К ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г. В. ГОЛУБЕВ *(Казань)*

Некоторые задачи подземной гидродинамики (теории теплопроводности, электростатики, магнитостатики, диффузии и т. д.) приводятся к интегрированию уравнения эллиптического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0 \tag{1}$$

Здесь $k = k(x, y)$ — проницаемость пласта (коэффициент теплопроводности или электропроводности, магнитная проницаемость); p — давление (температура, электрический или магнитный потенциал).

Решению краевых задач для уравнения (1) посвящено много работ и поиски продолжаются. Ниже дается применение метода, предложенного И. Н. Векуа [1], к одной задаче подземной гидродинамики.

Рассмотрим горизонтальный круговой пласт единичного радиуса постоянной мощности h и переменной проницаемости $k(x, y)$, разрабатываемый при водонапорном режиме одной центральной скважиной с дебитом Q. Жидкость считаем однородной, несжимаемой, пласт — недеформируемым, изотропным, а фильтрацию — подчиняющейся линейному закону Дарси. Коэффициент проницаемости $k(x, y)$ предполагаем аналитической функцией переменных x, y, не обращающейся в нуль ни в одной точке пласта. Требуется определить давление в пласте при постоянном давлении p° на круговом контуре питания. Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения (1) при следующих условиях:

1) давление $p = p^\circ$ при $r = 1$;

2) в начале координат функция p имеет логарифмическую особенность, причем

$$\lim_{l\to 0}\left\{\oint_l \frac{kh}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial r}\,ds\right\}=Q$$

Здесь l — произвольный контур, охватывающий скважину, μ — вязкость жидкости. Уравнение (1) можно преобразовать к следующему виду

$$\Delta u + 4c(x, y)\,u = 0, \qquad u = \sqrt{k}\,(p - p^\circ), \qquad c(x, y) = -\frac{1}{4}\,\frac{\Delta\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \tag{2}$$

Будем временно считать в уравнении (2) независимые переменные x, y и функцию u комплексными и преобразуем его к новым переменным

$$z = x + iy, \qquad \bar z = x - iy$$

Если x, y — комплексные, то z, $\bar z$ будут двумя независимыми комплексными переменными. Если же перейти к исходному случаю, когда x и y действительные, то z, $\bar z$ обратятся в сопряженные значения одного комплексного переменного. Этим воспользуемся в дальнейшем. В новых переменных уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar z} + c(z, \bar z)\,u = 0 \qquad \left(4\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar z} = \Delta\right) \tag{3}$$

Уравнение (3) — формально гиперболического типа в канонической форме, решение может быть получено методом последовательных приближений. Для применения этого метода приведем дифференциальное уравнение к интегральному уравнению Вольтерра. Для этого дважды проинтегрируем уравнение (3); переменные z, $\bar z$ заменим соответственно на ζ, $\bar\zeta$, а переменные z, $\bar z$ будем считать верхними пределами интегрирования.

Тогда получим

$$u(z, \bar z) + \int_0^z\int_0^{\bar z} c(\zeta, \bar\zeta)\,u(\zeta, \bar\zeta)\,d\zeta\,d\bar\zeta = \varphi(z) + \psi(\bar z) \tag{4}$$

где φ и ψ — произвольные аналитические функции своих аргументов.

Уравнение (4) можно решить обычным путем по методу последовательных приближений. Записывая решение через резольвенту, получим

$$u(z, \bar z) = \varphi(z) + \psi(\bar z) + \int_0^z \beta(z, \bar z, \zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta + \int_0^{\bar z} \beta_1(z, \bar z, \bar\zeta)\,\psi(\bar\zeta)\,d\bar\zeta \tag{5}$$

Исходное уравнение (2) действительное, поэтому функции φ, ψ; β, β_1 будут попарно сопряженными и u запишется так

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left[\varphi(z) + \int_0^z \beta(z, \bar{z}, \zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta\right] \tag{6}$$

В выражении (6) функция β находится при помощи процесса последовательных приближений, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция.

