0(\omega_1 \xi)] \right\}$$

$$S_2 = \frac{1}{A_1 - A_2} \left\{ [A_1 K_0(\omega_1 \xi) - A_2 K_0(\omega_2 \xi)] + \frac{Q_1 A_1 A_2}{Q_2 \varepsilon_1} [K_0(\omega_2 \xi) - K_0(\omega_1 \xi)] \right\} \quad (8)$$

Кроме того, выпишем формулы для расходов, протекающих через слабопроницаемые пласты в результате взаимодействия водоносных горизонтов,



Фиг. 2

Поэтому существует поток снизу вверх с постоянной скоростью

$$W = \frac{\kappa_2}{\lambda_2} (H_3 - H_{02}) = \frac{\kappa_1}{\lambda_1} (H_{02} - H_{01}) = \frac{\kappa_0}{\lambda_0} (H_{01} - H_0)$$

Когда начинает работать скважина, то на этот поток накладывается другой, который получается в результате образования воронок депрессии, однако общее направление первоначального потока сохраняется и каждый из расходов (9) будет равен ∞ .

Если предположить, что $H_3 = H_0$, тогда $h_{01} = h_{02} = h_0 = 1$, и для расходов Q_i^* мы получим совершенно определенные конечные величины

$$Q_0^\circ = \frac{Q_0^*}{Q_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{A_1 - A_2} \left[\frac{1 - \Omega_2}{\omega_1^2} - \frac{1 - \Omega_1}{\omega_2^2} \right] \quad \left(\Omega_1 = \frac{Q_1 A_1}{Q_2 \epsilon_1}, \quad \Omega_2 = \frac{Q_1 A_2}{Q_2 \epsilon_1} \right) \quad (10)$$

$$Q_1^\circ = \frac{Q_1^*}{Q_2} = \frac{\epsilon_1}{A_1 - A_2} \left[\frac{(A_1 - 1)(1 - \Omega_2)}{\omega_1^2} - \frac{(A_2 - 1)(1 - \Omega_1)}{\omega_2^2} \right]$$

$$Q_2^\circ = \frac{Q_2^*}{Q_2} = \frac{\epsilon_2}{A_1 - A_2} \left[\frac{A_1(1 - \Omega_2)}{\omega_1^2} - \frac{A_2(1 - \Omega_1)}{\omega_2^2} \right]$$

Но между количеством отбираемой воды из скважины в обоих пластах и расходами Q_i° должны выполняться условия

$$1 + Q_1 / Q_2 = Q_0^\circ + Q_2^\circ$$

$$Q_1 / Q_2 = Q_0^\circ - Q_1^\circ \quad (11)$$

$$1 = Q_2^\circ + Q_1^\circ$$

Из системы (11) только два уравнения независимы, поэтому одну из величин Q_i° надо определить по (10), а остальные две можно вычислять, пользуясь системой (11), соотношения которой гораздо проще, чем (10).

При помощи ЭВМ М-20 проводились вычисления по формулам (8) и (10) для различных значений $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, Q_1 / Q_2$. Результаты оформлены в виде таблиц и графиков. Здесь приводятся одна из таблиц и часть графиков.

Ранее в работе [2] были проделаны вычисления подобного рода, но только для одного случая задания параметров $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$. Здесь же изучается характер влияния каждого из них на понижения S_1, S_2 и расходы Q_i° . Отношение расходов Q_1 / Q_2 принималось равным 0,0; 0,5; 1,0; 10,0 для каждого из случаев задания $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$. Из формул (5), определяющих ϵ_0, ϵ_1 и ϵ_2 , следует, что изменение какого-либо одного или двух из них соответствует изменению параметров того или иного пласта.

Так, если будем задаваться различными значениями ϵ_0 , оставляя ϵ_1 и ϵ_2 неизменными, то это значит, что меняется характер верхнего слабопроницаемого пласта, т. е.

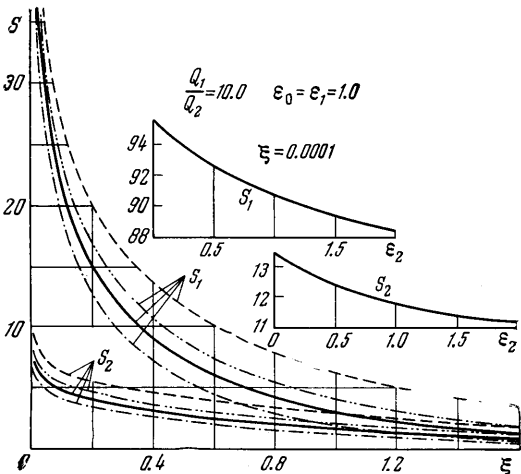
$$Q_0^* = 2\pi \frac{\kappa_0}{\lambda_0} \int_0^\infty (H_0 - H_1) r dr$$

$$Q_1^* = 2\pi \frac{\kappa_1}{\lambda_1} \int_0^\infty (H_1 - H_2) r dr \quad (9)$$

$$Q_2^* = 2\pi \frac{\kappa_2}{\lambda_2} \int_0^\infty (H_3 - H_2) r dr$$

В установившемся движении имеем такое соотношение напоров:

$$H_3 > H_{02} > H_{01} > H_0$$



Фиг. 3

отношение κ_0 / λ_0 . Вычисление для этого случая показывает, что изменение ϵ_0 сказывается главным образом на S_1 и незначительно на S_2 , но с увеличением ϵ_0 как S_1 , так S_2 уменьшаются, что соответствует увеличению расхода Q°_0 и уменьшению Q°_2 (таблица).

Q_1/Q_2			0.0			0.5			1.0			10.0		
ϵ_0	ϵ_1	ϵ_2	Q°_0	Q°_1	Q°_2	Q°_0	Q°_1	Q°_2	Q°_0	Q°_1	Q°_2	Q°_0	Q°_1	Q°_2
0.0	1.0	1.0	0.00	0.000	1.00	0.000	-0.500	1.50	0.00	-1.00	2.00	0.00	-10.0	11.0
0.5	1.0	1.0	0.25	0.25	0.75	0.500	0.000	1.00	0.75	-0.25	1.25	5.25	-4.75	5.75
1.0	1.0	1.0	0.33	0.33	0.6	0.67	0.177	0.83	1.00	0.00	1.00	7.00	-3.00	4.00
2.0	1.0	1.0	0.400	0.40	0.600	0.80	0.30	0.70	1.20	0.20	0.80	8.40	-1.60	2.60
1.0	1.0	0.0	1.00	1.00	0.00	1.50	1.00	0.00	2.00	1.00	0.00	11.00	-1.00	0.00
1.0	1.0	0.5	0.50	0.50	0.885	0.885	0.385	0.63	1.25	0.25	0.75	8.00	-2.00	3.00
1.0	1.0	1.0	0.33	0.33	0.677	0.67	0.17	0.83	1.00	0.00	1.00	7.00	-3.00	4.00
1.0	1.0	2.0	0.20	0.20	0.80	0.50	0.00	1.00	0.80	-0.20	1.20	6.20	-3.80	4.80
0.5	1.0	0.5	0.40	0.40	0.60	0.70	0.20	0.80	1.00	0.00	1.00	6.40	-3.60	4.60
1.0	1.0	1.0	0.33	0.33	0.677	0.677	0.17	0.83	1.00	0.00	1.00	7.00	-3.00	4.00
2.0	1.0	2.0	0.25	0.25	0.75	0.635	0.13	0.87	1.00	0.00	1.00	7.75	-2.25	3.25
1.0	0.5	0.5	0.33	0.33	0.67	0.67	0.17	0.83	1.00	0.00	1.00	7.00	-3.00	4.00
1.0	1.0	1.0	0.33	0.33	0.67	0.67	0.17	0.83	1.00	0.00	1.00	7.00	-3.00	4.00
1.0	1.0	1.0	0.33	0.33	0.67	0.67	0.17	0.83	1.00	0.00	1.00	7.00	-3.00	4.00

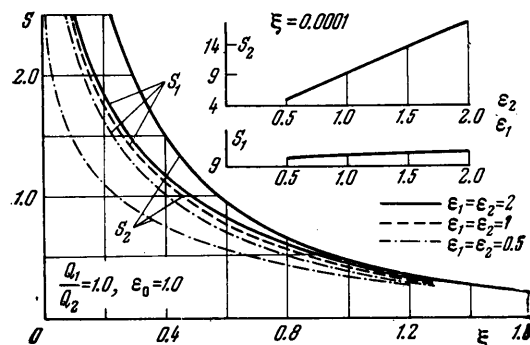
Расход Q°_1 ведет себя по-разному в зависимости от отношения Q_1 / Q_2 . Так, $Q^{\circ}_1 = Q^{\circ}_0$ при $Q_1 / Q_2 = 0$ и $Q^{\circ}_1 < 0$ при $Q_1 / Q_2 = 10.0$, так как в этом случае недостаточно поступления расхода, Q°_0 , чтобы обеспечить отбор воды, равный Q_1 , из первого пласта.