Функция u должна удовлетворять краевому условию: $u = 0$ при $r = 1$. Следовательно, получаем

$$u\Big|_{r=1} = \mathrm{Re}\left[\varphi(z) + \int_0^z \beta(z, \bar{z}, \zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta\right]\Bigg|_{r=1} = 0 \tag{7}$$

Будем искать произвольную аналитическую функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = A\ln z + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \left(A = \frac{Q\mu}{2\pi h\sqrt{k_0}}\right) \tag{8}$$

Постоянная A здесь определена через заданный дебит Q.

Подставляя $\varphi(z)$ в краевое условие (7), произведя интегрирование и подставив значение $r = 1$, приравняем нулю коэффициенты при косинусах и синусах дуг одинаковой кратности. Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_n. Определяя c_n, подставляем их в выражение u, затем согласно (2) определяем p. Таким образом, главная трудность заключается в решении системы линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена на машине.

Для иллюстрации метода были рассчитаны три примера.

Часть вычислений проводилась на ЭВМ «Сетунь». Первые два примера брались такие, для которых можно записать точное решение и оценить погрешность приближенного метода. Третий пример — довольно интересный случай линейного изменения коэффициента проницаемости.

Пример 1. Пусть коэффициент проницаемости пласта определен формулой $k = k_0 \exp(ax + by)$. Поворачивая систему координат на угол $\alpha = \mathrm{arc\,tg}\,(b/a)$, получим распределение давлений симметричным относительно оси x', а проницаемость будет зависеть от одной координаты x'

$$k = k_0 \exp\left(\sqrt{a^2 + b^2}\, x'\right)$$

Для численных подсчетов примем $\mu = 2{,}5$ *сп*, $h = 8$ *м*, $k_0 = 0.4$ *д*, $p° = 150$ *ат*, $Q = 5200$ *см³/сек*, $r°_c = 0.0001$ (радиус скважины, промеренной радиусом контура питания), $\lambda^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = 1$.

Для данного примера точное выражение функции давления

$$p = -6.466e^{-r\cos\theta}\left[K_0(r) - \frac{K_0(1)}{I_0(1)} I_0(r)\right] + 150 \tag{9}$$

Здесь I_0 — функция Бесселя первого рода мнимого аргумента нулевого порядка, K_0 — функция Бесселя второго рода.

Интегральное уравнение Вольтерра (4) в рассматриваемом случае имеет вид

$$u - \frac{\lambda^2}{4}\int_0^z\int_0^{\bar{z}} u\,d\zeta\,d\bar{\zeta} = \varphi(z) + \psi(\bar{z})$$

Запишем первое и второе приближения для давления p

$$p_1 = 6.466e^{-r\cos\theta}\left[(1 + 0.25r^2)\ln r + 0.2\,(1 - r^2)\right] + 150 \tag{10}$$

$$p_2 = 6.466e^{-r\cos\theta}\left[(1 + 0.5r^2 + 0.0156r^4)\ln r + 0.216 - 0.196r^2 - 0.002r^4\right] + 150$$

По формулам (9) — (10) проводились расчеты. Для каждой точки подсчитывались семь величин: точное значение давления p, первое и второе приближения p_1 и p_2, абсолютные и относительные ошибки первого и второго приближений. Вычисления проводились в 40 точках области, но вследствие симметрии течения относительно оси x' давление будет известно в 64 точках области. Кроме того, $p = 150$ *ат* при $r = 1$ и $p = 91{,}85$ *ат* при r.

Анализируя результаты вычислений, можно заметить, что относительная ошибка больше при меньших значениях r. Для первого приближения она достигает максимума при $r = r° - 0.12\%$.

Таким образом, в рассматриваемом примере первое приближение дает вполне удовлетворительные результаты. Максимальная относительная ошибка второго приближения $\sim 0.03\%$.

Пример 2. Пусть $k = k_0 \exp(-\alpha^2 r^2)$, а исходные данные для численных расчетов возьмем такие же, как в примере 1, кроме того, положим $\alpha^2 = 2$.

В этом случае фильтрация будет радиальной и можно записать точное значение давления

$$p = 3.233\,[\mathrm{Ei}\,(2r^2) - \mathrm{Ei}\,(2)] + 150 \tag{11}$$

Воспользуемся приближенным методом и запишем интегральное уравнение (4)

$$u + \frac{1}{2}\int_0^z\int_0^{\bar z}\left(1 - \frac{\zeta\bar\zeta}{2}\right) u\, d\zeta\, d\bar\zeta = \varphi(z) + \psi(\bar z) \tag{12}$$

Первое и второе приближения для давления имеют вид

$$p_1 = 6.466e^{r^2}\,[(1 - r^2 + 0.25r^4)\ln r - 3.5 + 4.5r^2 - r^4] + 153 \tag{13}$$

$$p_2 = 6.466e^{r^2}\,[(1 - r^2 + 0.5r^4 - 0.0278r^6 + 0.0156r^8)\ln r - 1.53 + 2.53r^2 - 1.14\,r^4 + 0.176r^6 - 0.036r^8] + 150 \tag{14}$$

Вычисления показывают, что максимальная относительная ошибка второго приближения составляет 2.56% (при $r = r^\circ$), первого приближения — не более 10%.

Пример 3. Рассмотрим случай линейного изменения коэффициента проницаемости $k = k_0(1 + \alpha x + \beta y)$. Поворотом системы координат можно добиться, что проницаемость $k = k_0(1 + ax)$ будет, как и в примере, зависеть от одной координаты.

Запишем интегральное уравнение (4)

$$u + \lambda^2 \int_0^z\int_0^{\bar z} \frac{u\, d\zeta\, d\bar\zeta}{(1 + {}^1/_2 a\zeta + {}^1/_2 a\bar\zeta)^2} = \varphi(z) + \psi(\bar z) \qquad \left(\lambda^2 = \frac{a^2}{16}\right) \tag{15}$$

Первое приближение имеет вид

$$u_1 = A\left(1 - \frac{1}{4}\ln\frac{1 + ax + {}^1/_4 a^2 r^2}{1 + ax}\right)\ln r + \frac{A}{4}\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{ar}{2}\right)^k \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{C_k^{\,i}}{i}\cos(k - 2i)\theta +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \cos n\theta - \frac{1}{4}\sum_{k,\,n=0}^{\infty} c_n r^{n+k}\left(-\frac{a}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^i\, \frac{\cos(k + n - 2i)\theta}{k + n - i} \tag{16}$$

Физические параметры пласта и жидкости примем такие же, как в примере 1, а постоянную $a = 0.3$. Тогда $A = Q\mu \,/\, 2\pi h\sqrt{k_0} = 4.0\bar{8}9$, а для определения коэффициентов c_n ($n = 0, \ldots, 4$) получаем систему пяти линейных алгебраических уравнений. Решая ее, находим $c_0 = -0.0234$, $c_1 = 0.00146$, $c_2 = -0.00069$, $c_3 = 0.000096$, $c_4 \approx 0$. Значения давления p_1 в различных точках области приведены в таблице; кроме того,

r	$\theta = 0$	$^1/_4\pi$	$^1/_2\pi$	$^1/_3\pi$	$\theta = \pi$
0.1	136.89	136.83	136.64	136.57	136.37
0.2	140.92	140.85	140.66	140.45	140.36
0.4	145	144.89	144.68	144.43	144.32
0.6	147.24	147.2	147.03	146.82	146.72
0.8	148.84	148.8	148.7	148.58	148.51

$p = 123.3$ *ат* при $r = 0.01$; $p = 96{,}7$ *ат* при $r = r^\circ$. Вычисления показывают, что в рассматриваемом примере поправка второго приближения мала.

Поступило 23 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, 1948.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. (Изд. 2-е перераб. и доп). Физматгиз, 1963.