Интересно отметить случай $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1.0$, $Q_1 / Q_2 = 0.0$, т. е. здесь $\kappa_0 / \lambda_0 = \kappa_1 / \lambda_1 = \kappa_2 / \lambda_2$, $k_1 m_1 = k_2 m_2$ и вода отбирается только из второго пласта. Из таблицы видно, что $Q^{\circ}_0 = Q^{\circ}_1 = 1/2 Q^{\circ}_2$ для этого случая, т. е. взаимодействие второго пласта с нижележащим сказывается гораздо сильнее, чем через первый пласт с самым верхним пластом. На фиг. 2 для $Q_1 / Q_2 = 0.0$, представлены кривые S_1 и S_2 для разных ϵ_0 и $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$. Кривые S_2 построены только для одного случая, остальные опущены ввиду малого отличия от приведенной. Для точки $\xi = 0.0001$ построен отдельный график S_2 для разных ϵ_0 на этой же фиг. 1.

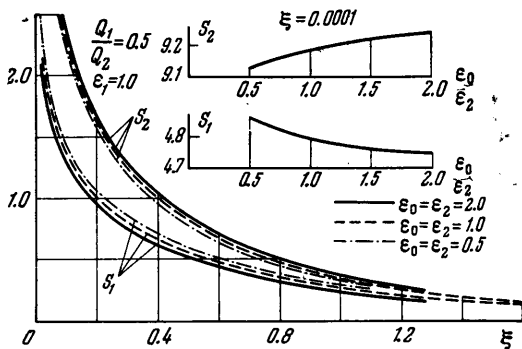
Рассмотрим случай, когда меняются параметры нижней прослойки. Это значит, что задают различные значения ϵ_2 , а ϵ_0 и ϵ_1 остаются без изменения. В наших примерах $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 1$, а ϵ_2 принимает значение 0; 1, 0.5; 1.0, 2.0. На фиг. 3 построены кривые S_1 и S_2 для $Q_1 / Q_2 = 10.0$. Из фиг. 3 и таблицы (вторые четыре строчки) видно, что с увеличением ϵ_2 как S_1 , так и S_2 уменьшаются, расход Q°_0 уменьшается, а Q°_2 увеличивается. В этом случае изменение ϵ_2 влияет в основном на S_2 .

Проследим влияние среднего слабопроницаемого пласта на S_1 , S_2 и расходы Q°_i . Задание различных ϵ_0 и ϵ_2 означает изменение параметров этого пласта, т. е. κ_1 / λ_1 . Здесь проводится сравнение трех случаев

$$\begin{aligned} \epsilon_0 = \epsilon_2 = 0.5, & \quad \epsilon_0 = \epsilon_2 = 1.0 \\ \epsilon_0 = \epsilon_2 = 2.0 & \quad (\epsilon_1 = 1.0) \end{aligned}$$



Фиг. 5

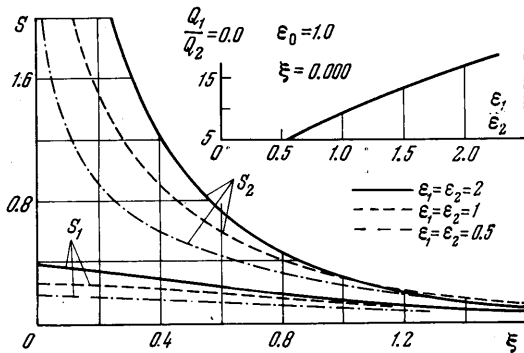


Фиг. 4

В первом из приведенных случаев увеличиваем, а в третьем уменьшаем κ_1 / λ_1 в два раза по сравнению со вторым,

Кроме того, следует отметить, что параметр κ_1 / λ_1 входит в формулу (3), определяющую l . Чтобы сравнить понижения для всех трех случаев на одних и тех же расстояниях от скважины, при вычислении S_1 и S_2 нужно ξ увеличивать и уменьшать в $\sqrt{2}$ раз в первом и третьем случаях соответственно, так как l уменьшается в первом случае в $\sqrt{2}$, и во столько же раз увеличивается в третьем случае по сравнению со вторым. На фиг. 4 показаны S_1 и S_2 при $Q_1 / Q_2 = 0.5$, а в таблице строки 9—11 воспроизводят соотношения расходов Q_i° .

Вычисления показывают, что S_1 и S_2 ведут себя по-разному с изменением $\varepsilon_0, \varepsilon_2$ и Q_1 / Q_2 . При увеличении ε_0 и ε_2 , т. е. при уменьшении κ_1 / λ_1 , переменная S_1 уменьшается, а S_2 — увеличивается, при уменьшении ε_0 и ε_2 — наоборот. Однако это справедливо только, когда из первого пласта откачивают воды меньше, чем из второго. Так, в случае $Q_1 / Q_2 = 10.0$ с увеличением ε_0 и ε_2 понижение S_1 увеличивается, а S_2 уменьшается, с уменьшением ε_0 и ε_2 картина меняется. Дело в том, что в этом случае для установления движения в первом пласте недостаточно расхода Q°_0 , поступающего в этот пласт, а поступление воды из нижележащего горизонта затруднено, когда κ_1 / λ_1 уменьшается, так как уменьшается скорость перетока, поэтому увеличивается S_1 и уменьшается S_2 . Аналогичная картина в соотношениях расходов Q_i° (таблица, строки 9—11).



Фиг. 6

Отметим, что параметр $k_1 m_1$ также входит в формулу для l , поэтому с ξ прodelывается вышеописанная операция, чтобы сравнить кривые понижений на одинаковом расстоянии от скважины для всех трех случаев. Из фиг. 5 и других вычислений, не приведенных здесь, видно, что изменение $k_1 m_1$ очень сильно влияет на S_1 и очень незначительно на S_2 . Особенно это наглядно видно, если сравнить S_1 и S_2 в точке $\xi = 0.0001$ для всех Q_1 / Q_2 . Здесь справа приведена разница в S_1 и S_2 для первого и третьего из вышеуказанных случаев. Но понижения S_1 и S_2 ведут себя одинаково, т. е. с увеличением $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ увеличиваются, с уменьшением их уменьшаются.

В таблице в последних трех строках даны значения Q_i° для этих примеров. Видим, что соотношение Q_i° одинаково во всех трех случаях.

Изменение ε_1 и ε_2 означает, что может меняться как параметр $k_1 m_1$, так и $k_2 m_2$, т. е. характер второго пласта. Но теперь уже первый из случаев (16) будет означать, что увеличиваем, а третий, — что уменьшаем $k_2 m_2$ в два раза по сравнению со вторым. Следует отметить, что параметр $k_2 m_2$ входит в выражение для q_2 , а так как S_1 и S_2 содержат q_2 , то на фиг. 6 эти кривые представлены таким образом, что они имеют один и тот же коэффициент пропорциональности реальным понижениям, причем он равен коэффициенту, который получается для случая $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.0$. Сравнение S_1 и S_2 показывает, что изменение параметра сильно сказывается на S_2 и незначительно на S_1 .

Здесь сперва приведена разница в S_1 и S_2 между первым и третьим случаями в точке $\xi = 0.0001$.

Отношение Q_i° такое же для всех случаев, как и при изменении $k_1 m_1$. На изменение Q_i° влияют главным образом параметры слабопроницаемых пластов.

Благодарю П. Я. Кочину и В. Н. Эмиха за помощь при выполнении работы.

Поступило 6 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова - Кочина Г. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
2. Бегматов А., Рыбакова С. Т. К взаимодействию водоносных пластов, разделенных слабопроницаемыми пластами. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2.

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.0$
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2.0 (\varepsilon_0 = 1.0)$

$Q_1/Q_2 = 0$	0.5	1.0	10.0
$S_1^{(1)} - S_1^{(3)}$	0.19	6.53	12.86
$S_2^{(1)} - S_2^{(3)}$	0.4	0.13	0.23
	1.93		

$Q_1/Q_2 = 0$	0.5	1.0	10.0
$S_1^{(3)} - S_1^{(1)}$	0.19	0.20	0.20
$S_2^{(3)} - S_2^{(1)}$	12.67	13.57	12.86
	14.59		